АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИКА

РЕФЕРАТЫ

2530—2644

*

№ 3 1960

ПРОИЗВОДСТВЕННО-ИЗДАТЕЛЬСКИЙ КОМБИНАТ ВИНИТИ

МОСКВА

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

ИНСТИТУТА НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ АКАДЕМИИ НАУК СССР

ДИРЕКТОР ИНСТИТУТА профессор *А. И. Михайлов*

ГЛАВНЫЕ РЕДАКТОРЫ СЕРИЙ: член-корреспондент АН СССР *Н. В. Агеев* (Металлургия), канд. биологич. наук *В. П. Доброхвалов* (Биология), профессор *Е. Е. Захаров* (Геология, Горное дело), профессор *С. М. Лисичкин* (Экономика промышленности), профессор *С. М. Никольский* (Математика), профессор *К. Ф. Огородников* (Астрономия и геодезия), профессор *Ю. Г. Саушкин* (География), академик *Л. И. Седов* (Механика), *В. В. Серпинский* (Химия), профессор *Б. М. Тареев* (Электротехника), канд. техн. наук *В. З. Фрейдберг* (Машиностроение), профессор *И. А. Хвостиков* (Геофизика), профессор *Э. В. Шпольский* (Физика).

СОДЕРЖАНИЕ

Общие вопросы 1
История математики. Персоналии 4
Преподавание математики 6
Основания математики и математическая логика 9
Теория чисел 13
Алгебра . . . . . —
Многочлены и линейная алгебра . . . . . —
Группы . . . . . —
Поля, кольца и структуры . . . . . —
Алгебраическая теория схем связи и управления . . . . . —
Топология 21
Теория функций действительного переменного 26
Теория множеств 31
Приближение функций полиномами и их обобщениями 33
Теория функций комплексного переменного 38
Дифференциальные уравнения 45
Обыкновенные дифференциальные уравнения 45
Уравнения в частных производных 75
Приложения к физике, технике и естественным наукам 86
Интегральные уравнения 101
Вариационное исчисление . . . . . —
Анализ (другие вопросы) 103
Числовые ряды 106
Специальные функции 107
Интегральные преобразования и операционное исчисление 109
Приложения общих методов математического анализа 110
Функциональный анализ 111
Теория вероятностей 122
Математическая статистика 124
Теория игр, исследование операций и математическая экономика . . . . . —
Применение теоретико-вероятностных и статистических методов 125
Геометрия 128
Приложения геометрии 129
Элементарная геометрия 130
Аналитическая геометрия 132
Начертательная геометрия 133
Проективная и неевклидовы геометрии 134
Алгебраическая геометрия 136
Дифференциальная геометрия трехмерного пространства 141
Геометрия n-мерного пространства 143
Теория относительности 147
Глобальная теория дифференцируемых многообразий 148
Метрические методы в геометрии 152
Выпуклые многообразия 153
Численные и графические методы 154
Таблицы 163
Вычислительные машины и математические приборы 164
Использование вычислительных устройств и их элементов в технике 174
Авторский указатель 179

Адрес редакции: Москва Д-219, Балтийская ул., 14

REFERATIVNYI ZHURNAL

INSTITUTE OF SCIENTIFIC INFORMATION OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE USSR

DIRECTOR OF THE INSTITUTE professor *A. I. Mikhailov*

CHIEF EDITORS OF THE SECTIONS: Corresponding Member of the A. S., USSR *N. V. Ageev* (Metallurgy), Candidate of Biological Sciences *V. P. Dobrokhvalov* (Biology), Professor *E. E. Zakharov* (Geology, Mining), Professor *S. M. Lisichkin* (Economics of Industry), Professor *S. M. Nikolsky* (Mathematics), Professor *K. F. Ogorodnikov* (Astronomy and Geodesy), Professor *Yu. G. Saushkin* (Geography), Academician *L. I. Sedov* (Mechanics), *V. V. Serpinsky* (Chemistry), Professor *B. M. Tareev* (Electrical Engineering), Candidate of Technical Sciences *V. Z. Freidberg* (Machine Building), Professor *I. A. Khvostikov* (Geophysics), Professor *E. V. Shpolsky* (Physics)

CONTENTS

General 1
History. Personalia 4
Teaching of mathematics 6
Foundations. Mathematical logic 9
Theory of numbers 13
Algebra . . . . . —
Polynomials, linear algebra . . . . . —
Groups . . . . . —
Fields, rings, lattices . . . . . —
Algebraic theory of communication and control circuits . . . . . —
Topology 21
Theory of functions of real variables 26
Theory of sets 31
Approximations of functions by polynomials and their generalizations 33
Theory of functions of complex variables 38
Differential equations 45
Ordinary differential equations 45
Partial differential equations 75
Applications to physics, technology and natural sciences 86
Integral equations 101
Calculus of variations . . . . . —
Analysis (other aspects) 103
Numerical series 106
Special functions 107
Integral transforms, operational calculus . . . 109
Applications of general methods of mathematical analysis 110
Functional analysis 111
Theory of probability 122
Mathematical statistics 124
Theory of games, operational research, mathematical economics . . . . . —
Applications of probabilities and statistical methods 125
Geometry 128
Applications of geometry 129
Elementary geometry 130
Analytical geometry 132
Descriptive geometry 133
Projective and non-euclidean geometries . . 134
Algebraic geometry 136
Differential geometry of 3-dimensional space 141
Geometry of *n*-dimensional space 143
Theory of relativity 147
Global theory of differentiable manifolds . . . 148
Metric methods in geometry 152
Convex manifolds 153
Numerical and graphical methods 154
Tables 163
Computers and mathematical devices 164
Application of computer devices 174
Author index 179

Editorial Office: Moscow D-219, Baltijskaya ulitsa, 14

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ
МАТЕМАТИКА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР профессор *С. М. Никольский*

ЧЛЕНЫ РЕДКОЛЛЕГИИ: академик *П. С. Александров*, академик *И. Н. Векуа*, академик *А. Н. Колмогоров*, член-корреспондент АН СССР *Ю. В. Линник*, профессор *А. И. Маркушевич*, профессор *М. А. Наймарк*, профессор *В. В. Немыцкий*, член-корреспондент АН СССР *П. С. Новиков*, профессор *Д. Ю. Панов*, профессор *К. А. Рыбников*, профессор *Н. В. Смирнов*, профессор *С. П. Финико*

УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ канд. физ.-матем. наук *А. А. Конюшков*

Рефераты 2530—3644 **№ 3** **Март 1960 г.**

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

Редактор *К. А. Рыбников*

2530. О Международном математическом конгрессе в Эдинбурге. Бари Н. К., Меньшов Д. Е., Успехи матем. наук, 1959, **14**, № 2, 235—238

Сообщение о научных беседах на конгрессе по проблемам теории функций действительного переменного. Специальной секции по теории функций не было, что является недостатком в организации конгресса.

2531. Международный математический конгресс в Эдинбурге. Илиев (Международният математически конгрес в Единбург. Илиев Любомир), Физ. матем. списание, 1959, **2**, № 1, 37—44 (болг.)

2532. Обыкновенные дифференциальные уравнения на Международном конгрессе в Эдинбурге. Немыцкий В. В., Успехи матем. наук, 1959, **14**, № 2, 251—252

2533. Заседания Московского математического общества (30 сентября — 2 декабря 1958 г.). — Успехи матем. наук, 1959, **14**, № 2, 219—233

Сообщается о докладах, прочитанных на заседаниях Московского математического общества в сентябре — декабре 1958 г. Приведены резюме некоторых докладов (в реферате отмечены звездочкой).

30 сентября 1958 г. Посвящено Международному математическому конгрессу в Эдинбурге (14—21 августа 1958 г.).

6 октября 1958 г. Посвящено чествованию С. Л. Соболева в связи с 50-летием со дня его рождения и 30-летием научно-педагогической деятельности.

7 октября 1958 г. А. И. Маркушевич, Вопросы перестройки системы народного образования. А. Н. Колмогоров, О подготовке кадров для физико-математических наук и новой техники.

14 октября 1958 г. А. Г. Витушкин, Некоторые теоремы о возможности равномерного приближения непрерывных функций комплексного переменного рациональными функциями. Б. Л. Рождественский, К теории систем квазилинейных уравнений.

21 октября 1958 г. А. И. Кострикин, О проблеме Бернсайда.

Избрание новых членов общества. Выдвижение кандидатов на получение Ленинской премии за 1959 г.

28 октября 1958 г. Ю. В. Линник, Каждое достаточно большое натуральное число — сумма простого и двух квадратов (решение проблемы Харди — Литлвуда).

Заслушаны и обсуждены отчеты правления и ревизионной комиссии Общества о работе, проделанной за период с октября 1956 г. по октябрь 1958 г.; проведены выборы нового состава правления и ревизионной комиссии.

11 ноября 1958 г. В. Г. Болтянский, Решение проблемы Борсука о k-регулярных вложениях*.

18 ноября 1958 г. Приветствие С. П. Финикову в связи с исполнившимся 15 ноября его 75-летием. М. Ф. Бокштейн, Теорема об универсальных коэффициентах и формула Кюннета в гомологической алгебре*. А. В. Ефимов, О приближении непрерывных функций суммами Фурье*. Избрание членом Московского математического общества А. Л. Онищика. Н. М. Коробов, О некоторых теоретико-числовых методах приближенного вычисления кратных интегралов*.

25 ноября 1958 г. И. М. Гельфанд и М. И. Граев, Геометрия однородных пространств и разложение представлений в однородных пространствах на неприводимые*. В. А. Боровиков, Фундаментальные решения линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами.

2 декабря 1958 г. В. А. Рохлин, Внутренние гомологии.

2534. Развитие физико-математических наук в Советском Азербайджане. Халилов З. И., АзэрбССР Элмлэр Акад. хэбэрлэри, Изв. АН АзербССР, 1957, № 10, 25—38

Обзор научных результатов в области физико-математических наук, полученных в Институте физики и математики и других научных учреждениях АН АзербССР и на физико-математических кафедрах Азербайджанского университета и других вузов республики (без указания авторов). Обзор полон по специальности автора — теории дифференциальных и интегральных уравнений (краевые задачи, задача Коши, смешанные задачи, обыкновенные дифференциальные уравнения, интегральные уравнения, функциональный анализ и функциональные уравнения), но неполон и не вполне точен в других областях математики. В области геометрии не указан цикл работ М. А. Джавадова по геометрии пространств над алгебрами, хотя подробно указаны ранние работы этого геометра. В области истории математики указаны только исследования математических работ Насирэддина Туси, хотя были выполнены не менее важные исследования математических работ Омара Хайяма и Гиясэддина Каши. Референт не смог отыскать указанной автором

публикации произведения Насирэддина «Изложение Евклида». Б. А. Розенфельд

2535. Основные направления научной деятельности Академии наук Казахской ССР на 1959—1965 годы. Полосухин А. П., КазССР Гылым Акад. хабаршысы, Вестн. АН КазССР, 1959, № 1, 3—13

2536. Математическое общество в Молдавии. Бычков Б. П., Матем. в школе, 1959, № 4, 90

Краткое сообщение об организации математического общества в Молдавии (17/IX 1958 г.) и его задачах.

2537. Международный центр математических вычислений. Мюссар (Międzynarodowy ośrodek obliczeń matematycznych. Mussard Jean A.), Problemy, 1958, **14**, № 11, 831 (польск.)

Информация о временном Международном центре математических вычислений, созданном в Риме на основе соглашения между ЮНЕСКО и Итальянским математическим институтом. Центр приступил к работе в январе 1958 г. Его основными задачами являются: разработка вычислительных методов, организация международного обмена информацией, подготовка специалистов. Конкретной вычислительной работы центр проводить не будет. В. Ф. Рогаченко

2538. Международная конференция по передаче информации.—Открытие (International Conference on Information Processing.—The opening. Paris, France, June 15—20, 1959), Computers and Automat., 1959, **8**, № 7, 8—9 (англ.)

2539. Научно-техническая конференция в МЭИ, Москва, 24—26 марта 1959 г. Ракова Э. С., Успехи матем. наук, 1959, **14**, № 4, 243—244

2540. Научно-техническая конференция в МВТУ, Москва, 25—26 марта 1959 г. Лапко А. Ф., Успехи матем. наук, 1959, **14**, № 4, 245

2541. II Международный конгресс по вопросам кибернетики в Бельгии 3—10 сентября 1958 г. Свобода (II. Mezinárodní kongres o kybernetice v Belgii, 3.—10. září 1958. Svoboda František), Věstn. ČSAV, 1959, **68**, № 1, 190—193 (чешск.)

2542. Доклад о IV Международном биометрическом конгрессе. Харте (Bericht über den IV. Internationalen Biometrischen Kongreß. Harte C.), Biometr. Z., 1959, **1**, № 2, 142—143 (нем.)

Краткое сообщение. Конгресс состоялся 28 августа — 2 сентября 1958 г. в Оттаве (Канада).

2543. Итальянское общество содействия прогрессу науки. Тодд (Societa Italiana per il progresso delle scienze. Todd John), Math. Tables and Other Aids Comput., 1957, **11**, № 57, 51—52 (англ.)

Краткий отчет о 46-м конгрессе этого общества, состоявшемся 15—21 сентября 1956 г. в Сицилии. Список докладов (преимущественно по машинной и вычислительной математике). В. И. Левин

2544. Всесоюзное совещание по теории вероятностей и математической статистике. Амбарцумян Г. А., Туманян С. Х., Успехи матем. наук, 1959, **14**, № 2, 253—258

Совещание происходило 19—25 сентября 1958 г. в Ереване. Перечень докладов.

2545. Совещание по геометрии и топологии, организованное Академией РНР в Яссах. Костинеску (Consfătuirea de geometrie şi topologie, organizată la faşi de Academia Republicii Populare Romîne. Costinescu Olga), Gaz. mat. şi fiz., 1958, **10**, № 8, 503—504 (рум.)

Совещание состоялось с 2 по 5 июня 1958 г. Организовано Академией РНР. Приняли участие 150 человек, в том числе иностранные гости: Хилтон (Hilton P. J.) (Англия), Георгиев (Болгария), Катетов (Katetov M.) (Чехословакия), Су Бу-цин (Su-Bu-chin) и Эн Чи-та (Yen-Chih-Ta) (КНР), Лихнерович (Lichnerowicz A.) (Франция), Панвиц (Panwitz E.) (ГДР), Серге (Segre B.) и Вилла (Villa M.) (Италия), Слебодзински (Slebodzinski V.) (Польша), Арф Кахид (Arf Cahid) (Турция), Чассар (Császár A.) и Богнер (Bogner M.) (Венгрия).

Было заслушано 11 докладов общего характера и 69 сообщений на двух секциях: геометрии (43 сообщ.) и топологии (26 сообщ.). В. М. Остиану

2546. Конференция по теории и применению дискретных автоматических систем, Москва, 22—26 сент. 1958 г. Морсанов И. С., Чинаев П. И., Автоматика и телемеханика, 1959, **20**, № 21, 100—106

2547. Работа семинаров Лаборатории по разработке научных проблем проводной связи Академии наук СССР в 1956 г. В сб.: Пробл. передачи информ. Вып. 1. М., АН СССР, 1959, 160—163

2548. О математических трудах Национального Итальянского Института прикладных вычислений. Пиконе М., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. **4**. М., АН СССР, 1959, 238—239

2549. О работе Дармштадтского института прикладной математики. Вальтер А., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. **4**. М., АН СССР, 1959, 239

2550. Некоторые математические проблемы, исследованные в секторе математики физико-технического института с 1946 по 1957 год. Салехов Г. С., Изв. Казанск. фил. АН СССР. Юбилейн. сб. Казань, 1957, 5—11

Разрабатывались следующие проблемы: 1) проблема Рауса — Гурвица (1946—1947 гг.); 2) геометрия биаксиальных пространств аффинной связности (1948—1950 гг.); 3) проблема Коши — Ковалевской для уравнений в частных производных в области сколь угодно гладких функций (1946—1951 гг.); 4) вычисление рядов, имеющих приложение к решению краевых задач математической физики (1950—1954 гг.); 5) методы приближенного решения функциональных уравнений (1950—1954 гг.); 6) математические задачи теории фильтрации жидкостей в пористой среде (1951—1957 гг.). Уделено внимание проблемам 3) — 6), научное руководство которыми осуществлялось автором статьи. Библ. 68 назв.

2551. О предмете математики. Гокиели Л. П., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. **4**. М., АН СССР, 1959, 83—84

2552. Значение книги В. И. Ленина для критики «математического» идеализма. Рузавин Г. И., Вопр. философии, 1959, № 5, 137—148

Кратко рассказано о кризисе оснований математики в начале XX в. и его причинах; критикуются идеалистические установки логицизма, конвенционализма, интуиционизма, формализма. Н. А. Киселева

2553. Ученые Украины в борьбе за технический прогресс. Куюн А. И., Гаврилов В. Д., Вестн. АН СССР, 1959, № 1, 77—80

2554. Относительно дискуссии по вопросу применения математики в биологии. Бакшиш (Cu privire la discuţiile în problema aplicării matematicii în biologie. Bacşiş Gh.), Natura (RPR), 1958, **10**, № 6, 68—71 (рум.; рез. русск., англ.)

Обзор дискуссии по вопросу применения математики в биологии, начатой в Советском Союзе в «Вопросах философии», в 1956 г. Сообщается, что в РНР математика применяется в исследовании сельскохозяйственных проблем и что организовано Общество количественной биологии, биометрии и биостатистики. А. Н. Гливич

2555. О некоторых общих вопросах кибернетики. Ляпунов А. А. В сб.: Пробл. кибернетики. Вып. 1. М., Гос. изд-во физ.-матем. лит., 1958, 5—22

Основной вопрос кибернетики определяется как вопрос о взаимоотношении возможностей вычислительной машины и мышления. В качестве критерия того, что функционирование некоторой управляющей системы изучено, предлагается возможность моделировать ее в универ-

сальной вычислительной машине. Основным методом кибернетики как науки является, согласно автору, метод алгоритмического описания функционирования управляющих систем, а основным ее математическим предметом — изучение управляющих алгоритмов. В статье специально рассматривается вопрос о логических схемах алгоритмов, об их «машинной реализации», синтезе, имитирующих возможностях; отмечается необходимость экспериментальных работ в области кибернетики. Проблемы кибернетики связываются с вопросами математической логики, с интересами ряда наук как естественных, так и технических. Попутно затронуты вопросы автоматизации перевода с одних языков на другие, вопросы генетики, эволюции биологических видов. П. Е. Сивоконь

2556. **Основные черты технической кибернетики. Солодовников В. В.** В сб.: Автомат. управление и вычисл. техн. Вып. I. М., Машгиз, 1958, 5—21

Кибернетика определяется как наука, устанавливающая общие принципы и законы, согласно которым как живые организмы, так и некоторые машины выполняют целеустремленные действия на основе преобразования и использования информации. Основным методом изучения в кибернетике является алгоритмизация информационных процессов. Техническая кибернетика рассматривается как часть общей кибернетики, имеющая дело с разработкой принципов построения и теории машин, которые могут достаточно точно реализовать алгоритмы информационных процессов. Теоретические основы технической кибернетики представляют единство трех дисциплин: теории информации, теории логических и вычислительных машин и теории автоматического регулирования. На примере проектирования системы управления зенитным огнем подчеркивается необходимость совместного рассмотрения этих трех компонент технической кибернетики. А. П. Ершов

2557. **Счетные машины и развитие математики. Молдован** (Maşinile de calcul şi dezvoltarea matematicii. Moldovan Elena), Gaz. mat. şi fiz., 1959, **A11**, № 4, 193—201 (рум.; рез. русск., франц.)

Тезисы доклада, прочитанного на совещании, организованном ОМФН в Клуже, в январе 1959 г. Подчеркивается теоретическое и практическое значение этих машин, а также их влияние на развитие некоторых ветвей математики. Приводятся данные деятельности Института вычислений в Клуже. Из резюме автора

2558. **О методе Маннаури. Бет** (On Mannoury's method. Beth E. W.), Synthese, S. a., **10a**, 432—439 (англ.)

Краткое изложение лекции Маннаури, прочитанной в 1903 г. при вступлении в должность приват-доцента кафедры логических оснований математики Амстердамского университета на тему: «О значении математической логики для философии». Приводятся некоторые возражения против сигнифического, т. е. психологико-лингвистического метода анализа научных понятий, применяемого Маннаури для оснований математики и других наук. Признается ценность сигнифики. Н. А. Киселева

2559. **Книга Маннаури «Методология и философия элементарной математики». Хейтинг** (Mannoury's «Methodologisches und philosophisches zur Elementarmathematik». Heyting A.), Synthese, S. a., **10a**, 440—444 (англ.)

Кратко изложено содержание книги, изданной еще в 1909 г., где Маннаури развивает свой метод психологического анализа основных понятий математики. Отмечено, что психологическая конструкция Маннаури является устарелой и несостоятельной. Автор видит заслугу Маннаури в том, что в Голландии он явился пионером в сфере оснований математики, интенсивно культивировал изучение ее в течение полувека, ввел символическую логику, описал ее метод, указал полезность его для рассмотрения проблем основания математики. Н. А. Киселева

2560. **Сигнифика Маннаури в отношении к квантовой физике и кибернетике. Детуш** (La signifique de Mannoury comparée à la physique quantique et à la cybernétique. Destouches Jean Louis), Synthèse, S. a., **10a**, 445—447 (франц.)

Автор видит большое значение сигнифического метода Маннаури (т. е. психологико-лингвистического метода анализа основных понятий науки) для развития квантовой физики и кибернетики. Н. А. Киселева

2561. **Носят ли явления природы непрерывный характер и допускают ли они применение правил дифференцирования? Бёгель** (Sind die Naturvorgänge stetig und differenzierbar? Bögel K.), Wiss. Z. Hochschule Elektrotechn. Ilmenau, 1958, **4**, № 3, 203—207 (нем.; рез. русск., англ., франц.)

2562. **Значение символической логики. Кольман Э.**, В сб.: Логические исследования. М., АН СССР, 1959, 3—19

Математическая логика как метод научного исследования исторически развилась на базе традиционной формальной логики путем внедрения в нее символического метода. Излагаются кратко: история математической логики, причины, вызвавшие ее к жизни, ее значение для развития различных наук. А. С. Кузичев

2563. **Индукция. Фелс** (Induktion. Fels E. M.), Allgem. statist. Arch., 1957, **41**, № 3, 210—234 (нем.)

Обзорная статья. Затронуты многие вопросы, например: вопрос о различном понимании вероятности (частотно-статистическая и субъективная); различные точки зрения, в первую очередь Карнапа, на дедуктивную и индуктивную логику; указано на связь субъективного и объективного в науке. Очень кратко освещены вопросы, связанные с математической индукцией. Библ. 82 назв. Л. Е. Майстров

2564. **Математические парадоксы. Миллер** (Mathematical paradoxes. Miller Charles), Purdue Engr, 1959, **54**, № 6, 20, 48 (англ.)

К математическим парадоксам причисляются парадоксы «лжеца», Рассела, Ришара, а также апории Зенона. Указывается на расселовскую попытку разрешения парадоксов с помощью теории типов; отмечается, что эта теория не является общепризнанной и некоторые математики считают парадоксы до сих пор непреодоленными. Приводится старое мнение Рассела о том, что апории Зенона полностью разрешены на основе строгого обоснования математического анализа, осуществленного трудами Вейерштрасса, Дедекинда и Кантора. Отмечается, что Рассел в 1924 г. отметил наличие трудности в идее дедекиндовского сечения. Л. П. Гокиели

2565. **Об одном математическом апории Зенона «Ахилл». Стипанич** (O jednom matematičkom aspektu Zenonove aporije Ahil. Stipanić Ernest), Весн. Друштва матем. и физ. Нар. Реп. Србије, 1955, **7**, № 3-4, 179—184 (серб.; рез. франц.)

2566. **Математические игры. Куглер** (Mathematical games. Kugler Shel), Purdue Engr, 1957, **53**, № 2, 30, 68 (англ.)

2567. **Вычисления с приближенными числами. Делури** (Computations with approximate numbers. Delury D. B.), Math. Teacher, 1958, **51**, № 7, 521—530 (англ.)

Автор считает, что не может быть общих правил для вычислений с приближенными числами, так как понятия, объединяемые этим термином, делятся на две категории: приближенные числа, рассматриваемые в арифметике, и приближенные величины, встречающиеся в физике. К первым относится вопрос о величине ошибок, появляющихся в вычислениях при округлении чисел: здесь приемлемо говорить о максимальной ошибке. Вторые имеют дело с физическими процессами и основаны на эмпирической очевидности измерений. Поэтому для них нельзя ставить вопрос о максимальной ошибке, так как

нельзя говорить о максимальной возможной ошибке измерения. Р. А. Симонов

2568. Вклад инженера в математику. Булиган (L'apport de l'ingénieur à la mathématique. Bouligand G.), Rev. techn. Luxembourg., 1956, **48**, № 1, 1—10 (франц.)

Автор на отдельных конкретных примерах (проективная и начертательная геометрия, теория упругости, аэродинамика) показывает, каким образом потребность инженера в решении конкретных задач приводит к постановке и решению математических проблем более общего теоретического характера. В. П. Зубов

2569. Поправка. Успехи матем. наук, 1958, **13**, № 1, 233. Поправка к статье А. Ф. Лапко и Л. А. Люстерника «Математические съезды и конференции в СССР» (РЖМат, 1959, 2169).

2570. Заметка (Nota), Gaz. mat. şi fiz., 1958, **10**, № 8, 512 (рум.)

Редакция журнала «Gazeta matematică şi fizică» по согласованию с автором статьи (Ghermănescu M., РЖМат, 1959, 2160), помещенной в этом журнале, решила считать статью аннулированной из-за большого количества допущенных в ней ошибок.

2571 К. Прогресс в математике. Клер (Progression mathématique. Clair Roger. Paris, l'auteur, 1958, p. diverses, ill. — Multigr.), Bibliogr. France, 1958, **147**, № 50, 1222 (франц.)

2572 К. Динамические задачи кибернетики. Кельзон А. С. Л., Судпромгиз, 1959, 295 стр., илл., 11 руб.

2573 К. Памятная записная книжка по математике и технике. Михэйлеску, Бэлан, Бунеску (Memorator matematic şi tehnic. Ed. 2. Mihăilescu Nicolae, Bălan Virgil, Bunescu Paul. Bucureşti, Ed. tehn., 1958, 1095 p., il., 36 lei), Bibliogr. RPR, 1958, **7**, № 14, 481 (рум.)

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ. ПЕРСОНАЛИЯ

2574. Об истории математики и ее значении для математики и других наук. Гнеденко Б. В., Погребысский И. Б. В сб.: Истор.-матем. исследования. Вып. XI, М., Физматгиз, 1958, 441—460

Авторы затрагивают ряд вопросов, связанных с пониманием и с оценкой значения истории математики. Свою точку зрения на эту научную дисциплину авторы формулируют так: «История математики в соответствии со своим наименованием — наука одновременно историческая и математическая». Они считают, что основной ее задачей в настоящее время должно считаться выяснение закономерностей возникновения и развития математических идей. История математики, вскрывая закономерности развития математики, должна давать правильный взгляд на математику в целом и на перспективы ее развития. Подчеркивается необходимость и важность разработки истории математики XIX и XX вв. Для успешной работы в области истории математики необходимо владеть основами марксизма, знать всеобщую гражданскую историю и иметь опыт самостоятельной исследовательской работы в математике. Одной из самых увлекательных проблем истории математики авторы считают проблему возникновения математики как дедуктивной науки. Они подробно обосновывают тезис: «теперь значение истории математики для развития математики больше, чем когда-либо раньше, и со временем может только возрастать». В частности, история математики близкого к нам времени может ослаблять вредное влияние узкой специализации в математике и выявлять новые проблемы математики, возникающие в ходе ее развития. Авторы считают, что многие важные результаты в математике (теория множеств, теория меры, теория интеграла и др.) получены благодаря историческому подходу — в результате глубокого анализа хода развития математики. Теперь, более чем когда-либо ранее, каждый принципиально новый шаг в математике требует такого исторического подхода. С. Е. Белозеров

2575. О математических знаках и терминах, встречающихся в новых археологических находках на территории древней Руси. Майстров Л. Е., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. **4**. М., АН СССР, 1959, 128

2576. Наглядность математики в древнем Китае. Хэ Ло, Шусюэ тунбао, 1956, № 9, 12—16 (кит.)

2577. К вопросу о древнекитайской математике. Ли Янь, Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. **4**. АН СССР, 1959, 246—248

2578. Десятичная система счисления в Индии (Decimal system in India), Mining World and Engng Rec., 1955, **169**, № 4408, 169—170 (англ.)

2579. О математическом месте в платоновском «Теэтете». Стаматис (Über die mathematische Stelle des Theaetetus von Platon. Stamatis Evangelos), Praktika tis akademiac Afinon, 1956 (1957), **31**, 10—16 (греч.; рез. нем.)

Известное место «Теэтета», в котором говорится о том, что Феодор Киренский в доказательстве несоизмеримости квадратных корней остановился на $\sqrt{17}$, автор толкует не как исторический факт, а как поэтическое измышление Платона, желавшего подчеркнуть святость числа 17 у пифагорейцев и его значение (а также отношения $^9/_8$) для построения пифагорейской музыкальной гаммы. И. Н. Веселовский

2580. Работа математиков Средней Азии по теории параллельных линий. Ахадова М. А., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. **4**. М., АН СССР, 1959, 126

2581. Математика стран Ближнего и Среднего Востока в средние века. Розенфельд Б. А., Юшкевич А. П., Сов. востоковедение, 1958, № 3, 101—108; № 6, 66—76

Сжатый очерк развития математики в странах указанного района в IX—XV вв. по известным материалам. Наибольшее внимание уделено обзору источников и персоналиям; характеристики математических методов отрывочны и неполны. К. А. Рыбников

2582. Примечания к доказательствам Ибн ал-Хайсама и Герсонида. Розенфельд Б. А., В сб.: Истор.-матем. исследования. Вып. 11. М., Физматгиз, 1958, 777—782

Примечания к отрывкам, опубликованным в указанном сборнике (РЖМат, 1959, 10650, 10651, 10652). Б. Л. Лаптев

2583. Генрих Лорити, известный под именем Глареана (1488—1563), как гуманист, географ и математик. Фютер (Heinrich Loriti, genannt Glarean (1488—1563), als Humanist, Geograph und Mathematiker. Fueter Eduard), Actes Soc. helv. sci. natur., 1958, **138**, 166—167 (нем.)

2584. Адам Ризе (1492—1559). Штрубеккер (Adam Riese (1492 bis 1559). Strubecker Karl), Phys. Bl., 1959, **15**, № 3, 112—120 (нем.)

Биографические данные и очерк истории начальных математических школ в эпоху Реформации. Своими учебниками практической арифметики (1518 г., 1522 и 1550 гг.) Ризе способствовал распространению «цифирного счета» в Германии. В. П. Зубов

2585. Построения Маскерони. Корт (Mascheroni constructions. Court N. A.), Math. Teacher, 1958, **51**, № 5, 370—372 (англ.)

Читателям одноименной статьи Главатого (РЖМат, 1958, 6084) предлагаются дополнительные сведения библиографического и исторического характера. Рассматривается роль Маскерони в открытии теоремы, носящей его имя. Ссылаясь на БСЭ, автор указывает, что Маскерони впервые ввел в математику интегральный синус и интегральный косинус. В редакционной заметке ука-

зывается, что мысль о возможности выполнения геометрического построения с помощью одного циркуля была внушена Маскерони трудом Бенедетти (1530—1590). В качестве более дальнего предшественника называется Абуль Вафа (940—998). Л. П. Гокиели

2586. Названия кривой Аньези. Малкрон (The names of the curve of Agnesi. Mulcrone T. F.), Amer. Math. Monthly, 1957, **64**, № 5, 359—361 (англ.)

Рассматривается кривая, заданная уравнением $x^2y=a^2(a-y)$. Среди английских и американских математиков эта кривая известна под названием «Witch of Agnesi» («Ведьма Аньези»). Отмечается, что такое название дискредитирует имя женщины — ученого, и высказывается предложение об отказе от этого термина в пользу названия «Кривая Аньези», как это сделали французы и немцы. Е. В. Вандышева

2587. «Диоптрика» Эйлера. Слюсарев Г. Г., В сб.: Леонард Эйлер. К 250-летию со дня рождения. М., АН СССР, 1958, 414—422 (рез. нем.)

2588. Неопубликованная переписка между Клеро и Крамером. Специали (Une correspondance inédite entre Clairaut et Cramer. Speziali Pierre. Rev. Hist. Sci. Appl., 1955, 8, 193—273) (франц.)

2589. Учители Н. И. Лобачевского. Депман И. Я., Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та им. А. И. Герцена, 1958, **197**, 195—211

Краткие биографии учителей Лобачевского: Г. И. Карташевского, Ф. К. Броннера и К. Ф. Реннера. Очерк продолжает цикл статей, начатый автором ранее с биографий М. Ф. Бартельса (Историко-матем. исследования, вып. III, М., Гостехтеориздат, 1950, 467—474) и И. А. Литтрова (РЖМат, 1957, 28). Приведены также некоторые сведения об А. М. Княжевиче, И. И. Запольском, А. В. Кайсарове и о преподавателях физико-математических наук в Казанской гимназии в начальный период ее существования. Имеется любопытное отступление о математиках, бывших министрами. Б. Л. Лаптев

2590. О научных трудах Римана. Гончаров (O pracach naukowych Riemanna. Gonczarow W. L.), Roczn. Polsk. towarz. mat. Ser. II—Wiadom. mat., 1959, **2**, № 2, 155—196 (польск.)

Перевод предисловия к русскому изданию «Собрание сочинений Б. Римана».

2591. Из исследований В. Г. Имшенецкого в области теории интегрирования уравнений с частными производными. Кочев В. А., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956, **4**. М., АН СССР, 1959, 127—128

2592. Элементы истории математики и логики в работах Пеано. Каруччо (Spunti di storia delle matematiche e della logica nell'opera di G. Peano. Carruccio Ettore), Archimede, 1958, **10**, № 6, 258—262 (итал.)

В работах по дедуктивной логике, которую Пеано считал математической дисциплиной, учитывается развитие логической мысли от Аристотеля до современности. Особо в этом отношении выделяются историко-критические работы Пеано о понятии определения. Множество ценных замечаний и сведений по истории математики содержится в «Математическом формуляре» Пеано, особенно в тт. 4 и 5. Выделяются также: исторические экскурсы в Aritmetica generale ed algebra elementare, Torino, 1902; высказывания по истории математического анализа; работы, посвященные исследованию «Элементов» Евклида; пропаганда исторического метода в преподавании математики. И. Б. Погребысский

2593. Символическая логика в операционном анализе. I. Роллоф (Symbolisk logik i operationsanalys. Del I. Rollof Yngve), Industr. tekn., 1959, **87**, № 6, 153—154, 156 (шведск.)

Приведены краткие исторические сведения о возникновении алгебры логики, указаны ее главные интерпретации и основные законы. Имеется портрет Буля. Ю. М. Гайдук

2594. Академик Казимир Куратовский — почетный доктор Карлова университета (Akademik Kazimierz Kuratowski čestným doktorem Karlovy university), Pokroky mat., fys. a astron., 1959, **4**, № 2, 228—232 (чешск.)

2595. Академик Казимир Куратовский удостоен почетной степени доктора наук. Чехосл., матем. ж., 1959, **9**, № 2, 314 (русск., франц.)

2596. Антон Казимирович Сушкевич. (К семидесятилетию со дня рождения). Глускин Л. М., Ляпин Е. С., Успехи матем. наук, 1959, **14**, № 1, 255—260

2597. Шестидесятилетие профессора Отакара Борувки (род. 1899). Чехосл. матем. ж., 1959, **9**, № 2, 309—313 (русск., англ.)

2598. Шестидесятилетие профессора д-ра Отакара Борувки. Швец (Profesor dr. Otakar Borůvka šestdesiatročný. Švec M.), Mat.-fyz. časop., 1959, **9**, № 1, 70—71 (словацк.)

2599. Юбилей академика Владимира Коржинека (60 лет со дня рождения). Чехосл. матем. ж., 1959, **9**, № 2, 305—308 (русск., англ.)

18 апреля 1959 г. исполняется шестьдесят лет В. Коржинеку, действительному члену Чехословацкой Академии наук. Проф. Коржинек известен работами по теории алгебр, по теории групп и структур.

2600. Шестидесятилетие академика Владимира Коржинека. Иван (Akademik Vladimír Kořínek šestdesiatnikom. Ivan Ján), Mat.-fyz. časop., 1959, **9**, № 1, 69—70 (словацк.)

2601. Иосиф Захарович Штокало. (К шестидесятилетию со дня рождения). Митропольский (Йосип Захарович Штокало. (До шістдесятиріччя з дня народження). Митропольський Ю. О.), Вісник Київськ. ун-ту, 1958, № 1, Сер. астрон., матем. та механ., вип. I, 3—8 (укр.)

2602. Федор Дмитриевич Гахов (род. 1906). (К пятидесятилетию со дня рождения). Чикин Л. А., Уч. зап. Физ.-матем. фак. Ростовск.-н/Д. ун-т, 1959, **43**, № 6, 3—6

2603. Академик Николай Николаевич Боголюбов (род. 1909). (К пятидесятилетию со дня рождения). Ж. эксперим. и теор. физ., 1959, **37**, № 2, 333—335

2604. Памяти Г. А. Николаевой (1922—1957 гг.). Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1959, **53**, 266

2605. Воспоминания о Фридмане (1888—1925) (К переписке А. А. Фридмана). Гаврилов А. Ф., Тр. Ин-та истории естествозн. и техн. АН СССР, 1959, **22**, 389—400

2606. Письма А. А. Фридмана Б. Б. Голицыну и В. А. Стеклову. Фридман А., Тр. Ин-та истории естествозн. и техн. АН СССР, 1959, **22**, 324—388

2607. Е. С. Федоров как геометр. Делоне Б. Н., Тр. Ин-та истории естествозн. и техн. АН СССР, 1956, **10**, 5—12

2608. Библиография трудов Геррита Маннаури (Bibliography of the writings of Gerrit Mannoury), Synthese, S. a., 10 a, 418—422 (англ.)

2609. Геррит Маннаури (1873—1956). Некролог (Obituari Gerrit Mannoury), Synthese, S. a., 10 a, 409—413 (англ.)

2610. Памяти Тадеуша Банахевича (1882—1954). Витковский (Tadeusz Banachiewicz. Wspomnienie pośmiertne. Witkowski J.), Roczn. Polsk. towarz. mat. Ser. II—Wiadom. mat., 1959, **2**, № 2, 197—203 (польск.)

2611. Филиппо Сибирани (1880—1957). Вароли (Filippo Sibirani (1880—1957). Varoli Giuseppe), Statistica, 1957, № 2, 281—291 (итал.)

2612. Флорин Василеску (1897—1958). Андони (Florin Vasilescu (1897—1958). Andonie Georg e Şt.), Gaz. mat. şi fiz., 1959, **A11**, № 3, 160—165 (рум.; рез. франц., русск.)

2613. Горацио Скотт Карслоу (1870—1956). Егер (Horatio Scott Carslaw. Jaeger J. C.), J. London Math. Soc., 1956, **31**, № 4, 494—501 (англ.)

2614. Михаил Алексеевич Знаменский. (1886—1959) (Некролог). **Лебедев В. П., Решов Н. О.**, Матем. в школе, 1959, № 5, 69—70

2615. Луиджи Фантаппье (1901—1956). Пеллегрино (Luigi Fantappié. Pellegrino Franco), Archimede, 1956, **8**, № 6, 282—285 (итал.)

2616. Николай Сергеевич Кошляков (1891—1958). Инж.-физ. ж., 1959, **2**, № 4, 120—125

2617. Джон фон Нёйман (1903—1957). Смитис (John von Neumann (1903—1907). Smithies F.), J. London Math. Soc., 1959, **34**, № 3, 373—384 (англ.)

2618. Иоэль Гильевич Малкин (1907—1958). (К годовщине смерти). Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1959, № 5, 223—226

2619. Джон Роналд Уомерсли (1907—1958). Смитис (John Ronald Womersley (1907—1958). Smithies F.), J. London Math. Soc., 1959, **34**, № 3, 370—372 (англ.)

2620. Герберт Бильхарц (1910—1956). Кёниг (Herbert Bilharz. König Heinz), Jahresber. Dtsch. Math.-Ver., 1959, **61**, № 3, 97—103 (нем.)

2621. Памяти Вацлава Козакевича (1911—1959). Вильямс (Waclaw Kozakiewicz. (In memoriam). Williams W. L. G.), Canad. Math. Bull., 1959, **2**, № 2, 148—150 (англ.)

2622 К. Механика в XVII веке (предпосылки схоластики в классической мысли). Дюга (La mécanique au XVIIe siècle (des antécédents scolastiques à la pensée classique). Dugas René. Paris, Dunod; Neuchatel, Ed. Griffon, 1954, 620 p., ill.) (франц.)

2623 К. Гениальный математик Пьер Ферма (1601—1665) (Un mathématicien de génie: Pierre de Fermat, 1601—1665, Toulouse, Lycée Pierre de Fermat, 1957, exposition. Toulouse, impr. Fournié, 1957, 88 p., ill.), Bibliogr. France, 1957, 146, № 46, 1047 (франц.)

2624 К. Леонард Эйлер. Сборник статей в честь 250-летия со дня рождения, представленных Академии наук СССР. Ред. Лаврентьев М. А., Юшкевич А. П., Григорьян А. Т., Изд. АН СССР, 1958, илл., 608 стр.

Юбилейное издание. Состоит из двух томов. Один том издает Германская академия наук в Берлине, другой, реферируемый, издала Академия наук СССР. В настоящий том входят: М. А. Лаврентьев, Вступительная речь на юбилейной сессии, посвященной 250-летию со дня рождения Леонарда Эйлера; К. Шредер, О трудах Л. Эйлера в области прикладных наук (деятельность Эйлера особенно в годы жизни в Берлине); Г. К. Михайлов и В. И. Смирнов, Неопубликованные материалы Леонарда Эйлера в архиве Академии наук СССР*; А. О. Гельфонд, Роль работ Л. Эйлера в развитии теории чисел*; А. И. Маркушевич, Основные понятия математического анализа и теории функций в трудах Эйлера*; Б. Н. Делоне, Эйлер как геометр*; Б. В. Гнеденко, О работах Леонарда Эйлера по теории вероятностей, теории обработки наблюдений, демографии и страхованию*; Л. Н. Сретенский, Динамика твердого тела в работах Эйлера; Л. С. Полак, Некоторые вопросы механики Леонарда Эйлера; М. Ф. Субботин, Астрономические работы Леонарда Эйлера; Я. Г. Дорфман, Физические воззрения Леонарда Эйлера; Г. Г. Слюсарев, «Диоптрика» Эйлера; В. Л. Ченакал, Эйлер и Ломоносов (к истории их научных связей); Э. Винтер и А. П. Юшкевич, О переписке Леонарда Эйлера и Г. Ф. Миллера; Н. М. Раскин, Вопросы техники у Эйлера; Е. С. Кулябко, Педагогические воззрения Леонарда Эйлера; М. Е. Глинка, Леонард Эйлер (опыт иконографии); Г. А. Князев, Силуэтные портреты Леонарда Эйлера работы Ф. Антинга; А. Н. Петров, Памятные эйлеровские места в Ленинграде; Г. Е. Павлова, Забытое свидетельство современника о смерти Леонарда Эйлера.

Каждая публикация сопровождается резюме на немецком (в берлинском издании, соответственно, на русском) языке.

О статьях, название которых отмечено звездочкой, будут опубликованы в РЖ Математика отдельные рефераты.

К. А. Рыбников

2625 К. Полное собрание сочинений. Часть III. Т. I. Разное, дифференциальная геометрия. Т. 2. Дифференциальная геометрия. Картан (Oeuvres complètes. Partie III. Cartan Elie. Paris, Gauthier-Villars, 1955, Vol. 1. Divers, géométrie différentielle. xii, 920 p., Vol. 2. Géométrie différentielle. viii, p. 921—1875) (франц.)

2626 К. Основные работы Симона Стевина. Том. I. Общее введение. Механика (The principal works of Simon Stevin. Vol. I. General introduction. Mechanics.). Amsterdam, Swets & Zeitlinger, 1955, V, 617 pp., 52 gld.) (голл., англ.)

Вслед за общим описанием жизни и трудов Стевина (1548—1620) воспроизведены фотоофсетным способом его работы по механике с оригинального голландского издания, с переводом на английский на развороте.

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 7, 698.

2627 К. Математические работы. Хекке (Mathematische Werke. Hecke Erich. Göttingen, Vandenhoeck und Ruprecht, 1959, 955 S., 70.—DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1959, **A**, № 14, 1158 (нем.)

2628 К. Николай Николаевич Боголюбов. Библиогр. Сост. **Епифанова А. П.** (Материалы к биобиблиогр. ученых СССР. АН СССР. Сер. матем., вып. 8). М., АН СССР, 1959, 50 стр., 1 р. 10 к.

2629 Д. Первые работы в России по теории множеств и теории функций действительного переменного. Медведев Ф. А. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Ин-т истории естествозн. и техн. АН СССР, М., 1958

2630 Д. Древний китайский трактат «Математика в девяти книгах». Березкина Э. И. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, М., 1959

2631 Д. Проективная геометрия в трудах К. А. Андреева, А. К. Власова и Н. А. Глаголева. Ивницкий Т. Г. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Харьковск. ун-т, Харьков, 1959

ПРЕПОДАВАНИЕ МАТЕМАТИКИ

2632. XI конгресс Международной комиссии по изучению и улучшению преподавания математики. Кастельнуово (L'XI Congresso della «Commission internationale pour l'etude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques». Castelnuovo Emma), Archimede, 1957, **9**, № 3, 121—130 (итал.)

Конгресс состоялся в Мадриде с 21 по 27 апреля 1957 г. Приводятся краткие сведения о составе «Международной комиссии» и ее президиума, организационной стороне конгресса и работе секций. Основное внимание было уделено наглядным пособиям по математике, включая и учебные фильмы. Статья снабжена фотографиями учебных и наглядных пособий, демонстрировавшимися на конгрессе.

В. И. Левин

2633. Совещание заведующих кафедрами высшей математики высших технических учебных заведений СССР, Москва, 18—23 мая 1959 г. Наталевич В. К., Воробьев Л. Н., Савельев Г. И., Изв. высш. учебн. заведений. Электромеханика, 1959, № 6, 110—114

2634. «Педагогические чтения» при АПН РСФСР. Нешков К. И., Матем. в школе, 1959, № 3, 87—88

Чтения происходили 5—8 января 1959 г. в Москве. В секции преподавания математики заслушано 11 докладов и обзоры 38 докладов.

2635. Совещание преподавателей заочных отделений педагогических институтов РСФСР. Смолянский М. Л., Матем. просвещение, вып. 4, 1959, 219—225

2636. XVI конференция математических кафедр пединститутов зоны Урала. Нагибин Ф. Ф., Матем. просвещение, вып. 4, 1959, 213—217

2637. Дальнейшие перспективы в области преподавания математики. Стрефкерк (De toekomst van ons wiskundeonderwijs. Streefkerk H.), Euclides, 1959, 34, № 9, 267—278 (гол.)

2638. Развитие основных вопросов преподавания математики в советской школе (1917—1957 гг.). Севастьянов П. Я., Изв. Воронежск. гос. пед. ин-та, 1958, 25, 159—172

Краткий обзор развития преподавания математики в советской школе за 40 лет в следующих направлениях: обучение математике в политехнической школе, вопросы идейно-политического воспитания в процессе занятий по математике, внеклассная работа по математике, участие передовых учителей и научных работников в создании советской методики математики. С. И. Новоселов

2639. О двух сторонах политехнического обучения на уроках математики. Благовещенский Н. И., Матем. в школе, 1958, № 5, 1—4

Наряду с общеупотребительной формулой «Математика и жизнь» (учитель дает прикладные задачи на пройденный материал, так что ученик знает, какую формулу, теорему, построение надо применять при решении), автор отмечает важность для политехнического обучения и «двойственной» формулы «Жизнь и математика» (ученик должен подобрать аппарат для решения задачи). Приводятся примеры. В. И. Левин

2640. Математическая олимпиада в старших классах государственных средних школ. Фейгерстром, Ллойд (The national high school mathematics contest. Fegerstrom William H., Lloyd Daniel B.), Math. Teacher, 1958, 51, № 6, 434—439 (англ.)

27 марта 1958 г. Американская математическая ассоциация совместно со Статистическим обществом провела первую общенациональную математическую олимпиаду для учащихся старших классов средних школ. В олимпиаде приняло участие около 80 тыс. учащихся из 2600 школ. Дается краткий отчет о подготовке, организации и результатах соревнований. В. Ф. Рогаченко

2641. Математика как спорт. Ладд (Mathematics as a sport. Ladd Carl), Math. Teacher, 1959, 52, № 2, 140—142 (англ.)

Описание математической олимпиады учащихся средних школ, проведенной в Чикаго. Указывается на необходимость привить учащимся такой же вкус к математическим олимпиадам, как к спорту, например футболу или баскетболу. Воспроизводятся некоторые задачи логического характера. Отмечается большое значение математических олимпиад для математического развития учащихся и интерес к таким олимпиадам со стороны учащихся. Е. В. Вандышева

2642. Школьные программы по математике в свете современных взглядов на ее логическую структуру. Белецкий (Programy szkolne matematyki na tle współczesnych poglądów na jej logiczną strukturę. Bielecki Adam), Matematyka, 1959, 12, № 1-2, 3—11 (польск.)

2643. Курс математики в старших классах средней школы. Лафрамбойс (Senior high school mathematics. Laframboise Marc A.), School Sci. and Math., 1958, 58, № 7, 565—567 (англ.)

Рассматривается вопрос о недостаточной подготовленности оканчивающих среднюю школу США к занятиям математикой в колледже. Даются рекомендации по улучшению подготовки учащихся средней школы по математике, приводится примерная программа для старших классов средней школы, в которую, наряду с другими математическими дисциплинами, входит аналитическая геометрия на плоскости. В программе по алгебре большое место уделено уравнениям; в связи с этим включены элементы теории детерминантов. Е. В. Вандышева

2644. Современная математика в двенадцатом классе средней школы. Кеннеди (Modern mathematics in the twelfth grade. Kennedy Joe), Math. Teacher, 1959, 52, № 2, 97—100 (англ.)

Описание так называемого курса современной математики, который изучался в порядке эксперимента в двенадцатом классе одной из средних школ штата Индиана (США). В этот курс включены следующие основные разделы: логика, системы счисления, функции (алгебраические, тригонометрические, показательная и логарифмическая), аналитическая геометрия, теория пределов, дифференциальное исчисление. Указывается, какая подготовка должна быть проведена к изучению этого курса в предшествующих классах. В заключение приводится перечень вопросов, которые предлагались на экзамене. Е. В. Вандышева

2645. Древние авторы против современных, новая борьба книг. Клайн (The ancients versus the moderns, a new battle of the books. Kline Morris), Math. Teacher, 1958, 51, № 6, 418—427 (англ.)

Дискуссионная статья, посвященная вопросу о реформе преподавания математики в американской высшей школе. Автор выступает против абстрактного и строгого изложения математики, предлагает в преподавании математики широко использовать интуицию. В. Ф. Рогаченко

2646. Древние авторы против современных. Ответ. Мидер (The ancients versus the moderns — a reply. Meder Albert E., Jr), Math. Teacher, 1958, 51, № 6, 428—433 (англ.)

Резкая критика взглядов Клайна (реф. 2645). В. Ф. Рогаченко

2647. Введение некоторых понятий теории множеств в средней школе. I. Ример (Introducerea unor noţiuni de teoria mulţimilor în şcoala medie. I. Rimer D.), Gaz. mat. şi fiz., 1958, A10, № 12, 735—750 (рум.)

Приводятся данные, полученные профессорами Ясского университета И. Попа и А. Хаймовичем при изучении теории множеств и теории групп в математическом кружке учащихся ясских средних школ. Редакция приглашает преподавателей математики высказаться по затронутому вопросу. Тексты лекций: 1) Необходимость введения понятия множеств; 2) Множество. Элемент; 3) Сравнение множеств; 4) Действия над множествами. А. Н. Гливич

2648. Общие свойства чисел. Риппи (A unit about numbers. Rippey Robert M.), Math. Teacher, 1959, 52, № 2, 101—104 (англ.)

Описание опыта работы преподавателя математики американской средней школы, который использовал в преподавании арифметики и алгебры некоторые общие свойства чисел, в том числе то свойство, что каждый вид чисел (натуральные, целые, рациональные, действительные, комплексные) образует коммутативную группу. Приводятся аксиомы коммутативной группы и примеры упражнений, предложенных учащимся для закрепления этого понятия. Далее следует описание приемов, способствующих активизации работы учащихся на уроке, например, широкое применение неполной индукции при выводе формул, которые затем доказываются методом полной математической индукции. Рассматриваются формулы суммы n членов натурального ряда чисел, формулы суммы квадратов и суммы кубов n членов натурального ряда. Е. В. Вандышева

2649. Преподавание темы «Кривые 2-го порядка» во втузе. Бронштейн И. Н., Матем. просвещение, вып. 2, 1957, 211—225

Критикуется традиционный порядок изложения темы: вывод канонических уравнений эллипса и гиперболы на основе определения, использующего бифокальные свойства, исследование канонических уравнений, вывод фокально-директориальных свойств и т. д., затем приведение общего уравнения 2-го порядка к каноническому виду. Предлагается другой путь: эллипс определять как результат деформации окружности относительно ее диаметра с выводом канонического уравнения и исследованием свойств; гиперболу определять как график обратной пропорциональности или как результат деформации графика относительно одной из осей координат, также с выводом канонического уравнения и полным исследованием; параболу определять обычным образом; на основе канонических уравнений вывести фокально-директориальное свойство эллипса и гиперболы; в процессе предыдущего изложения уже рассматривать общее уравнение без члена с произведением текущих координат, а в заключение изложить приведение общего уравнения к указанному частному виду. Отмечаются преимущества предлагаемого способа. Приводится конспект 5 лекций по намеченной программе (реализованной автором в практике преподавания). В. И. Левин

2650. Методика изложения основных понятий теории дифференциальных уравнений во втузовском курсе высшей математики. Санин А. И. Научн. зап. Львовск. с.-х. ин-та, 1958, 7, 397—410

Замечания автора относятся к основным понятиям и определениям теории обыкновенных дифференциальных уравнений по программе высших технических учебных заведений. В. В. Добронравов

2651. Литература по вопросам преподавания математики, вышедшая в 1957 г. Шустеф Ф. М., Матем. в школе, 1959, № 3, 77—83

2652 К. Тамбовские математические олимпиады. Жекулин А. С., Никитин В. В. Тамбов, Книгоиздат, 1959, 47 стр., илл., 75 коп.

2653 К. Что такое математика? Курант, Роббинс (Co to jest matematyka? Courant Richard, Robbins Herbert (Tłum. z ang.). Warszawa, PWN, 1959, 655 s., il., 44 zł.), Przew. bibliogr., 1959, **15**, № 10, 137 (польск.)

Перевод с английского книги, вышедшей в 1941 г. Русский перевод появился в 1947 г.

2654 К. Вопросы о Вселенной в математических задачах средней школы. Пособие для учителей. Карницкий П. Н., М., Учпедгиз, 1959, 67 стр., илл., карта, 1 р. 5 к.

2655 К. Метод математической индукции. Изд. 5-е, стереотипн. Соминский И. С., М., Физматгиз, 1959, 48 стр., 75 коп.

2656 К. Метод математической индукции. Митрinович (Metod matematičke indukcije. Mitrinović D. S. Mat. bibliot. № 4, Beograd, Nolit, 1957, 47 s.) (сербо-хорв.)

Издание книжки в серии пособий кафедры математики электротехнического факультета Белградского университета. Вызвано тем, что в югославской средней школе в программе математики вопрос о математической индукции отсутствует. Брошюра содержит краткое объяснение метода и значительное число примеров применения его, напоминая имеющиеся на русском языке брошюры и статьи, на которые автор ссылается (РЖМат, 1957, 1993К, 5071К).

Примечание референта. В 1958 г. вышло второе, значительно пополненное издание брошюры (63 стр.). К прежним источникам добавлены еще некоторые: РЖМат, 1958, 4444; Проскуряков И. В., Понятия множества, группы, кольца и поля (Энциклопедия элементарной математики, кн. 1, 1951). И. Я. Депман

2657 К. Функции и их исследование. Производная. Из опыта учителя. Гольдберг А. Г., Л., Учпедгиз, 1957, 68 стр., илл., 85 коп.

Вариант изложения темы «Функции и их исследование. Производная» в 10-м классе средней школы. Предел функции определяется «на языке ε и δ». Понятие непрерывности явно не рассматривается. А. Я. Маргулис

2658 К. Гиперболические функции. 2-е изд. Шервatов В. Г. М., Физматгиз, 1958, 56 стр., илл., 80 коп.

В первой главе излагается понятие гиперболического поворота и его применения к изучению свойств гиперболы. Во второй главе элементы синтетической теории гиперболических функций (исходя из определения этих функций как координат точки равносторонней гиперболы) излагаются параллельно с изложением соответствующих положений из теории круговых тригонометрических функций. В третьей главе устанавливается связь теории гиперболических функций с теорией логарифмов. Тут изложение может быть упрощено: функция e^a для комплексного a может быть определена формулой Эйлера или задана рядом. В этом случае § 3 гл. III не нужен. А. Я. Маргулис

2659 К. Эквивалентность уравнений, их решение и исследование. Онищенко М. Н., Горький, Книгоиздат, 1959, 122 стр., 2 р. 65 к.

Методическое пособие, предназначенное для преподавателей математики средних школ и для студентов физико-математических факультетов педагогических институтов.

2660 К. Курс высшей математики. (Для механ.-матем. и физ.-матем. фак. ун-тов). Т. 3. Ч. 2. 7 изд. Смирнов В. И. М., Физматгиз, 1958, 674 стр., илл., 15 р. 10 к.

2661 К. Сборник задач по высшей математике. Гюнтер, Кузьмин (Zbiór zadań z matematyki wyzszej. T. 2. Giunter N. M., Kuźmin R. O. Tłum. z ros. Warszawa, PWN, 1959, 300 s., 17 zł.), Przew. bibliogr., 1959, **15**, № 25, 345—346 (польск.)

Перевод с русского.

2662 К. Введение в высшую математику. Жак (Úvod do vyšší matematiky. Žák Josef. Praha, SPN, 1957, 130 s.) (чешск.)

2663 К. Математика для экономистов. I. Вранич (Matematika za ekonomiste. I. svezak. 2 izd. Vranić Vladimir. Zagreb, «Skolska knjiga», 1957, VIII, 308 s., il.), Bibliogr. Jugosl., 1958, **9**, № 5, 225 (сербохорв.)

2664 К. Геометрия для учительских институтов, снабженная исторической заметкой, критическими, поучительными и другими 1500 проблемами, решенными или предложенными. Катени, Фортини (La geometria per l'istituto magistrale, corredata da note storiche, critiche e didattiche e di oltre 1500 problemi risolti o proposti. Cateni Lodovico, Fortini Roberto. Firenze, F. Le Monnier, 1958, XVI, 608 p., ill., 1800 L.), Bibliogr. naz. ital., 1958, **1**, № 3, 106 (итал.)

2665 К. Краткий курс высшей математики. Георгиев (Кратък курс по висша математика. 3. прераб. и доп. изд. Георгиев Г. Ив. София, Техника, 1958 (1959), 704 с., ил., 19.90 лв), Бълг. книгопис, 1959, 63, № 3, 9 (болг.)

См. также: 2697, 3295, 3298К, 3316, 3326К, 3330, 3231К, 3333К, 3335К, 3345К, 3346К, 3359К, 3432, 3571.

ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Редакторы *П. С. Новиков, С. И. Адян*

2666. Программа Гильберта. Крейсел (Hilbert's programme. Kreisel Georg), Dialectica, 1958, 12, № 3-4, 346—372 (англ.; рез. нем.)

Обсуждаются вопросы, возникшие в математической логике в связи с программой Гильберта, которая имела своей целью достигнуть понимания бесконечного путем исключения трансфинитных элементов из доказательства финитных утверждений. Последующее развитие математической логики, в результате которого была установлена невозможность проведения этой программы в первоначально задуманном виде, вызвало появление того, что автор называет «модифицированной программой Гильберта». Здесь уже привлекаются не только финитные методы рассуждений (на которых настаивал Гильберт), но также целый ряд не финитных, но в определенном смысле «конструктивных» методов, имеющих большую или меньшую степень элементарности. Автор рассматривает в этом плане некоторые исследования, относящиеся к доказательствам непротиворечивости, проблеме разрешимости и интерпретации аксиоматических систем. Делаются замечания и об интуиционистских методах. Приводится некоторая характеристика финитных доказательств. Автор также ставит в общей форме несколько проблем. Ю. Т. Медведев

2667. Некоторые теоремы о классах рекурсивно-перечислимых множеств. Деккер, Майхилл (Some theorems on classes of recursively enumerable sets. Dekker J. C. E., Myhill J.), Trans. Amer. Math. Soc., 1958, 89, № 1, 25—59 (англ.)

Классы рекурсивно-перечислимых множеств (р. п. м.) исследуются при помощи эффективной нумерации этих множеств. Выявляются соотношения между различными типами перечислимых множеств. Целый ряд свойств и определений, касающихся множеств натуральных чисел, переносится на классы перечислимых множеств. Наряду с некоторыми новыми результатами, в статье приводятся многие известные результаты (в терминологии, принятой авторами).

Введены обозначения:

F — класс всех р. п. м., E — класс всех рекурсивных множеств (р. м.), Q — класс всех конечных множеств, P — класс дополнений к конечным множествам.

Класс A называется рекурсивно-перечислимым (р. п.), если он пустой ($A = O$) или $A = \{\omega_x | x \in \alpha\}$, где x — геделев номер р. п. м. ω_x, α — р. п. м.

$$\theta(\alpha) = \{n \mid \omega_n = \alpha\}, \qquad \theta A = \{n \mid \omega_n \in A\}.$$

Класс A называется вполне р. п., если θA — р. п. м., и разрешимым, если θA — рекурсивное множество.

Как доказал Райс, разрешимыми являются лишь тривиальные классы р. п. м. F и O. В дальнейшем авторы усиливают этот результат, рассматривая степени неразрешимости классов.

Пусть $\Phi(n, x)$ и $\Psi(n, x, y)$ — рекурсивные предикаты. Определяются классы $\exists$, $\forall$ и др.:

$\alpha \in \exists$,	если	$\alpha = \{n \mid \exists x \Phi(n, x)\}$,
$\alpha \in \forall$,	если	$\alpha = \{n \mid \forall x \Phi(n, x)\}$,
$\alpha \in \exists\forall$,	если	$\alpha = \{n \mid \exists x \forall y \Psi(n, x, y)\}$,
$\alpha \in \forall\exists$,	если	$\alpha = \{n \mid \forall x \exists y \Psi(n, x, y)\}$.

A' — класс дополнений к множествам из класса A.

Пусть α — конечное множество. Тогда $T(\alpha) = \{\sigma \mid \alpha \subseteq \sigma \in F\}$. A называется $\sum T$-классом, если $A = O$ или $A = \sum_0^\infty T(\alpha_n)$, где $\{\alpha_n\}$ — последовательность конечных множеств.

Р. п. последовательность конечных множеств $\{\alpha_n\}$ называется рядом, если мощность α_n есть рекурсивная функция от n.

Теорема. Если $\{\alpha_n\}$ — ряд, то $\sum_0^\infty T(\alpha_n)$ — вполне р. п. класс.

Класс S называется наследственным, если $(\theta S \supseteq \tau) \to \tau \in S$.

Рассматриваются 4 категории классов: а) $\sum T$—классы, конечные множества которых образуют ряд; б) $\sum T$ — классы, конечные множества которых не образуют ряда; в) ненаследственные классы; г) классы, каждый из которых содержит по крайней мере одно бесконечное множество и не содержит хотя бы одного из его конечных подмножеств.

Доказывается, что для всякого не $\sum T$ — класса A множество θA продуктивно.

Отсюда следует, что для всякого нетривиального класса A либо θA, либо $\theta(F \setminus A)$ является продуктивным множеством и $\Delta_1 \leqslant \mathrm{Deg}\,\theta A$ (Δ_1 — полная степень неразрешимости O', а $\mathrm{Deg}\,\theta A$ — степень неразрешимости θA (РЖМат, 1956, 1910)).

Далее, $\theta(F \setminus Q)$ оказывается $\forall\exists$-множеством, к которому 1-1 сводимо каждое $\forall\exists$-множество и $\mathrm{Deg}\,\theta Q = \mathrm{Deg}\,\theta(F \setminus Q) = \Delta_2$ ($= o''$ в обозначениях Клини — Поста). Рассматривается отделимость классов (аналогичная отделимости множества). При топологическом рассмотрении открытым множествам ставятся в соответствие $\sum T$-классы.

В конце статьи дается определение продуктивного класса: класс A называется продуктивным, если он удовлетворяет условиям: 1) A не р. п. и 2) для всякого р. п. класса $B \subseteq A$ можно эффективно указать р. п. м. α (его номер), $\alpha \in A \setminus B$. Доказывается продуктивность классов $F \setminus E$, $F \setminus Q$, $E \setminus Q$ и H — класса всех креативных множеств. А. А. Мучник

2668. Проблема вхождения для свободных произведений групп. Михайлова К. А., Докл. АН СССР, 1959, 127, № 4, 746—748

В работе автора (РЖМат, 1959, 79) был исследован вопрос о разрешимости сильной (слабой) проблемы вхождения для прямого произведения двух групп с разрешимой сильной (слабой) проблемой вхождения (относительно терминологии см. там же). В реферируемой заметке аналогичный вопрос исследуется для свободных произведений групп. Приводится схема доказательства следующей теоремы: в свободном произведении двух групп, в каждой из которых разрешима сильная (слабая) проблема вхождения, разрешима сильная (слабая) проблема вхождения. С. И. Адян

2669. Обращение функций, определенных машинами Тьюринга. Мак-Карти (The inversion of functions defined by Turing machines. McCarthy John), Ann. Math. Studies, 1956, № 34, 177—181 (англ.)

Неформальное обсуждение вопроса о построении машины, решающей „хорошо поставленные" интеллектуальные проблемы. Автор отождествляет этот вопрос с вопросом об обращении частично-рекурсивной функции $f_m(n)$ в такую функцию $g(m, r)$, что $f_m(g(m, r)) = r$. S. Gorn

Перевод из Math. Revs, 1957, 18, № 2, 103.

2670. Универсальная машина Тьюринга с двумя внутренними состояниями. Шеннон (A universal Turing machine with two internal states. Shannon Clau-

de E.), Ann. Math. Studies, 1956, № 34, 157—165 (англ.)

Автор показывает, что всякая машина Тьюринга с алфавитом из m букв и n состояниями «существенно эквивалентна» машине с $4mn+m$ буквами и двумя состояниями. Таким образом, может быть построена универсальная машина Тьюринга всего с двумя состояниями.

Он показывает также, что машина с одним состоянием не может вычислять последовательные цифры иррационального числа. Таким образом, универсальная машина должна иметь более одного состояния.

Наконец, он показывает, что каждая машина с n состояниями и алфавитом из m букв эквивалентна машине с алфавитом из двух букв и $(2^l-1)n$ состояниями, где $l=1+[\log_2 m]$. S. Gorn

Перевод из Math. Revs, 1957, **18**, № 2, 103

2671. Некоторые вопросы классификации предикатов и функций. Кузнецов А. В., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. Т. **4**. М., АН СССР, 1959, 86—87

2672. А. А. Мучник — Р. Фридберг. Проблема сводимости перечислимых множеств. Мучник А. А., Матем. просвещение, 1959, Вып. 4, 233—236

2673. Об одном упрощении нормальных алгорифмов. Чернявский В. С., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. Т. **4**. М., АН СССР, 1959, 91

См. РЖМат, 1959, 10733.

2674. Узкоалгорифмические операторы. Орловский Э. С., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. Т. **4**. М., АН СССР, 1959, 87

2675. Теоремы неполноты в системах с бесконечной индукцией. Фалевич Б. Я., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. Т. **4**. М., АН СССР, 1959, 89—90

См. РЖМат, 1959, 7659.

2676. О несуществовании модели классического анализа в конструктивном анализе В. Аккермана. Фалевич Б. Я., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. Т. **4**, М., АН СССР, 1959, 90

См. РЖМат, 1959, 7659.

2677. Ординальные диаграммы. Такэути (Ordinal diagrams. Takeuti Gaisi), J. Math. Soc. Japan, 1957, **9**, № 4, 386—394 (англ.)

Излагается способ конструктивного построения некоторой части второго числового класса, несколько родственный способу Аккермана (Ackermann W., Math. Z., 1951, **53**, 403—413). Автор высказывает предположение, что его система конструктивных трансфинитов содержит систему Аккермана. А. В. Гладкий

2678. Семантические матрицы. Мередит (Semantic matrices. Meredith G. Patrick), Preprints papers Internat. Conf. Scient. Informat. (Washington, D. C., 1958). Washington, D. C. Nat. Acad. Sci.—Nat. Res. Council, 1958, V/171—V/200 (англ.)

В развитие идей, изложенных в книге «Principia mathematica» Уайтхеда и Рассела, вводится понятие семантической матрицы (с. м.). С. м. — это (пространственно) упорядоченная система элементов (конструктивных объектов), каждый из которых имеет (или, по крайней мере, ему может быть однозначно приписан) определенный содержательный смысл. С. м. характеризуется своей структурой и свойствами элементов. В работе вводится ряд характеристик с. м., облегчающих их формальный анализ, что, по мысли автора, в свою очередь облегчает семантический анализ порождающих матрицу содержательных понятий, высказываний и т. д. Ю. А. Гастев

2679. Теория определённого артикля. Шрётер (Theorie des bestimmten Artikels. Schröter Karl), Z. math. Logik und Grundl. Math., 1956, **2**, № 1, 37—56 (нем.)

Строится систематическая теория определенного артикля, т. е. выражения $\iota x H(x)$, интерпретируемого как «единственное x, обладающее свойством H». Рассматриваются два способа введения определенного артикля. При первом способе термы вида $\iota x H(x)$ вводятся в узком исчислении предикатов с равенством при помощи определений:

$$A_k^1 T_1 \ldots T_{l-1} \iota x H(x) = \underset{\text{Def}}{}$$

$$= \exists! a H(a) \,\&\, \exists a (A_k^1 T_1 \ldots T_{l-1} a \,\&\, H(a)) \underset{\text{Def}}{}$$

. . . . . .

$$A_k^i \iota x H(x) T_1 \ldots T_{l-1} = \underset{\text{Def}}{}$$

$$= \exists! a H(a) \,\&\, \exists a (A_k^i a T_1 \ldots T_{l-1} \,\&\, H(a)) \underset{\text{Def}}{}$$

$$T = \iota x H(x) = \exists! a H(a) \,\&\, \exists a (T = a \,\&\, H(a)) \underset{\text{Def}}{}$$

$$\iota x H(x) = T = \exists! a H(a) \,\&\, \exists a (a = T \,\&\, H(a)). \underset{\text{Def}}{}$$

(Здесь A_k^i — i-местная предикатная переменная, T, $T_1, \ldots, T_{l-1}$ — термы, $\exists! a H(a)$ означает „существует единственное a такое, что $H(a)$). При втором способе термы вида $\iota x H(x)$ вводятся аксиоматически. Доказывается эквивалентность этих двух способов. В конце работы указанные два способа сравниваются со способом, принятым в „Grundlagen der Mathematik" Гильберта и Бернайса; этот способ не эквивалентен первым двум. Автор указывает, что его метод позволяет значительно упростить связанные с понятием определенного артикля рассуждения; в частности, очень сильно упрощается доказательство теоремы об элиминируемости определенного артикля. А. В. Гладкий

2680. Теория логического заключения. I, II. Шрётер (Theorie des logischen Schliessens. I., II. Schröter Karl), Z. Math. Logik und Grundl. Math., 1955, **1**, № 1, 37—86; 1958, **4**, № 1, 10—65 (нем.)

Работа посвящена систематическому изучению синтаксической (формальной) выводимости (Ableitbarkeit) и семантического (содержательного) следования (Folgerung), причем основной целью является исследование взаимоотношения между выводимостью и следованием.

В § 1 рассматриваются различные типы выводимости и следования в исчислении высказываний.

В п. 1 обычным способом определяется понятие „из множества формул X выводима (в исчислении высказываний) формула H" ($X \mathrm{Abl} H$). Множество формул, выводимых из X, обозначается $\mathrm{Ab}(X)$. Отмечается ряд свойств выводимости, в частности: $X \subseteq \mathrm{Ab}(X)$ (теорема вложения); если $X_1 \subseteq X_2$, то $\mathrm{Ab}(X_1) \subseteq \mathrm{Ab}(X_2)$ (теорема монотонии); $\mathrm{Ab}(\mathrm{Ab}(X)) \subseteq \mathrm{Ab}(X)$ (теорема замкнутости); если $H \in \mathrm{Ab}(X)$, то существует конечное подмножество X^* множества X такое, что $H \in \mathrm{Ab}(X^*)$ (теорема конечности). В п. 2 вводится понятие ограниченной выводимости, т. е. выводимости с запрещением подстановки на места некоторых переменных. Формулировка определения: (1) Если $H \in X$ или $X \in Y$, то H ограниченно выводимо из X на основе Y ($X \mathrm{Abl}_Y H$). (2)(a) Если $X' \subseteq X$, $X' \mathrm{Abl}_Y H'$ и H получается из H' подстановкой вместо всех вхождений некоторой переменной p_l, не встречающейся в X', одной и той же формулы H^*, то $X \mathrm{Abl}_Y H$. (b) Если $X \mathrm{Abl}_Y H'$ и $X \mathrm{Abl}_Y (H' \to H)$, то $X \mathrm{Abl}_Y H$. (3) $X \mathrm{Abl}_Y H$ только тогда, когда это имеет место в силу (1) и (2). В п. п. 3 и 4 рассматриваются различные варианты определений натуральной выводимости (для которой правила вывода имеют форму правил введения и удаления логических символов) и выводимости с помощью секвенций. В п. 5 вводятся два определения следования: (1) Множество формул Y следует из множества формул X в смысле

Больцано (X Folb Y), если каждая модель X есть модель Y; (2) Y следует из X в смысле Генцена (XFolg$Y$), если каждая модель X является моделью хотя бы для одной формулы из Y.

§ 2 посвящен отношениям выводимости и следования в исчислении предикатов первой ступени без равенства и с равенством и в одноместном исчислении предикатов второй ступени. Изложение построено по тому же плану, что и в § 1. В частности, в п. 1 отмечаются свойства выводимости, аналогичные отмеченным в п. 1 § 1; в п. 2 вводится понятие ограниченной выводимости. Понятия следования в смысле Больцано и в смысле Генцена определяются так же, как в § 1, но теперь различаются следование в данной области индивидуумов I, следование в каждой области мощности $\mathfrak{m}$ и следование в каждой непустой области.

В § 3 для ограниченной выводимости, натуральной выводимости и выводимости с помощью секвенций доказываются теоремы, аналогичные свойствам обычной выводимости, перечисленным в п. 1 § 1 и в п. 1. § 2. Для выводимости с помощью секвенций доказывается также теорема, соответствующая основной теореме Генцена. Отмечается, что для следования в смысле Больцано и в смысле Генцена теоремы, аналогичные упомянутым свойствам выводимости, за исключением теоремы конечности, доказываются весьма просто.

§ 4 посвящен доказательству теорем конечности для следования, формулируемых аналогично соответствующей теореме для выводимости, с заменой выводимости на следование в том или в другом смысле. Эти теоремы легко сводятся к следующей теореме: Если Z — множество формул, для каждого конечного подмножества которого существует модель (в данной области I, соответственно в каждой области мощности $\mathfrak{m}$, соответственно в каждой непустой области), то существует и модель всего множества Z (в данной области I, соответственно в каждой области мощности $\mathfrak{m}$, соответственно в каждой непустой области). Последняя теорема доказывается отдельно (1) для исчисления высказываний, (2) для исчисления предикатов первой ступени без равенства, (3) то же с равенством, (4) для одноместного исчисления предикатов второй ступени. Наиболее сложен случай (4); в нем используются теорема о нормальной форме Сколема и теорема Лёвенгейма — Сколема, обобщаемые автором на множества формул. А. В. Гладкий

2681. Теория логических функций выбора. Ассер (Theorie der logischen Auswahlfunktionen. Asser Günter), Z. math. Logik und Grundl. Math., 1957, **3**, № 1, 30—68 (нем.)

Задача работы — построение систематической теории гильбертова ε-символа. Для этой цели строится формальная система, называемая ε-исчислением. Формулы ε-исчисления определяются, как в узком исчислении предикатов с равенством, с добавлением правила: Если $Z_1(a_{i_1}),\ldots,Z_n(a_{i_n})$ — формулы, в каждую из которых соответствующая переменная a_{i_ν} входит вполне свободно (т. е. входит как свободная переменная и не входит как связанная), то всякое выражение вида $A^n_k Z^*_1 \ldots Z^*_n (A^n_k$ — n-местная предикатная переменная) и вида $Z^*_1 = Z^*_2$, где для каждого ν, $1 \leqslant \nu \leqslant n$, Z^*_ν есть либо предикативная переменная, либо $\varepsilon a_{i_\nu} Z_\nu(a_{i_\nu})$, является формулой. Выражение $\varepsilon a_i Z(a_i)$ интерпретируется как „функция выбора", ставящая в соответствие каждому непустому подмножеству M основной области индивидуумов I некоторый элемент M. Различаются функция выбора 1-го рода, ставящая в соответствие пустому множеству некоторый элемент I, и функция выбора 2-го рода, не определенная для пустого множества. Соответственно строятся два варианта ε-исчисления. Оба они содержат аксиомы и правила вывода узкого исчисления предикатов с равенством. Кроме того, ε-исчисление 1-го рода содержит аксиомы: (A1) $\exists a_0 H(a_0) \to H(\varepsilon a_0 H'(a_0))$, где H' получается из H переименованием связанных переменных и a_0 в $H(a_0)$ не находится в области действия никакой переменной свободно входящей в $\varepsilon a_0 H'(a_0)$.

(A2) $\forall a_0 (H_1(a_0) \leftrightarrow H_2(a_0)) \to \varepsilon a_0 H_1(a_0) = \varepsilon a_0 H_2(a_0)$, а также правило подстановки ε-терма на место свободной переменной. В ε-исчислении 2-го рода соответствующие аксиомы несколько сложнее, и правило подстановки ε-терма утверждает, что из выводимости $H(a_i)$ следует при соответствующих условиях выводимость не $H(\varepsilon a_j H_1(a_j))$, как в предыдущем случае, а $\exists a_j H_1(a_j) \to H(\varepsilon a_j H_1(a_j))$.

Далее рассматривается способ введения ε-символа, принятый в „Grundlagen der Mathematik" Гильберта и Бернайса и не эквивалентный ни одному из двух рассмотренных вариантов ε-исчисления („ε-исчисление 3-го рода"). Для этого способа строится интерпретация, значительно более сложная, чем для первых двух вариантов. Для каждого из трех родов ε-исчисления доказываются теорема о совпадении множества формул, выводимых из аксиом, с множеством обозначимых формул, и обе гильбертовские ε-теоремы. Доказательства ε-теорем значительно проще, чем у Гильберта и Бернайса. А. В. Гладкий

2682. О нормальных формах. Идзуми (Sur les formes normales. Izumi Yosihisa), Tohoku Math. J., 1954, ser. 2, **6**, № 1, 26—29 (франц.)

Пусть X — формула узкого исчисления предикатов. Автор обозначает через $R(X)$ некоторую нормальную формулу, выполнимую или невыполнимую одновременно с X, и через $D(X)$ некоторую нормальную формулу, доказуемую или не доказуемую (в узком исчислении предикатов) одновременно с X. Устанавливается, что для любой формулы A: 1) Формула $\neg D(\neg A)$ выполнима тогда и только тогда, когда выполнима формула $R(A)$; 2) Формула $\neg R(\neg A)$ доказуема тогда и только тогда, когда доказуема формула $D(A)$.

Эти два результата связываются с вопросом о редукции проблемы разрешимости для узкого исчисления предикатов. Смысл утверждений, делаемых автором в этом месте, остался референту непонятным.

Примечание референта. Справедливость приведенных результатов, а также их доказательство (которое следует почти непосредственно из полноты узкого исчисления предикатов) очевидным образом не зависят от предположения о том, что формулы $D(X)$ и $R(X)$ — нормальные. Ю. Т. Медведев

2683. Замечания по поводу теорем приведения в логических исчислениях. Зыков А. А., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. Т. **4**, М., АН СССР, 1959, 85—86

2684. Задача Россера и Тюркетта. Маргарис (A problem of Rosser and Turquette. Margaris Angelo), J. Symbolic Logic, 1958, **23**, № 3, 271—279 (англ.)

Дается положительное решение следующей задачи (Rosser J. B., Turquette A. R., Many-valued logics, Amsterdam, 1952): Для всякой ли тройки $\langle s, t, m\rangle$, где $1 \leqslant s < t < m$, можно построить m-значную логику, которая удовлетворяет следующим условиям: I. Каждое высказывание, которое принимает только значения $\leqslant s$, выводимо; II. Никакое высказывание, принимающее значение $> t$, не выводимо; III. Некоторые из высказываний, которые всегда принимают значения $\leqslant t$ и иногда значения $> s$, выводимы, а некоторые не выводимы.

Россер и Тюркетт показали (Rosser J. B., Turquette A. R., Many-valued logics, Amsterdam, 1952), что для случая, когда $t > s + 1$, эта задача имеет решение среди функционально полных систем. В реферируемой работе сначала показывается, что решениями задачи не могут быть исчисления C_m, удовлетворяющие сле-

дующим трем требованиям: (1) C_m функционально полно, (2) единственным правилом вывода является modus ponens (3) если $\supset$ — функция используемая в modus ponens, то значения $P \supset Q$ не являются выделенными тогда и только тогда, когда значение P — выделенное, а значение Q — не выделенное. Утверждается также, что исчисления C'_m (получающиеся заменой условия (3) на условие: пусть $\supset$ — функция, используемая в modus ponens, тогда значение $P \supset Q$ является выделенным, если значение $P \geqslant$ значения Q) также не могут быть решениями поставленной задачи.

В качестве решения задачи предлагается функционально неполное исчисление высказываний W с примитивными — и $\supset$, заданными следующим образом:

$$-p = \begin{cases} (s+1), & \text{если } 1 \leqslant p \leqslant s, \\ \min(p+1, t), & \text{если } s < p \leqslant t, \\ \min(p+1, m), & \text{если } t < p \leqslant m, \end{cases}$$

$$p \supset q = \begin{cases} 1, & \text{если } p \geqslant q; \\ q, & \text{если } p < q \text{ и } p \text{ и } q \text{ принадлежат разным классам } \{1,\ldots,s\}, \\ & \{s+1,\ldots,t\}, \{t+1,\ldots,m\}; \\ \min(q-p+1, s), & \text{если } p < q \text{ и } p \text{ и } q \text{ принадлежат одному классу.} \end{cases}$$

Формализацией этого исчисления является система аксиом

A1. $(((P \supset Q) \supset R) \supset (R \supset P)) \supset (S \supset P)$.

A2. $-P \supset P$.

A3. $P \supset (-Q \supset -P)$

и правило modus ponens.

В работе доказывается, что исчисление W дает решение более сильной задачи, получающейся из задачи Россера и Тюркетта заменой условия III на условие III′: для каждого значения истинности k такого, что $s < k \leqslant t$, существуют утверждения P и Q, которые по крайней мере однажды принимают значение k и никогда не принимают значения $> k$ и такие, что P выводимо, а Q — не выводимо. Ю. И. Янов

2685. О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса. Янов Ю. И., Мучник А. А., Докл. АН СССР, 1959, 127, № 1, 44—46

Построен пример трехзначного замкнутого класса, не имеющего базиса, и два примера трехзначных замкнутых классов с бесконечным базисом (относительно терминологии см. РЖМат, 1959, 9704). Посредством этих примеров установлены следующие факты:

Теорема 1. Для всякого $k \geqslant 3$ существует k-значный замкнутый класс, не имеющий базиса.

Следствие. Для всякого $k \geqslant 3$ существуют k-значные замкнутые классы, являющиеся пределами монотонно возрастающих последовательностей замкнутых классов.

Теорема 2. Для всякого $k \geqslant 3$ существует k-значный замкнутый класс с бесконечным базисом.

Теорема 3. Для всякого $k \geqslant 3$ в P_k содержится континуум замкнутых классов.

Постом (Post E. L., Amer. J. Math., 1921, **43**, 163—185; Ann Math. Studies, 5, Princeton Univ. Press, 1941) были описаны все замкнутые классы P_2 и показано, что всякий замкнутый класс имеет конечный базис и что P_2 содержит счетное число замкнутых классов. Для $k \geqslant 3$ эти вопросы оставались открытыми. Постом было также отмечено, что любую задачу из $P_k (k \geqslant 3)$ можно свести к решению задачи в P_2, и тем самым ставилась под сомнение необходимость специального изучения k-значной логики. Как показано авторами реферируемой работы, P_k принципиально отличается от P_2. Полученные результаты интересны также с той точки зрения, что задача алгебраической аксиоматизации замкнутых классов имеет смысл только для классов с конечным базисом. Н. А. Карпова

2686. Исключение кванторов в теории логических схем. Элгот, Райт (Quantifier elimination in a problem of logical design. Elgot Calvin C., Wright Jesse B.), Michigan Math. J., 1959, **6**, № 1, 65—69 (англ.)

Рассматривается задача описания поведения вычислительных устройств (схем) переменного (во времени) режима при помощи предикатных функций. Будем говорить, что выход p схемы реализует формулу $F(I_1,\ldots,I_n, t)$, где I_i — одноместные предикатные переменные, t — индивидуальная переменная („время"), если для произвольного набора пропозициональных функций $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ и некоторого момента времени t_0 из того, что для всех i $(i=1,\ldots,n)$ и x $\varphi_i(x)$ истинна тогда и только тогда, когда выход φ_i срабатывает в момент x, следует, что $F(\varphi_1,\ldots,\varphi_n, t_0)$ истинна тогда и только тогда, когда p срабатывает в момент t_0. Будем в таком случае говорить также, что формула F описывает поведение выхода схемы (или, проще, самой схемы). Назовем формулу, содержащую в точности одну свободную индивидуальную переменную, сингулярной формулой; сингулярную формулу, не содержащую предикатных переменных — беспредикатной сингулярной формулой.

Теорема 1. Для каждой беспредикатной сингулярной формулы $F(t)$, если M есть множество натуральных чисел t, для которых $F(t)$ истинна, то M либо конечно, либо дополнение до конечного множества; обратно, если либо M, либо дополнение M до натурального ряда конечно, то существует беспредикатная сингулярная формула $F(t)$ такая, что t входит в M тогда и только тогда, когда $F(t)$ истинна.

Доказательство теоремы проводится при помощи приведения формулы к пренексной нормальной форме и последовательного исключения кванторов. Теперь легко доказывается.

Теорема 2. Класс сингулярных формул недостаточен для описания поведения произвольного считающего устройства.

Автор приводит простой пример вычислительного устройства, не описываемого никакой беспредикатной сингулярной формулой (а следовательно, и никакой сингулярной формулой). Таким устройством оказывается определитель четности (выход которого срабатывает в четные моменты времени) — множество четных чисел бесконечно вместе со своим дополнением.

Ю. А. Гастев

2687. Современная логика и ее физические применения. Ружье (La logique moderne etses applications physiques. Rougier Louis), Trav. et méthodes, 1959, № 131, 17—20 (франц.)

Статья содержит несколько замечаний об эволюции формальной логики со времен Аристотеля, а также упоминание о некоторых современных работах по формализации физических теорий. Ю. Т. Медведев

2688. Символическая логика и вычислительные машины. Беркли (Symbolic logic and automatic computers. Part 3. Berkeley Edmund C.), Computers and Automat., 1959, **8**, № 1, 18—20, 22—23 (англ.)

Автор вводит связи „и", „или", „если...то", „тогда и только тогда", „нет", операторы общности, существования, „класс..." и понятие относительного произведения, предлагая применить их к анализу и программированию для вычислительных машин. Он приводит примеры применения символического языка, показывая успешность его применения для полного, четкого и краткого описания. В работе построена таблица основных математических понятий, связей и отношений, записанных на языке символической логики. В заключение высказывается пожелание более широкого применения логических идей к анализу и программированию, чтобы логика

вышла из области чистых и неприкладных математических дисциплин. Н. А. Карпова

2689. Из неопубликованных набросков. Борель (Extraits d'un projet d'ouvrage. Borel E.), Ann. Inst. Henri Poincaré, 1958, **16**, № 1, 1—5 (франц.)

Посмертная публикация заметок Э. Бореля о логической природе вероятностных принципов квантовой механики. Ю. А. Гастев

2690. О материальной и формальной импликациях. Кольман Э. Я., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. 4. М., АН СССР, 1959, 86

2691. О математической логике. Ерофеев А. А., Уч. зап. Моск. гос. заочн. пед. ин-та. Сер. физ.-матем., 1958, вып. 3, 58—71

Приводится известный (Гильберт Д., Аккерман В., Основы теоретической логики, гл. 2, М., Изд-во ин. лит., 1947) вывод умозаключений аристотелевской логики средствами математической логики. Этот вывод автор пробует применить к доказательству утверждения о том, что математическая логика не есть математическая дисциплина, а является частью „логики вообще" (несколько видоизменяя, таким образом, логицистический тезис о выводимости математики из логики — *Реф.*). Рассуждение это оперирует, как и вся статья, с недостаточно четко определенными понятиями и содержит порочный круг. Значительное внимание уделяется вопросам истории. Ю. А. Гастев

2692 К. Учебник логистики. Дюрр (Lehrbuch der Logistik. Dürr K. Basel-Stuttgart, Birkhäuser, 1954, VIII, 181 S., 22.90 Sfr.) (нем.)

См. также: 2824, 3622

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

Редактор *Ю. В. Линник*

2693. О количестве представлений больших чисел формами «общего вида» с большим числом переменных. I, II. Тартаковский В. А., Вестн. Ленингр. ун-та, 1958, № 7, 131—154; 1959, № 7, 5—17 (рез. англ.)

Пусть

$$F(x) = F(x_1, \ldots, x_s) = \sum_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{s} a_{i_1 \ldots i_k} x_{i_1} \ldots x_{i_k}$$

форма k-той степени от s аргументов $x_1, \ldots, x_s$. Коэффициенты $a_{i_1 \ldots i_k}$ суть целые числа; считаем, что $a_{j_1 \ldots j_k} = a_{i_1 \ldots i_k}$, если $(j_1, \ldots, j_k)$ есть перестановка индексов $(i_1, \ldots, i_k)$. Рассмотрим переменные $(h_1^{(1)}, \ldots, h_s^{(1)}; h_1^{(2)}, \ldots; h_1^{(k-2)}, \ldots, h_s^{(k-2)}) = (h')$ и составим квадратную матрицу $\Delta_F = \Delta_F(h')$ s-го порядка, (i, j)-тый элемент которой определяется равенством

$$[\Delta_F]_i^j = \sum_{t_1, \ldots, t_{k-2}=1}^{s} a_{it_1 \ldots t_{k-2}j} h_{t_1}^{(1)} \ldots h_{t_{k-2}}^{(k-2)} \quad (i, j = 1, \ldots, s).$$

Обозначим через $\Delta_{l_1 \ldots l_\mu}^{m_1 \ldots m_\mu}$ минор μ-го порядка матрицы Δ_F, составленный из строк с номерами $l_1, \ldots, l_\mu$ и столбцов с номерами $m_1, \ldots, m_\mu$. Для каждого $\nu = 0, 1, \ldots, s-1$ в пространстве переменных (h') система уравнений

$$\Delta_{l_1 \ldots l_{\nu+1}}^{m_1 \ldots m_{\nu+1}} = 0 \quad (m_1, \ldots, m_{\nu+1}; l_1, \ldots, l_{\nu+1} = 1, \ldots, s)$$

определяет алгебраическое многообразие $\Gamma_\nu = \Gamma_\nu(F)$; все пространство (h') обозначаем через Γ_s. Число измерений множества $\Gamma_\nu(F)$ обозначаем через $d_\nu = d_\nu(F)$ $(\nu = 0, 1, \ldots, s)$. Форму F называем „формой общего вида", если ее дискриминант D_F не равен нулю и если имеют место неравенства $d_\nu \leqslant s(k-3) + \nu$ $(\nu = 0, 1, \ldots, s)$. Формулирована (часть I) и доказана (части I и II) теорема A.

Пусть $F = F(x) = F(x_1, \ldots, x_s)$ — форма „общего вида" степени k с целыми коэффициентами. Пусть $F(x_1, \ldots, x_s) > 0$, если $x_1 \geqslant 0, \ldots, x_s \geqslant 0$ и $(x_1, \ldots, x_s) \neq (0, \ldots, 0)$. Пусть n — большое целое число. Обозначим через $r(n; F)$ количество решений $(x_1, \ldots, x_s)$ уравнения $F(x_1, \ldots, x_s) = n$ с условием $x_1 \geqslant 0, \ldots, x_s \geqslant 0$.

Тогда при $s \geqslant (3/4)[4(k+1)]^{k+1}$ $r(n; F) = v(n)\gamma(n; F) + O(n^{s/k-1-1/13k})$, где $v(n)$ — объем тела $\{n - 1/2 \leqslant F(x_1, \ldots, x_s) \leqslant n + 1/2, x_1 \geqslant 0, \ldots, x_s \geqslant 0\}$, а $\gamma(n; F)$ — особый ряд Харди-Литлвуда:

$$\gamma(n; F) = \sum_{q=1}^{\infty} q^{-s} \sum_{1 \leqslant l \leqslant q}^{(l,q)=1} \sum_{x_1, \ldots, x_s = 0}^{q-1} \exp\left\{2\pi i \frac{l}{q}[F(x_1, \ldots, x_s) - n]\right\}.$$

(Автор, конечно хотел обозначить особый ряд через $\mathfrak{S}$ — см. следующий реферат, — но „Вестник ЛГУ" не употребляет готического шрифта). А. В. Малышев

2694. О представимости больших чисел формами «общего вида» с большим числом переменных. Тартаковский В. А., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, № 1, 161—173

Исследован особый ряд $\gamma(n; F)$ (здесь он обозначается через $\mathfrak{S}(n, F)$, фигурирующей в теореме A автора (см. реф. 2693). Получена теорема B: в условиях теоремы A найдется такое натуральное число Φ_F, что если число n взаимно просто с Φ_F и представимо формой $F(x_1, \ldots, x_s)$, по модулю Φ_F, то $\gamma(n; F) > b$, где $b > 0$ не зависит от a. Поэтому такое достаточно большое число n представимо формулой $F(x_1, \ldots, x_s)$ при $x_1 \geqslant 0, \ldots, x_s \geqslant 0$. Д. В. Малышев

2695. Об одной задаче равномерного распределения системы функций. Полосуев А. М., Докл. АН СССР, 1958, 122, № 3, 346—348

Сформулирована теорема, обобщающая один результат Н. М. Коробова (см. РЖМат, 1954, 3604) по многомерным задачам распределения систем функций: Пусть $f_1(x), \ldots, f_s(x)$ — целочисленные многочлены, неравные тождественно нулю. Тогда система функций $\alpha_1 \lambda_1^x f_1(x), \ldots, \alpha_s \lambda_s^x f_s(x)$ равномерно распределена в s-мерном пространстве, где $\lambda_\nu > 1$ $(\nu = 1, \ldots, s)$ — целые числа или числа Пизо, а α_ν — постоянные, способ построения которых изложен в статье.

Кроме того, указано обобщение леммы Н. М. Коробова, лежащей в основе доказательства теоремы.

Б. В. Степанов

2696. Проблема Пруе-Тарри. Палама (Problema di Prouhet—Tarry. Palamà Giuseppe), Giorn. mat. Battaglini, 1958, **86**, № 2, 187—208 (итал.)

Продолжение работы автора (РЖМат, 1957, 7615), 2-я часть. Проблема Пруе-Тарри заключается в отыскании целых нетривиальных решений системы уравнений (если $m>2$): $x_{1,1}^k+\ldots+x_{1,p}^k=x_{2,1}^k+\ldots+x_{2,p}^k=\ldots=x_{m,1}^k+\ldots+x_{m,p}^k$ при $k=1,2,\ldots,n$. Если $p=n+1$, то система называется идеальной. Доказывается, что идеальные системы при $n=2,3,5$ и любом m имеют целочисленные нетривиальные решения. Дано 5 теорем для получения таких решений и приложения для простых чисел и полиномов. В. А. Голубев

2697. Решение еще в 1851 г. Пруе проблемы Тарри—Эскотта, поставленной ими в 1910 г. Райт (Prouhet's 1851 solution of the Tarry—Escott problem of 1910. Wright E. M.), Amer. Math. Monthly, 1959, **66**, № 3, 199—201 (англ.)

2698. О распределении целых чисел, представимых суммой двух квадратов. Ру (Sulla distributione degli interi rappresentabili come somma di due quadrati. Roux Delfina.), Ist. Lombardo Sci. Lett. Rend. Cl. sci. mat. nat., 1956, **21**, № 3, 137—140 (итал.)

Пусть $A(\xi)$ обозначает число целых чисел, представимых в виде суммы двух квадратов и не превосходящих ξ. Производя простое применение метода решета Вигго Бруна, автор получает верхнюю границу $A(\xi)<k\xi/(\log\xi)^{1/2}$ для $\xi>\xi_1$. A. L. Whiteman

Перевод из „Math. Revs, 1957, **18**, № 1, 18".

2699. О гипотезе относительно простых чисел. Килгров, Ролстон (On a conjecture concerning the primes. Killgrove R. B., Ralston K. E.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1959, **13**, № 66, 121—122 (англ.)

Дана последовательность $\{P_{0j}\}$, $j=0,1,2,\ldots$, где P_{0j} является j-м простым числом; $P_{00}=2$, $P_{01}=3$. Определим абсолютные величины разностей последовательности $\{P_{0j}\}$ по рекуррентной формуле $P_{ij}=|P_{i-1,j+1}-P_{i-1,j}|$. При помощи электронной счетной машины СВАК проверена Д. Х. Лемером гипотеза о том, что разности $P_{i0}=1$ для всех $i>0$. Проверка произведена для всех простых чисел, меньших 792722. В. А. Голубев

2700. Заметки по теории чисел. I. О произведении простых чисел, не превосходящих n. Мозер (Notes on number theory. I. On the product of the primes not exceeding n. Moser Leo), Canad. Math. Bull., 1959, **2**, № 2, 119—121 (англ.)

Пусть $c=\sqrt[5]{2^4 3^3}$ ($c<3,37$). Так как

$$A_m=(6m+1)!/m!\,(2m)!\,(3m)!$$

с одной стороны, целое число, не делящееся на простые с условием $m<p\leqslant 6m+1$ а, с другой стороны

$$A_m=(2^4 3^3)^m\prod_{k=1}^{m}(1-1/2^2 3^2 k^2)<c^{5m},$$

то по индукции легко доказывается, что $\prod_{p\leqslant n}p<c^n$. Ставится задача элементарно доказать это неравенство с константой 3 вместо c. М. Б. Барбан

2701. О суммах Дедекинда и подгруппах модулярной группы. Вольфарт (Über Dedekindsche Summen und Untergruppen der Modulgruppe. Wohlfahrt Klaus), Abhandl. Math. Seminar Univ. Hamburg, 1959, **23**, 5—10 (нем.)

Пусть j и h — целые рациональные числа, $(j,h)=1$, $\{j,h\}=6|h|\,S(j,h)$, где $S(j,h)=\sum_{\mu(\mathrm{mod}h)}((\mu/h))((\mu j/h))$, $(h\neq 0)$, $((x))=\begin{cases}0, & \text{если } x \text{ — целое рациональное,}\\ x-[x]-1/2, & \text{в противном случае,}\end{cases}$ тогда справедлива теорема: 1. Если p и q — простые, $p^2\not\equiv 0,1\pmod q$ и h — натуральное число со свойствами: $h\equiv 1\pmod{pq}$ и для каждого целого рационального $k\geqslant 0$ имеет место сравнение $\{p^k,h\}\equiv 0\pmod q$, то $h=1$. Рассматриваются явные выражения системы мультипликаторов $[\Gamma,-r]$ модулярной группы Γ, при вещественном r, через суммы Дедекинда и строятся абелевы характеры, как отношение двух систем мультипликаторов. На основании теоремы 1 доказывается, что ядро построенного таким образом характера при $n=p$, $r=12q^{-1}$, p и q — простые числа, $p^2\not\equiv 0,1\pmod q$, являясь подгруппой модулярной группы, не является конгруэнцподгруппой. (Ядром характера χ называется подгруппа, определенная в $\Gamma_0(n)$ условием $\chi(L)=1$). Б. В. Левин

2702. Поведение функции Клейна $\log\sigma_{g,h}(\omega_1,\omega_2)$ при модулярных преобразованиях и обобщенные суммы Дедекинда. Дитер (Das Verhalten der Kleinschen Funktionen $\log\sigma_{g,h}(\omega_1,\omega_2)$ gegenüber Modultransformationen und verallgemeinerte Dedekindsche Summen. Dieter Ulrich), J. reine und angew. Math., 1959, **201**, № 1—2, 37—70 (нем.)

Пусть $\begin{pmatrix}\omega_1'\\ \omega_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\ c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix}$ и $(g',h')=(g,h)\begin{pmatrix}d&-b\\ -c&a\end{pmatrix}$, a,b,c,d — целые числа, $ad-bc=1$, $\sigma_{g,h}(\omega_1,\omega_2)=$

$$=\frac{\omega_2}{2\pi i}\exp\left\{\pi i\frac{h}{f}\left(\frac{g}{f}-1\right)\right\}\exp\left\{\pi i\tau\frac{g}{f}\left(\frac{g}{f}-1\right)\right\}\times$$

$$\times\frac{\prod_{m=0}^{\infty}(1-\exp A)(1-\exp B)}{\prod_{m=1}^{\infty}(1-e^{2\pi i\tau m})^2},$$

где $A=2\pi i\frac{h}{f}+2\pi i\tau\left(m+\frac{g}{h}\right)$,

$$B=-2\pi i\frac{h}{f}+2\pi i\tau\left(m-\frac{g}{f}\right)$$

$\omega_1/\omega_2=\tau$, $\mathrm{Im}(\tau)>0$, f,g,h — целые числа, $g,h\neq 0,0(\mathrm{mod}f)$, тогда

$$\log\sigma_{g',h'}(\omega_1',\omega_2')=\log\sigma_{g,h}(\omega_1,\omega_2)+\pi i\left(\frac{h'}{g}\left(\frac{g'}{f}-1\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{h}{f}\left(\frac{g}{f}-1\right)-2\left[\frac{g'}{f}\right]_0 P_1\left(\frac{h'}{f}\right)+2\left[\frac{g}{f}\right]_0 P_1\left(\frac{h}{f}\right)\right)+$$

$$+\begin{cases}\pi i\frac{b}{d}\left(P_2\left(\frac{g}{f}\right)-\frac{1}{6}\right)+\log d, & \text{если } c=0,\\ \pi i\left(\frac{d}{c}\left(P_2\left(\frac{g}{f}\right)-\frac{1}{6}\right)+\frac{a}{c}\left(P_2\left(\frac{g'}{f}\right)-\frac{1}{6}\right)-\right. & \\ \left.-2\,\mathrm{sign}\,c\left(s_{g',h'}(a,c)-s(a,c)-\frac{1}{4}\right)\right., & \text{если } c\neq 0.\end{cases}\quad(1)$$

Здесь $[x]_0=\frac{1}{2}([x]-[-x]-1)$, $P_k(x)$ — периодизированный полином Бернулли k-того порядка, $s(a,c)$ — сумма Дедекинда,

$$s_{g',h'}(a,c)=\sum_{\mu\,\mathrm{mod}\,c}\left(\left(\frac{a\mu}{c}+\frac{ag'+ch'}{cf}\right)\right)\left(\left(\frac{\mu}{c}+\frac{g'}{cf}\right)\right)\quad(2)$$

— обобщенная сумма Дедекинда, $((x))=0$ для целых x и $((x))=x-[x]-1/2$ для нецелых x. Дальнейшее по-

священо получению различных свойств $s_{g,h}(a,c)$. Среди них отметим формулу

$$\operatorname{sign} cs_{g,h}(a,c)+\operatorname{sign} as_{h,g}(c,a)=$$
$$=\left(\left(\frac{g}{f}\right)\right)\left(\left(\frac{h}{f}\right)\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{a}{c}P_2\left(\frac{g}{f}\right)+\frac{1}{ac}P_2\left(\frac{ag+ch}{f}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{c}{a}P_2\left(\frac{h}{f}\right)\right)$$

справедливую при $(a,c)=1$ и $g,h\not\equiv 0,0 \pmod f$. Изучение $s_{g,h}(a,c)$ ведется на основании формулы (1) и непосредственно на основании определения (2).

Б. В. Левин

2703. Задача деления лемнискаты (I). Мельников И. Г., Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та им. А. И. Герцена, 1958, **197**, 20—38

Дается систематизированное изложение теории лемнискатной функции Эйзенштейна (Eisenstein G., J. reine und angew. Math., 1846, **30**; 1850, 39).

Б. М. Уразбаев

2704. Задача деления лемнискаты (II). (Об одном свойстве лемнискатного уравнения). Мельников И. Г., Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та им. А. И. Герцена, 1958, **197**, 39—42

На основе биквадратичного закона взаимности гауссовых чисел и теории лемнискатной функции, построенной автором в первой части его работы на аналогичную тему, доказывается следующая теорема, которая была высказана без доказательства Эйзенштейном (Eisenstein G., J. reine und angew. Math., 1850, **39**, 160—179, 224—274, 275—287): всякий корень лемнискатного уравнения рационально выражается через любой другой его корень с дробными коэффициентами, знаменатели которых содержат только степени 2. Б. М. Уразбаев

2705. О распределении некоторых целых чисел. Деланж (Sur la distribution de certains entiers. Delange Hubert), C. r. Acad. sci., 1958, **246**, № 15, 2205—2207 (франц.)

Продолжение работ РЖМат, 1957, 5320, 8404; 1959, 3468.

Пусть E, E_1 — два непересекающихся множества простых чисел, имеющие плотность относительно множества всех простых чисел, $M(E)$ — множество тех натуральных чисел, все простые множители которых принадлежат E, Q — множество свободных от квадратов чисел; $\omega_E(n)$ и $\Omega_E(n)$ — число различных или соответственно всех простых делителей n; $\omega_E(n)=\omega(n)$, $\Omega_E(n)=\Omega(n)$, если E — множество всех простых чисел; $f(n)=\omega_E(n)$ или $\Omega_E(n)$, $g(n)=\omega_{E_1}(n)$ или $\Omega_{E_1}(n)$, $h(n)=\omega(n)$ или $\Omega(n)$.

Приводятся асимптотические формулы для числа натуральных чисел $\leqslant x$ $(x\to\infty)$, удовлетворяющих одному из следующих условий: 1) $f(n)=q$; 2) $\omega_E(n)=q$, $\Omega_E(n)=q+r$; 3) $n\in Q$, $\omega(n)=q$; 4) $n\in M(E)$, $h(n)\equiv r \bmod q$; 5) $n\in M(E)$, $\omega(n)\equiv r \bmod q$, $\Omega(n)\equiv r' \bmod q'$, $(q,q')=1$; 6) $n\in M(E)$, $h(n)=q$; 7) $n\in M(E)$, $\omega(n)=q$, $\Omega(n)=q+r$; 8) $n\in M(E)\setminus Q$, $\omega(n)\equiv r \bmod q$; 9) $n\in M(E)\setminus Q$, $\omega(n)=q$; 10) $f(n)=q$, $g(n)=q'$; 11) $n\in Q$, $f(n)=q$, $g(n)=q'$; 12) $f(n)=q$, $g(n)\equiv r \bmod q'$; 13) $n\in Q$, $f(n)=q$, $g(n)\equiv r' \bmod q'$. Доказательства отсутствуют. И. П. Кубилюс

2706. О целых числах a_n взаимно простых с (fa_n). Рао (On integers a_n relatively prime to $f(a_n)$. Rao K. V. Rajeswara), J. London Math. Soc., 1959, **34**, № 2, 145—152 (англ.)

Обозначения: $f(x)$ — положительная функция с целыми значениями, определенная на $A=\{a_n\}$, строго возрастающей последовательности целых чисел; $Q(f,A,x)$ — число элементов из A таких, что $a_n\leqslant x$ и $(a_n, f(a_n))=1$, $S(A,x)$ — число чисел $a_n\leqslant x$;

$$P(m,r_s)=\frac{\Phi(\lambda_s)}{\lambda_s}\prod_{p\times m}(1-1/p^2),$$

где $\lambda_s=(m,r_s)$, p — простое число, а Φ — эйлерова тэта-функция.

При некоторых более общих, чем у Ламбека и Мозера (РЖМат, 1956, 1008), условиях относительно функции $f(x)$ автор доказывает существование предела и равенство

$$\lim_{x\to\infty}Q(f,A,x)/S(A,x)=\frac{1}{t}\sum_{s=1}^{t}P(m,r_s) \qquad (1)$$

для случаев 1) когда A состоит из почти всех элементов арифметических прогрессий с общей разностью m, т. е. из чисел $mn+r_s$, $0\leqslant r_s<m$, $n=1,2,\ldots$; $s=1,\ldots,t$; 2) когда A состоит из почти всех чисел вида $[\alpha n+r]$, где r — целое, $(m,t)=1$, $1<\alpha=m/t$. Кроме того, для любого $\theta<1$ доказывается существование последовательности A с плотностью θ и функции f, удовлетворяющей условиям упомянутой теоремы Ламбека и Мозера, для которых предел (1) не существует.

Э. И. Вилкас

2707. Замечание к работе о совершенных числах. Вирзинг (Bemerkung zu der Arbeit über vollkommene Zahlen. Wirsing Eduard), Math. Ann., 1959, **137**, № 4, 316—318 (нем.)

Доказывается, что для сумматорной функции $V_\varkappa(x)$ $\varkappa$-совершенных чисел справедлива следующая оценка $V_\varkappa(x)\leqslant\exp(c\log x/\log\log x)$ для $x\geqslant x_0$, где x_0 и c — постоянные, не зависящие от рационального числа $\varkappa$, в то время как в предшествующей работе автора и Хорнфека $V_\varkappa(x)$ оценивалась как $O(x^\varepsilon)$ (см. РЖМат, 1958, 2689). Б. В. Степанов

2708. О числе монотонных подпоследовательностей. Ханани (On the number of monotonic subsequences. Hanani Haim), Bull. Res. Council Israel, 1957, **F7**, № 1, 11—13 (англ.)

Пусть требуется из последовательности действительных чисел, имеющей m членов, выделить монотонную (может быть и не строгую) подпоследовательность с наибольшим возможным числом членов $f(m)$. В 1935 г. Эрдёш и Секереш установили: $m=n^2+1$ — наименьшее число такое, что $f(m)\geqslant n+1$ $(n=1,2,\ldots)$. В статье доказывается: $m=n(n+3)/2$ — наибольшее число такое, что $g(m)\leqslant n$, где $g(n)$ — наименьшее число возможных монотонных (может быть и нестрого) подпоследовательностей, на которые может распасться любая данная последовательность с m членами. На основе последнего результата выполнено новое, более короткое доказательство и первой теоремы. Б. А. Кордемский

2709. Об одном метрическом свойстве S-чисел. Каш (Über eine metrische Eigenschaft der S-Zahlen. Kasch Friedrich), Math. Z., 1958, **70**, № 3, 263—270 (нем.)

Согласно классификации трансцендентных чисел, введенной К. Малером число ξ называется S-числом, если существуют такие положительные числа $\rho, c_1, c_2, c_3, \ldots$, что для каждого целочисленного полинома $F(x)=\sum_i a_i x^i$ степени $n\geqslant 1$ и высоты $h=\max_i(|a_i|)$ имеет место следующее неравенство:

$$|F(\xi)|\geqslant c_n h^{-\rho n}. \qquad (1)$$

Обозначим через $\mathfrak{M}_r(\rho,n)$ множество вещественных S-чисел ξ, удовлетворяющих неравенству (1) при фиксированных ρ и n, и через $\mathfrak{M}_k(\rho,n)$ — соответствующее множество комплексных S-чисел. К. Малером были высказаны следующие предположения:

$$\mu(\mathfrak{M}_r(1+\varepsilon, n)) = 1, \quad (2)$$

$$\mu(\mathfrak{M}_k(1/2+\varepsilon, n)) = 1 \quad (3)$$

для любого $\varepsilon > 0$ и $n = 1, 2, 3, \ldots$, где $\mu(\mathfrak{M})$ — мера множества $\mathfrak{M}$.

В статье приводится новое более простое, чем данное И. П. Кубилюсом (Докл. АН СССР, 1949, 67, № 5, 783—786), доказательство предположения (2) в случае $n = 2$. Доказательство основывается на оценке $\sum 1/\sqrt{|D(F)|} \leqslant \gamma_0 h$, где суммирование ведется по всем целочисленным полиномам второй ступени $F(x)$, имеющим фиксированную высоту h и различные нули, $D(F)$ — дискриминант полинома $F(x)$ и γ_0 — постоянная, независящая от h. Тем же методом доказывается, что $\mu(\mathfrak{M}_k(1/4+\varepsilon, 2)) = 1$ для любого $\varepsilon > 0$, т. е. получен более лучший результат чем в предположении (3) для частного случая. Кроме того, высказано предположение $\mu(\mathfrak{M}_k((n-1)/2n, n)) = 0$, $n = 2, 3, \ldots$

Р. В. Уждавинис

2710. К предположению Малера о S-числах. Кэш, Фолькман (Zur Mahlerschen Vermutung über S-Zahlen. Kasch Friedrich, Volkmann Bodo), Math. Ann., 1958, **136**, № 5, 442—453 (нем.)

Пусть $\mathfrak{P}(n, H)$ обозначает совокупность всех полиномов $P(x)$ с целыми рациональными коэффициентами, степени и высоты которых не превышают n и H. Далее, для любого данного числа ξ положим:

$$w_n(H, \xi) = \min_{\substack{P \in \mathfrak{P}(n, H) \\ P(\xi) \neq 0}} |P(\xi)|, \quad w_n(\xi) = \overline{\lim_{H \to \infty}} \frac{\log \frac{1}{w_n(H, \xi)}}{\log H},$$

$$\vartheta_n(\xi) = \frac{w_n(\xi)}{n}.$$

S-числами называются те, для которых число $\vartheta(\xi) = \sup_{n=1}^{\infty} \vartheta_n(\xi)$ положительно и конечно.

Согласно предположению Малера для почти всех вещественных ξ имеет место $\vartheta_n(\xi) = 1$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, а для почти всех комплексных ξ $\vartheta_n(\xi) = 1/2$ $(n = 1, 2, 3\ldots)$.

Основной результат: а) Для почти всех вещественных ξ $1 \leqslant \vartheta_n(\xi) \leqslant 2 - \frac{2}{n}$ $(n = 3, 4, \ldots)$. б) Для почти всех комплексных ξ $\frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \leqslant \vartheta_n(\xi) \leqslant \frac{3}{2} - \frac{2}{n}$ $(n = 3, 4, \ldots)$.

Кроме того, в статье рассматривается хаусдорфова размерность совокупностей T-чисел и U-чисел.

Р. В. Уждавинис

2711. Рациональные приближения к алгебраическим числам. Давенпорт, Рот (Rational approximations to algebraic numbers. Davenport H., Roth K. F.), Mathematika, 1955, **2**, 160—167 (англ.)

Пусть α — иррациональное алгебраическое число, ζ — вещественное и > 0. Раньше Рот доказал (РЖМат, 1956, 7844) известное предположение Зигеля, что неравенство $|\alpha - h/g| < g^{-2-\zeta}$ имеет только конечное число N решений в соответствующих простых рациональных целых числах h, g с $g > 0$. В статье получены (теорема 1 и следствия) верхняя граница для N, зависящая от ζ, степень α и максимум абсолютных значений коэффициентов определенного уравнения от α. Также получена (теорема 2) верхняя граница для числа решений диофантова уравнения $f(x, y) = g(x, y)$, где f — неприводимая форма с рациональными целыми коэффициентами, g — полином с рациональными коэффициентами и $\deg f - \deg g > 2$. Окончательно, показано (теорема 3), что если p_k/q_k есть k-ое приближение к непрерывной дроби для вещественного алгебраического числа β, то $\log\log q_k < c(\beta)\, k/(\log k)^{1/2}$, где $c(\beta)$ не зависит от k.

Е. R. Kolchin

Перевод из „Math. Revs, 1956, **17**, № 10, 1060—1061".

2712. О методе Морделла в геометрии чисел. Армитидж (On a method of Mordell in the geometry of numbers. Armitage J. V.), Mathematika, 1955, **2**, 132—140 (англ.)

Пусть K — n-мерное звездное тело с функцией расстояния $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и r — целое $1 \leqslant r \leqslant n$, для которого (1) „сопряженный автоморфизм" (линейная трансформация $x_1 \to x_1', \ldots, x_n \to x_n'$, для которой $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(x_1', x_2', \ldots, x_n')$ тоже является автоморфизмом (2). Каждая точка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ может быть переведена, посредством соответствующего выбора автоморфизма, в точку $(\alpha, \alpha, \ldots, \alpha, 0, 0, \ldots, 0)$, где r — число неотрицательных координат. K_{n-1} — пересечение K некоторой гиперплоскостью.

Определяется нижняя граница для критического определителя $\Delta(K)$ через члены $\Delta(K_{n-1})$ и постоянную, зависящую от K. Этот результат применяется для получения двух результатов, принадлежащих Морделлу: один включает область $|x_1 x_2 \ldots x_n| \leqslant 1$ (Матем. сб., Нов. сер., 1943, **12(54)**, 273—276), а другой — n-мерную сферу (J. London Math. Soc., 1944, **19**, 6—12).

Эти методы используются для получения результата, касающегося более специального вида звездных тел. Посредством этого результата находится верхняя граница для постоянной C_3, определенной следующим образом. Если C — постоянная такая, что для любых трех вещественных чисел $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$, не всех рациональных, существует бесконечно много рациональных аппроксимаций p_1/q, p_2/q, p_3/q с $(\Theta_1 - p_1/q)^2 + (\Theta_2 - p_2/q)^2 + (\Theta_3 - p_3/q)^2 < (C/q)^{2/3}$, тогда C_3 — точная нижняя граница всех постоянных C.

D. Derry

Перевод из „Math. Revs, 1956, **17**, №10, 1060".

2713. Критический определитель сферического цилиндра. Вудс (The critical determinant of a spherical cylinder. Woods A. C.), J. London Math. Soc., 1958, **33**, № 3, 357—368 (англ.)

Решетка Λ определителя $d(\Lambda)$ называется K допустимой, если начало есть единственная точка Λ, которая не является внутренней точкой K. Обозначим через $\Delta(K)$ нижнюю границу $d(\Lambda)$ для всех K допустимых решеток. Пусть K есть трехмерная единичная сфера с центром в начале $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leqslant 1$ и $\underline{K}$ — четырехмерный цилиндр $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leqslant 1$, $|x_4| \leqslant 1$. Доказывается, что $\Delta(\underline{K}) = \Delta(K)$.

Кэ Шао

2714. Неопределенные квадратичные формы от многих переменных. Берч Давенпорт (Indefinite quadratic forms in many variables. Birch B. J., Davenport H.), Mathematika, 1958, **5**, № 9, 8—12 (англ.)

Пусть $Q(x_1, \ldots, x_n)$ — неопределенные квадратичные формы от n переменных с вещественными коэффициентами. Говорят, что неособенная форма Q — типа $(r, n-r)$, если Q выражается в виде суммы квадратов n вещественных линейных форм с положительными и отрицательными знаками, где имеется r положительных и n — отрицательных знаков. Доказано, что

$$|Q(x_1, \ldots, x_n)| < \varepsilon$$

всегда разрешимо для каждого $\varepsilon > 0$ в целых не все равных нулю, $x_1, \ldots, x_n$, если

$$1 \leqslant \min(r, n-r) \leqslant 4 \text{ и } n \geqslant 21$$

или

$$\min(r, n-r) > 4 \quad \text{и} \quad n \geqslant 17 + \min(r, n-r).$$

Кэ Ш

2715. Неопределенные квадратичные формы. Райдаут (Indefinite quadratic forms. Ridout D.), Mathematika, 1958, 5, № 10, 122—124 (англ.)

Пусть $Q(x_1, \ldots, x_n)$ — неопределенная квадратичная форма от n переменных с вещественными коэффициентами; пусть при разложении Q на сумму квадратов линейных вещественных форм будем иметь r положительных и $(n-r)$ отрицательных квадратов. В дополнение к результатам Берча и Давенпорта (реф. 2714) доказано, что, если $\min(r, n-r) = 5$, $n \geqslant 21$, то при любом $\varepsilon > 0$ найдутся целые числа $x_1, \ldots, x_n$, не равные одновременно нулю, для которых выполняется неравенство $|Q(x_1, \ldots, x_n)| < \varepsilon$. А. В. Малышев

2716. К теории тернарных квадратичных форм. I. Об арифметике эрмитионов. Малышев А. В., Вестн. Ленингр. ун-та, 1959, № 7, 55—71 (рез. англ.)

Статья полуобзорного характера и представляет собою введение в последующие статьи автора. В ней приводятся некоторые сведения из арифметики эрмитионов (обобщенных кватернионов). Наряду с известными результатами и упрощениями доказательств некоторых известных результатов, содержатся также и новые результаты автора. Среди них следует отметить ряд новых предложений о делимости векторов и об эрмитионах большой нормы. Также обобщается и переносится на эрмитионы теория „поворотов целых векторов", развитая Б. А. Венковым для обычных кватернионов (Венков Б. А., Изв. АН СССР, 1922, 16, 205—246). Г. А. Ломадзе

2717. О расширении теоремы Хейльбронна. Данилич (An extension of a theorem of Heilbronn. Danilic I.), Mathematika, 1958, 5, № 9, 30—37 (англ.)

Пусть $Q(x_1, \ldots, x_n)$ — вещественная квадратичная форма от n переменных $x_1, \ldots, x_n$. Если $N > 1$ и $\varepsilon > 0$, то существуют целые $x_1, \ldots, x_n$, не все равные нулю, удовлетворяющие

$$|x_j| \leqslant N \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

и

$$\|Q(x_1, \ldots, x_n)\| < CN^{-n/(n+1)+\varepsilon},$$

где C зависит только от n и ε, $\|Q\|$ означает разность между Q и ближайшим целым числом, взятым положительным. Кэ Шао

2718. О числе представлений простых чисел суммами квадратов. Петерссон (Über Darstellungsanzahlen von Primzahlen durch Quadratsummen. Petersson Hans), Math. Z., 1959, 71, № 3, 289—307 (нем.).

Рассматриваются и ей предыдущей работы автора (РЖМат, 1957, 3534), в которой изучалось разложение полинома деления круга порядка q на два неприводимых над квадратическим полем $P(\sqrt{\pm q})$, $(\pm q \equiv 1 \pmod 4)$ множителя

$$f(u) = \sum_{m=0}^{q-1} u^m = f_+(u)\, f_-(u) = \sum_{m=0}^{r} \lambda_{m+}(u-1)^m \times$$

$$\times \sum_{m=0}^{r} \lambda_{m-}(u-1)^m,$$

q — простое число > 3, $r = (q-1)/2$. Используя связь между $\lambda_{m\pm}$ и q-тым коэффициентом Фурье $l_k(q)$ ряда Эйзенштейна $E_k(\tau)$ для $k \equiv q \pmod 4$, $k \geqslant 3$, автору чисто арифметическим путем, находит число представлений некоторых простых чисел суммами квадратов. Получено также обобщение теоремы Ананда — Рау (РЖМат, 1959, 5523), относящейся к функции $\Phi_k(\tau)$, которая определяется равенствами $\vartheta^k(\tau) = E_k(\tau) + f_k(\tau)$, $\Phi_k(\tau) = \vartheta^{-k}(\tau) f_k(\tau)$, где $E_k(\tau)$ — ряд Эйзенштейна.

Некоторые результаты работы получены ранее референтом (РЖМат, 1956, 3651; 1958, 3738, 5321). Б. В. Левин

2719. Рекуррентные соотношения для решений уравнения Пелля. Копли (Recurrence relations for solutions of Pell's equation. Copley G. N.), Amer. Math. Monthly, 1959, 66, № 4, 288—290 (англ.)

Получены формулы, выражающие любое решение уравнения Пелля $x^2 - Dy^2 = \pm 1$ только через значение x основного решения.

Примечание референта. Полученные формулы представляют частные случаи формул выведенных референтом в работе „Об уравнении $ax^4 + bx^2y^2 - cy^4 = 1$" (Матем. сб., 1946, 18). В. Д. Подсыпанин

2720. Об особых уравнениях высших степеней и представлениях чисел в виде суммы квадратов в мнимых квадратичных полях. Шмидт (Über spezielle mehrgradige Gleichungen und Quadratsummendarstellungen in imaginär quadratischen Körpern. Schmidt Hermann), Math. Nachr., 1958, 19, № 1—6, 323—330 (нем.)

Рассматривается вопрос о разрешимости системы уравнений

$$A^x + B^x = \Gamma^x + \Delta^x, \qquad (1)$$

в числах заданного поля K, где $x = 1, n$; $n \geqslant 2$ — фиксированное натуральное число. Система (1) путем неособенных линейных преобразований

$$A = \alpha + \beta,\ B = \alpha - \beta,\ \Gamma = \alpha' + \beta',\ \Delta = \alpha' - \beta'$$

может быть преобразована в другую, в которой главную трудность составляет решение одного лишь уравнения. Именно, при $n = 4$ этим уравнением будет

$$6\alpha^2 + \beta^2 + \beta'^2 = 0, \qquad (2)$$

а при $n = 5$

$$2\alpha^2 + \beta^2 + \beta'^2 = 0. \qquad (3)$$

Поскольку уравнения (2), (3) тривиально решаются в действительных числовых полях, интересно было бы узнать, решаются ли эти уравнения или, вообще, уравнение вида

$$\beta^2 + \beta'^2 + L\alpha^2 = 0, \qquad (4)$$

в произвольных мнимых квадратичных полях, где L — целое рациональное число, не делящееся на квадрат.

Пусть $Q \geqslant 1$ — целое рациональное число, свободное от квадрата. Методами элементарной теории чисел доказывается теорема (теорема 1): в поле $P(\sqrt{Q})$ число $-L$ может быть представлено как сумма квадратов тогда только, если разрешимо в целых рациональных числах u, v, r, s уравнение

$$\Lambda(u^2 + v^2) + r^2 - Qs^2 = 0,$$

где $\Lambda = l_1 l_2 \ldots l_\mu$, $l_t \equiv 3$ (4) — простые делители L.

Отсюда получается ряд следствий, в частности (теорема 2): при $L = 2$ уравнение (4) тогда только имеет нетривиальные решения, если Q — сумма квадратов трех целых рациональных чисел.

В заключительном параграфе (§ 3) показывается, как эти же результаты могут быть получены, применяя метод символа норменных вычетов Гильберта — Хассе (Hasse H., J. reine und angew. Math., 1954, 153, 113—130). Б. М. Уразбаев

2721. О целых решениях уравнения $4x^3 = 27y^2 + N$. Тоскано (Sulle soluzioni intere dell'equazione $4x^3 = 27y^2 + N$. Toscano Letterio), Riv. mat. Univ. Parma, 1957, 8, № 4—5, 405—406 (итал.)

Для $N \neq 49$ и удовлетворяющему неравенству $-22 \leqslant N \leqslant 8$) Бомбьери нашел все целые решения уравнения $4x^3 = 27y^2 + N$ (РЖМат, 1959, 6607). Бомбьери получил решение уравнения в виде $x = a^2 + c$; $y = ac$, где a и c — целые параметры. В настоящей работе показывается, что если вместо параметра c взять параметр $v = c - 2a^2$, то $|v| \leqslant 2$. Откуда несколько скорее, чем

у Бомбьери, находятся все целые решения рассматриваемых уравнений. В. Д. Подсыпанин

2722. Доказательство особого случая великой теоремы Ферма. Левандовский (Dowód szczególnego przypadku wielkiego twierdzenia Fermata. Lewandowski Z.), Roczn. Polsk. towarz. mat. Ser. II—Wiadom. mat., 1959, **2**, № 2, 249—252 (польск.)

Доказываются три леммы, из которых вытекает следующее предложение: если $n > 2$, x, y, z — натуральные числа, x или y не превосходит $2n$, то $x^n + y^n \neq z^n$.

В. А. Голубев

2723. Новый взгляд на одну старую проблему. Уинго (A new look at an old problem. Wingo Charles E., Jr), Math. Mag., 1959, **32**, № 5, 275—276, 288 (англ.)

Рассматривается простой метод для получения целочисленных решений (если они существуют) системы уравнений: $x^2 + y = a$, $y^2 + x = b$. Так, при $a = 11$, $b = 7$ имеем: $x = 3$, $y = 2$, при $a = 1052$, $b = 816$ получим: $x = 32$, $y = 28$. В. А. Голубев

2724. Неприводимые сравнения над $GF(p)$. Ханнекен (Irreducible congruences over $GF(p)$. Hanneken C. B.), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, **10**, № 1, 18—26 (англ.)

Рассматриваются и классифицируются неприводимые сравнения m-той степени

$$C_m(z) = z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots + a_{m-1} z + a_m \equiv 0 \pmod p$$

над полем $GF(p)$ при группе дробно-линейных преобразований $T: z = (az' + b)/(cz' + d)$ с коэффициентами, принадлежащими этому же полю. Общее количество сопряженных рядов (см. РЖМат, 1960, 1304), а также число сопряженных рядов определенного порядка оказывается связанным с разложением в $GF(p)$ некоторых инвариантов. Применяемые методы позволяют решить аналогичную задачу для $GF(p^n)$.

В связи с реферируемой работой указана также работа Диксона (Dickson L. E., Trans. Amer. Math. Soc., 1911, **12**, 1—18). И. Ш. Славутский

2725. К арифметике матриц. Гутник Л. А., Докл. АН СССР, 1958, **121**, № 5, 786—789

Малыми греческими буквами будем обозначать целочисленные неособенные матрицы, а через U_n — группу всех целочисленных унимодулярных матриц. Класс, ассоциированных с β справа (слева) относительно U_n, назовем левым (правым) делителем α, если $\beta^{-1}\alpha$ — целая. Изучается $t_l(\alpha, \gamma)$ $(= t_r(\alpha, \gamma))$ — число левых (правых) делителей α, имеющих E-форму γ, а также $t_l(\alpha)$ $(= t_r(\alpha))$ — число левых (правых) делителей α.

Ниже везде π и ρ обозначают кососимметрические матрицы порядка $2n$. Определим $a_l(\pi, \rho)$ как число классов решений $\chi'\pi\chi = \rho$, эквивалентных слева относительно группы $A_0(\pi, \pi)$ решений $\chi'\pi\chi = \pi$. Устанавливается связь $a_l(\pi, \rho)$ с $t(\alpha, \gamma)$. Обозначим через $N_{q_1 q_2}(\pi, \rho)$ число классов эквивалентных решений $\chi'\pi\chi \equiv \rho \pmod{q_1}$ относительно сравнения по mod q_2. Оказывается, что $N_{pb, pb}(\pi, \rho) p^{-nb(2n+1)}$ не зависит от b, если b достаточно велико; обозначим его $c_p(\pi, \rho)$. Тогда справедливо утверждение, высказанное И. И. Пятецким-Шапиро: $a_l(\pi, \rho) = c_0(\pi, \rho) \prod_p c_p(\pi, \rho)$ (p пробегает все простые), где $c_0(\pi, \rho)$ определяется следующим образом. Пусть $\Psi(\rho)$ — некоторая окрестность ρ в пространстве кососимметрических матриц порядка $2n$, $\Omega(\pi, \Psi)$ — совокупность всех ξ, для которых $\xi'\pi\xi \in \Psi$ и $\Omega_0(\pi, \Psi)$ — фундаментальная область группы автоморфизмов $\Omega(\pi, \Psi)$, индуцированных умножением слева на $\mu \in A_0(\pi, \pi)$, тогда положим $c_0(\pi, \rho)$ равным пределу отношения объемов Ω_0 и Ψ, когда Ψ стягивается к ρ.

Как следствие получается следующий результат: для того, чтобы существовала целая матрица χ, удовлетворяющая соотношению $\chi'\pi\chi = \rho$, необходимо и достаточно, чтобы было разрешимо сравнение $\chi'\pi\chi \equiv \rho \pmod q$, где q — натуральное, $\det^3(\pi\rho) \nmid q$. Б. В. Степанов

2726. Некоторые свойства квадратичных вычетов. Субба-Рао (Some properties of quadratic residues. Subba Rao M. V.), Math. Student, 1958, **26**, № 1, 7—8 (англ.)

Пусть p — простое нечетное, R_l и L_l, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, совокупности целых чисел вида $p^l q$, $(p, q) = 1$, для которых q является соответственно квадратичным вычетом или невычетом по модулю p^{n-l} из некоторой приведенной системы представителей. Если t — целое число и S — некоторая совокупность целых чисел, то через $t \oplus S$ обозначается совокупность сумм вида $t + s$, где s пробегает S. Пусть r_l и l_l — произвольные фиксированные члены соответственно совокупностей R_l и L_l. Доказывается: 1) каждая из совокупностей $l_l \oplus R_l$ и $r_l \oplus L_l$ имеет $p^{n-l-1}[p/4]$ членов совокупности R_l, столько же членов совокупности L_l и m членов, кратных p^{l+1}, где $m = 0$, если $p \equiv 1 \pmod 4$, и $m = p^{n-l-1}$, если $p \equiv -1 \pmod 4$; 2) совокупность $r_l \oplus R_l$ имеет $p^{n-l-1}[(p-3)/4]$ членов из R_l, $p^{n-l-1}[(p-3)/4] + p^{n-l-1}$ членов из L_l и m_1 членов, кратных p^{l+1}, а совокупность $l_l \oplus L_l$ имеет $p^{n-l-1}[(p-3)/4]$ членов из L_l, $p^{n-l-1}[(p-3)/4] + p^{n-l-1}$ членов из R_l и m_1 членов, кратных p^{l+1}, где $m_1 = p^{n-l-1} - m$.

Замечены опечатки: на стр. 7 следует читать: $m = p^{n-l-1}$, если $p \equiv -1 \pmod 4$ и $m = 0$, если $p \equiv 1 \pmod 4$. Р. В. Уждавинис

2727. Об уравнении $ax + by + cz = n$. Лу Вэньдуань, Сычуань дасюэ сюэбао, 1956, № 2, 55—62 (кит.)

Пусть a, b, c — положительные целые числа, удовлетворяющие условию $(a, b, c) = 1$. Обозначим $(a, b) = d$, $a = a_1 d$ и $b = b_1 d$. Пусть M означает наибольшее целое, которое не может быть представлено в виде $ax + by + cz$, где x, y, z — неотрицательные целые числа. Доказывается: (i) для $la_1 r + b_1 s \leqslant a_1 b_1$

имеем

$$M = \frac{ab}{d} + cd - a - b - c - lbs,$$

где s — наименьшее положительное решение сравнения $c + b_1 s \equiv 0 \pmod{a_1}$ и $(c + b_1 s)/a_1 = r$, $l = [b_1/r]$; (ii) для $b_1 = lr$ или $(l+1) b_1 s \leqslant a_1 b_1 < la_1 r + b_1 s$ имеем

$$M = \frac{ab}{d} + cd - a - b - c - (l-1) bs - a(b_1 - lr).$$

Y. Wang

2728. Об арифметической функции. Мак-Карти (On an arithmetic function. McCarthy P. J.), Monatsh. Math., 1959, **63**, № 3, 228—230 (англ.)

Рассматривается сравнимость по модулю степени простого числа известной функции

$$F_k(g, m) = \sum_{d^k | m} \mu(d)\, g(m/d^k),$$

где μ — функция Мёбиуса, g — любая арифметическая функция. Между прочим доказано, что для выполнения соотношения

$$F_k(g, m) \equiv 0 \pmod m$$

для всех положительных m, необходимо и достаточно, чтобы для всех простых p и положительных целых чисел e и t, $p \nmid t$, было

$$g(p^e t) \equiv \begin{cases} 0 \pmod{p^e}, & \text{когда } k > e, \\ g(p^{e-k}) \pmod{p^e}, & \text{когда } k \leqslant e. \end{cases}$$

Э. И. Вилкас

2729. О некоторых двух способах классификации целых чисел. Ламбек, Мозер (On some two way classifications of integers. Lambek J., Moser L.), Canad. Math. Bull., 1959, **2**, № 2, 85—89 (англ.)

Описывается применение метода производящих функций для распределения единственным образом неотрицательных целых чисел на два таких класса, что сумма любой пары различных чисел первого класса равна сумме некоторой пары чисел второго класса. Подобный же метод применен и в случае равенства произведений пар натуральных чисел. В. А. Голубев

2730. Об одной проблеме П. Эрдёша. Шинцель (Sur un problème de P. Erdös. Schinzel A.), Colloq. math., 1958, **5**, № 2, 198—204 (франц.)

Для натуральных k и n дается следующее предложение $H_{k,n}$: существует целое i такое, что $0 \leqslant i < k$ $n - i \Big| \binom{n}{k}$. Эрдёш поставил проблему о существовании предложения $H_{k,n}$ для всех натуральных чисел k и $n \geqslant 2k$.

Автор показывает, что при $k = 15$, $n = 99215$ предложение $H_{k,n}$ ложно, и доказывает, что $H_{k,n}$ справедливо для $k = p^a$, где p — простое, a — целое $\geqslant 0$, и для чисел $k \leqslant 33$, кроме $k = 15, 21, 22$ и 33. В добавлении дано доказательство Эрдёша от 7. II. 1957 г. о том, что существует бесконечное число чисел k, для которых $H_{k,n}$ ложно. В. А. Голубев

2731. Об одной проблеме теории чисел. Дзыр (O pewnym zagadnieniu teorii liczb. Dzyr Andrzej), Matematyka, 1958, **11**, № 4—6, 2—3 (польск.)

В своей „Теоретической арифметике" В. Серпинский поставил вопрос о числе чисел n, для которых выполняется равенство $\sigma(n) = \sigma(n+1)$, где $\sigma(m)$ означает сумму всех делителей числа m, и дал такое наименьшее число: $n = 14$. Автор нашел еще три числа n, именно, 206, 957, 19358. В. А. Голубев

2732. О последовательных наложениях дуги на окружность круга. Сверчковский (On successive settings of an arc on the circumference of a circle. Swierczkowski S.), Fundam. math., 1959, **46**, № 2, 187—189 (англ.)

Доказывается гипотеза Штейнхауса; при этом используются некоторые идеи доказательства Эрдёша и Турана этой гипотезы. Доказательство гипотезы, основанное на теории непрерывных дробей, получил П. Сюс. Доказательства Эрдёша, Турана и Сюса не опубликованы. В. А. Голубев

2733. Итерация абсолютной величины разности натуральных чисел. Эльтерман (Iterierte absolute Differenzen mit natürlichen Zahlen. Eltermann Heinz), J. reine und angew. Math., 1959, **201**, № 1—2, 71—77 (нем.)

Пусть (a) — двусторонняя бесконечная строка (начальная), образованная из неотрицательных действительных чисел с периодом n:

$$a_i = a_{i+n}, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Из начальной строки (a) строится строка (a') по следующему правилу

$$a_i' = |a_{i+1} - a_i|, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Продолжение этого процесса приводит к бесконечной последовательности строк

$$(a), (a'), (a''), (a'''), \ldots, (a^k), \ldots$$

Пусть z^k — длина наименьшего периода k-ой строки, называемая периодом этой строки, M^k — наибольшее число из k-ой строки, называемое максимумом этой строки.

Теорема 1. Периоды $z, z', z'', \ldots, z^k, \ldots$ образуют невозрастающую последовательность натуральных чисел, обладающей тем свойством, что каждое число последовательности есть делитель предыдущего. После конечного числа шагов итерации начальной строки получается строка с периодом z, и z является периодом для всех последующих строк.

Теорема 2. Последовательность максимумов строк есть невозрастающая последовательность, следовательно, имеет предел (неотрицательное число), называемый наибольшей границей.

Далее изучается исключительно последовательность строк из натуральных чисел, в частности, порожденная единичной строкой, состоящей только из чисел 0 и 1.

Теорема 3. Если строки $(a), (a'), \ldots, (a^{z-1})$ с одним и тем же периодом z имеют один и тот же максимум M, то в эти строки входят лишь числа M и 0.

Доказываются еще две сходные теоремы.

С. В. Огай

2734. Об одной функции, связанной с $\varphi(n)$. Субба-Рао (On a function connected with $\varphi(n)$. Subba Rao M. V.), J. Madras Univ., 1957, **B 27**, № 2-3, 327—333 (англ.)

Пусть $\varphi_1(n) = \varphi(n)$, где $\varphi(n)$ — функция Эйлера $\varphi_r(n) = \varphi(\varphi_{r-1}(n))$, $r = 2, 3, \ldots$ При данном n и возрастающем r функция $\varphi_r(n)$ убывает, и при некотором $r = r_1$ имеем $\varphi_r(n) = \varphi_{r+1}(n) = \ldots = 1$. Пиллаи доказал, что $[\log(n/2)/\log 3] + 1 \leqslant R(n) \leqslant \log n/\log 2 + 1$, где $r_1 = R(n)$.

Рассматривается функция $S(n) = \varphi_1(n) + \varphi_2(n) + \ldots + \varphi_{r_1}(n)$. Доказываются неравенства:

$$R(n) \leqslant \log n/\log 2, \; S(n) \leqslant n - 1,$$

при n четном;

$$R(n) \leqslant [\log(n-1)/\log 2] + 1, \; S(n) \leqslant 2n - 3$$

при n нечетном.

Показывается, что решениями уравнения $S(n) = n$ являются $n = n_1, 3n_2, 3n_3, \ldots$, где $n_1 = 3^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$; $n_2 = 1 + 4n_1$, $n_3 = 1 + 12n_2$, $n_4 = 1 + 12n_3, \ldots$ при простых $n_2, n_3, \ldots$ В. А. Голубев

2735. О представлениях e-функций (modr). II. Умножения по Коши. Коэн (Representations of even functions (modr), II. Cauchy products. Cohen Eckford), Duke Math. J., 1959, **26**, № 2, 165—182 (англ.)

Автор продолжает изучение класса арифметических функций $f(n, r)$, определяемых для заданного целого $r > 0$ и всех целых n соотношением

$$f(n, r) = f_r((n, r), r),$$

где (n, r) — общий наибольший делитель n и r. В результате им получено большое количество различного рода арифметических тождеств. А. Ф. Лаврик

2736. Линейные сравнения и функция Штернека. Никол (Linear congruences and the von Sterneck function. Nicol C. A.), Duke Math. J., 1959, **26**, № 2, 193—197 (англ.)

С помощью функции Штернека (РЖМат, 1955, 3606) выводится формула числа решений сравнения

$$y_1 + \ldots + y_r \equiv t \pmod k, \qquad (1)$$

где каждое y_i и t принадлежат к меньшим неотрицательным вычетам $(\mathrm{mod}\, k)$, и если последовательность $(y_1, \ldots, y_r)$ есть одно из решений (1), то по большей мере h из них равны между собою. Случаи $h = k$ и $h = 1$ были известны ранее.

Примечание референта. Опечатка в выражении функции Штернека. Напечатано: $\Phi(k, n) = \varphi(n)\,\mu(n/(k, n))\,\varphi(n/(k, n))$, нужно: $\Phi(k, n) = \varphi(n)\,\mu(n/(k, n))/\varphi(n/(k, n))$ (см. РЖМат, 1955, 3606 и 1959, 7754). В. А. Голубев

2737. Об одной гипотезе Шинцеля. Палама (Su di una congettura di Schinzel. Palamà Giuseppe), Boll. Unione mat. ital., 1959, **14**, № 1, 82—94 (итал.)

А. Шинцель высказал предположение, что любая положительная дробь m/n, при $n > k_m$, зависящем от m, выражается алгебраической суммой $m/n = 1/x_1 \pm 1/x_2 \pm \pm 1/x_3$. Это предположение справедливо при $m < 20$, что показано В. Серпинским (РЖМат, 1957, 2884).

Доказывается теорема, из которой следует справедливость гипотезы Шинцеля для всех $m \leqslant 23$ и некоторых других m. В. А. Голубев

2738. Несколько замечаний к системам троек Штейнера. Сколем (Some remarks on the triple systems of Steiner. Skolem Th.), Math. scand., 1958, **6**, № 2, 273—280 (англ.)

Системой троек Штейнера из данного множества элементов называется такая система, когда любая пара элементов содержится в одной и только одной тройке. Продолжена работа автора (РЖМат, 1958, 5473), в которой показано, как в случае, когда число элементов $n \equiv 0$ или 1 (mod 4), из распределения данных чисел по парам с заданными разностями получить систему троек Штейнера. Рассматриваются другие случаи и даются примеры троек. В. А. Голубев

2739. О двух неравенствах Сельберга. Тверберг (On two inequalities by S. Selberg. Tverberg Helge), Math. scand., 1958, **6**, № 2, 308—310 (англ.)

Пусть

$$\sigma_k(x) = \sum_{\lambda=1}^{n} \left\{ x\left[\frac{\lambda}{n}\right] - (x+1)\left[\frac{\lambda}{x+1}\right] \right\}$$

(см. РЖМат, 1956, 5761).

Дается простое доказательство неравенства $0 \leqslant \sigma_k(x) \leqslant k$, отличное от доказательства Сельберга. В. А. Голубев

2740. О сетях многоугольников. Снятыцкий (O sieciach wielokątów. Śniatycki A.), Roczn. Polsk. towarz. mat. Ser. II—Wiadom. mat., 1959, **2**, № 2, 235—244 (польск.)

Микусинский в работе „Sur le parquetage du plan par des polygones" рассматривал сети треугольников, покрывающих плоскость так, что: 1) вершины соседних треугольников совпадают; 2) в узлах сети встречаются не более 6 треугольников. Дефектом называется разность $6 - k$, где k — число встречающихся в узле треугольников.

Автор обобщает результаты Микусинского на q-угольники, покрывающие плоскость, и определяет суммы дефектов в этом случае и в случае покрытия шара, тора и т. п. В. А. Голубев

2741. Одна проблема рассаживания при турнире в бридж и латинские квадраты. Уорд (A certain bridge tournament seating problem and latin squares. Ward James A.), Math. Mag., 1956, **29**, 249—253 (нем.)

2742. Сумма степеней целых чисел. Йейтс (Sums of powers of integers. Yates Robert C.), Math. Teacher, 1959, **52**, № 4, 268—271 (англ.)

2743. Одновременные характеристики делимости для групп простых чисел. Эструге (Carácteres simultaneos de divisibilidad por grupos de numeros primos. Estruge José Antonio), Gac. mat., 1958, **10**, № 7-8, 204—214 (исп.)

2744. Теорема Бенальбаны (Делимость на 7). Холанда (Teorema de Benalbana. (Divisibilidade por 7). Holanda Sidrack), Matemática, 1959, **4**, № 11, 52—53 (порт.)

Доказывается следующий признак делимости чисел на 7, принадлежащий арабу Бенальбане: Если $N = \ldots a_4 a_3 a_2 a_1 a_0$, то $N \equiv \ldots \{[(3a_4 + a_3)3 + a_2]3 + a_1\}3 + a_0 \pmod 7$. В. А. Голубев

2745. Разложение простого числа $P \equiv 1 \pmod 4$ на сумму двух квадратов. Керре (Décomposition d'un nombre premier $P \equiv 1 \pmod 4$ en une somme de deux carrés. Querré J.), Bull. Assoc. professeurs math. enseign. public, 1959, **38**, № 199, 269 (франц.)

Дается элементарное доказательство указанной в заглавии теоремы и ее геометрическая интерпретация. В. А. Голубев

2746. Сколько простых чисел, меньших миллиарда? Серпинский (Ile jest liczb pierwszych mniejszych od miliarda. Sierpiński Wacław), Matematyka, 1959, **12**, № 3, 65—66 (польск.)

2747. Теория чисел. Линник Ю. В., В сб.: Матем. в СССР за 40 лет. 1917—1957. Т. I. М., Физматгиз, 1959, 121—150

2748 К. Делимость целых чисел. Попадич (Deljivost celih brojeva. Popadić M. S.), Matematička biblioteka, № 9, Beograd, 1959, 96 стр. (сербо-хорв.)

В книге даны основные понятия и теоремы теории делимости целых чисел. Как говорит автор, она может служить введением в элементарную теорию чисел. Имеется предисловие и шесть глав: I. «Целые числа». II. «Основные понятия». III. «Общий наибольший делитель и общее наименьшее кратное». IV. «Неопределенные уравнения». V. «Простые множители». VI. «Некоторые функции, связанные с понятием делимости». В конце каждой главы даются задачи.

Дано понятие об алгоритме Евклида и о решении неопределенных уравнений с помощью этого алгоритма. Доказывается теорема о разложении числа на простые множители. В последней главе определяются мультипликативные функции и в качестве примера — функции Мёбиуса и Эйлера. В задачах кроме материала, изложенного в соответствующей главе, требуется знание чисел Ферма, Мерсенна, совершенных, многоугольных и т. д. Определения их даны перед задачами.

Это первое в югославской математической литературе пособие по элементарным вопросам делимости. Е. П. Ожигова

2749 К. Диофантовы уравнения с конечным числом решений. Ландау, Вальфиш (Diophantische Gleichungen mit endlich vielen Lösungen. Landau Edmund. Neu Hrsg. Walfisz Arnold. Berlin, VEB Dtsch. Verl. Wiss., 1959, 87 S.) (нем.)

Это издание представляет собой изложение материала § 4, главы 2 III тома известной книги Ландау «Лекции по теории чисел», осуществленное Вальфишем. Отличие от текста Ландау заключается в том, что вместо теоремы Зигеля об аппроксимациях алгебраических иррациональностей, лежащей в основе исследований проблемы Туэ, которой посвящен этот параграф книги Ландау, используется более поздняя и более сильная теорема Рота о рациональных приближениях алгебраических иррациональностей, и основная цель этих исследований рассматривается в более общей форме теоремы Рота. Отсюда получается сама теорема Туэ, ее модификация, теорема Ландау—Островского—Туэ, Полиа и др.

Это издание предназначается для студентов, интересующихся теорией чисел и поэтому снабжено вспомогательными параграфами, содержащими необходимые сведения из алгебры и анализа. Характер изложения элементарный.

Имеются опечатки. Г. В. Емельянов

2750 К. Теория чисел. Ч. 2. Хольцер (Zahlentheorie. Teil 2. Holzer Ludwig. Leipzig, Teubner, 1959, IV, 126 S., 9.—DM). Dtsch. Nationalbibliogr., 1959, **A**, № 14, 1158 (нем.)

Часть I см. РЖМат, 1959, 8814К.

2751 К. О плотности разности между последовательными простыми числами. Куджани (Sulla densità delle differenze fra numeri primi consecutivi. Cugiani Marco. Milano, C. Tamburini, 1958, 26 p.—Litogr.) Bibliogr. naz. ital., 1958, **1**, № 5, 179 (итал.)

ТОПОЛОГИЯ

Редактор *П. С. Александров*

2752. Принципы плоской топологии. Данжуа А., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. 4. М., АН СССР, 1959, 195—197

2753. Обобщенные метрические пространства. Курепа Г., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. 4. М., АН СССР, 1959, 197—198

2754. О непрерывных функциях, определенных на сфере. Гордон И. И., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. 1. М., АН СССР, 1956, 133—134

2755. Теоремы об антиподах. Яворовский Я., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. 4. М., АН СССР, 1959, 200

2756. Некоторые применения понятия открытого отображения. Сикорский Р., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. 4. М., АН СССР, 1959, 200

2757. О пространствах множеств, связных в размерности *n*. Куратовский К., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. 4. М., АН СССР, 1959, 200

2758. Замечания к вложимости множеств в евклидовы пространства. Борсук К., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. 4. М., АН СССР, 1959, 193—194

2759. Инвариантность бесконечномерных групп гомологий. Рышков С. С., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. 4. М., АН СССР, 1959, 73—74

2760. Об одной теореме аддиционного типа в теории когомотопических групп. Гранас А., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. 4. М., АН СССР, 1959, 200

2761. Равномерные гомологии. Ефремович В. А., Тихомирова Е. С., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956, 4. М., АН СССР, 1959, 72

2762. О вложении конечных полиэдров в евклидовы пространства. У Вэнь-цзюнь (В подл. Ву Вендзун), Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. 4. М., АН СССР, 1959, 194—195

2763. Когомологические операции. Стинрод Н. Е., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. 4. М., АН СССР, 1959, 198—200

2764. Подразбиения множества отношений графа, связанные с его хроматическим числом. Эрдёш, Радо (Partition relations connected with the chromatic number of graphs. Erdös P., Rado R.), J. London Math. Soc., 1959, **34**, № 1, 63—72 (англ.)

Пусть $[X]^2$ означает множество двуточечных подмножеств множества X. Тогда $\Gamma = [S, T]$, где $T \subseteq [S]^2$ — граф, $\varphi(\Gamma) = |S|$ и $\chi(\Gamma)$ — его хроматическое число. Для каждого $a < \aleph_0$ существует такой граф без треугольников, хроматическое число которого равно a. Этот результат был известен из работ Кэлли и Кэлли (РЖМат, 1955, 4308) и Мыцельского (РЖМат, 1956, 4395) и он обобщается в данной работе на случай любого кардинального числа a (РЖМат, 1959, 5639), т. е. доказывается, что для любого $a \geqslant \aleph_0$ существует граф Γ'_a без треугольников такой, что $a = \chi(\Gamma'_a) = \varphi(\Gamma'_a)$, если: 1) либо a регулярно и из $a_0 < a$ вытекает $2^{a_0} \leqslant a$, 2) либо a сингулярно и $\aleph_0 \leqslant a_0 < a$ вытекает $2^{a_0} = a_0^+$ (a_0^+ означает следующее за a_0 кардинальное число, и a регулярно, если существует минимальное индексное множество $N, e^{\prime}N| = a$, что $a = \sum_{(\nu \in N)} a_\nu$, если же такое N существует для $b < a$, то кардинальное число называется сингулярным).

Соответствие $A \to (b, \Lambda)^2$ означает, что для каждого разложения множества $[A]^2 = K_0 \cup K_1$ существует $X \subseteq A_0$ свойством: 1) либо $[X]^2 \subseteq K_0$, $|X| = b$, 2) либо $[X]^2 \subseteq K_1$, $X \subset \Lambda$. Для системы множеств Ω множество A первой Ω-категории, если существует Ω' со свойствами $\Omega' \subseteq \Omega$, $|\Omega'| < |\Omega|$, $A \subseteq \cup X (X \in \Omega')$, а в противном случае — второй Ω-категории. Если $|\Omega|$ — регулярное кардинальное число и A второй Ω-категории, то существует соответствие $A \to (\aleph_0, \Lambda_2)^2$, где Λ_2 — совокупность всех подмножеств второй Ω-категории, принадлежащих A.

В применении к графам это означает, что если множество A вершин графа второй категории Бэра и всякая цепь $< \aleph_0$, тогда в A существует множество попарно несвязных вершин в Γ второй категории Бэра. Г. Курепа

2765. Поверхности с заданной границей. Эванс (Surface of given space-curve boundary. Evans G. C.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1958, **44**, № 8, 786—788 (англ.)

Автор называет поверхностью с границей s замкнутое связное множество S, удовлетворяющее трем условиям: 1) Вне тороидальной окрестности s множество S разбивается на конечное число таких регулярных элементов (понятие регулярного элемента эквивалентно понятию симплициального топологического отображения многоугольника), что любые два регулярных элемента имеют общими не более чем ребро или вершину. 2) Любой одномерный цикл z^1, имеющий нечетный коэффициент зацепления с s, пересекается с S. 3) Если из S удалить любое открытое в нем множество, то условие 2) не выполняется.

Условие связности в определении поверхности является следствием остальных условий. Если S_1 и S_2 — две поверхности с одной и той же границей s, то существует замкнутая область в E^3, граница которой лежит в $S_1 \cup S_2$. Р. Л. Фрум-Кетков

2766. Локальные свойства и суммы траекторий. Суингл (Local properties and sums of trajectories. Swingle Paul M.), Portug. math., 1956, **15**, № 3-4, 89—103 (англ.)

Предположим, что пространство S удовлетворяет аксиомам 0 и 1 Moora (Moore R. L., Foundations of point set theory, New York, 1932). Пусть M связно и предположим, что M — объединение двух связных A и B, когда одно из множеств, или A, или B, плотно в M. В этом случае назовем M неразложимым. Если же M является объединением n выпуклых M_i, и каждое из которых не лежит в объединении замыканий остальных и n максимально относительно этого свойства, то M неразложимо. Пусть теперь $C_1, \ldots, C_n$ — выпуклые и замкнутые в M множества; для каждого i пусть $E(C_i)$ — множество точек, которые не лежат в объединении множеств $\overline{C_j}$, $j \neq i$, и пусть $W = \cup C_i$; предположим, что каждое множество $E(C_i)$ невырождено и нет множества $E(C_i)$, лежащего в замыкании $M \setminus W$. Тогда говорят, что M существенно содержит множества C_i. И, наконец, предположим, что окрестность V_x содержит, во-первых, другое открытое множество V и, во-вторых, некоторое множество N степени n, лежащее в $\overline{M}$, такое, что если W — связное подмножество M и W содержит N, то $\overline{W}$ содержит $V \cap M$; для n минимального относительно этого свойства M локально n-закреплено в точке X. Естественно определяются локальные свойства.

Переходим к изложению результатов: 1) Существует в плоскости связное множество M и в нем точка q такая, что M локально 2-неразложимо в q, но M уже не содержит неразложимых подмножеств. 2) Для того чтобы M было локально n-неразложимо, необходимо и достаточно, чтобы M локально существенно содержало подмножества $C_i (1 \leqslant i \leqslant m)$ для $m = n$, но не для $m = n + 1$. 3) Пусть M — связный локальный компакт в

полном сепарабельном пространстве. Если M локально n-неразложимо в точке $X \subset \overline{M}$, где $n > 1$, то M локально n'-закреплено для некоторого $n' \leqslant n$. E. E. Moise

Перевод из Math. Revs, 1958, № 4, 437.

2767. Суммы связных множеств с неразложимыми свойствами. Суингл (Sums of connected sets with indecomposable properties. Swingle Paul M.), Portug. math., 1957, **16**, № 3-4, 129—144 (англ.)

В терминах предыдущей работы автора (реф. 2766) упомянем о двух теоремах:

1) Связное n-неразложимое подмножество M полного сепарабельного пространства не может быть существенной суммой конечного числа связных неразложимых множеств, каждое из которых замкнуто в M.

2) Если M — связное n-неразложимое подмножество компактного пространства, тогда существует связное подмножество N, нигде не плотное в M, такое, что M — связное неприводимой для N. A. Lelek

2768. Неразложимые связные множества высших размерностей. Суингл (Higher dimensional indecomposable connected sets. Swingle Paul M.), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, **8**, № 4, 816—819 (англ.)

Показывается, что для любой связной области n-мерного куба ($n > 2$) или гильбертова параллелепипеда можно построить всюду плотно лежащее в ней неразложимое связное множество (т. е. такое, при разложении которого на два связных подмножества хотя бы одно из них имеет такое же замыкание, как и все множество), являющееся гомеоморфным образом r-мерного симплекса с одной отброшенной вершиной ($1 \leqslant r < n$).

М. Ф. Бокштейн

2769. О метрической размерности точечных множеств. Егоров В. И., Матем. сб., 1959, **48**, № 2, 227—250

Работа содержит подробные доказательства опубликованных ранее результатов (РЖМат, 1958, 1911).

Ю. М. Смирнов

2770. Семейство мощности континуума, состоящее из $\mathfrak{R}$-несравнимых деревьев. Секлюцкий (On a family of power $\mathfrak{c}$ consisting of $\mathfrak{R}$-uncomparable dendrites. Sieklucki K.), Fundam. math., 1959, **46**, № 3, 331—335 (англ.)

На плоскости существует семейство мощности континуума, состоящее из $\mathfrak{R}$-несравнимых деревьев (реф. 2771). А. С. Пархоменко

2771. Относительно классификации топологических пространств с точки зрения теории ретрактов. Борсук (Concerning the classification of topological spaces from the stand-point of the theory of retracts. Borsuk K.), Fundam. math., 1959, **46**, № 3, 321—330 (англ.)

Под $\mathfrak{R}$-отображением пространства X на пространство Y автор понимает такое непрерывное отображение φ пространства X на пространство Y, что существует непрерывное отображение ψ пространства Y в пространство X, для которого $\varphi\psi(y) = y$ для всякого $y \in Y$. В частности, всякая ретракция, т. е. всякое непрерывное отображение пространства X на подмножество Y в X, тождественное на Y, является $\mathfrak{R}$-отображением. $\mathfrak{R}$-отображения являются не чем иным, как отображениями вида hr, где r — ретракция и h — гомеоморфизм. В работе вводится ряд понятий, связанных с $\mathfrak{R}$-отображениями, исследуются их простейшие свойства и ставятся некоторые проблемы.

Два пространства X и Y называются $\mathfrak{R}$-эквивалентными в обозначениях $X \underset{\mathfrak{R}}{=} Y$, если существует $\mathfrak{R}$-отображение X на Y, а также $\mathfrak{R}$-отображение Y на X. Отношение $\underset{\mathfrak{R}}{=}$ является отношением эквивалентности. Поэтому каждый класс χ пространств можно разбить на семейство подклассов, называемых $\mathfrak{R}$-типами, относя два пространства $X, Y \in \chi$ к одному и тому же $\mathfrak{R}$-типу, тогда и только тогда, когда $X = Y$.

Если существует $\mathfrak{R}$-отображение X на Y, но $\mathfrak{R}$-отображение Y на X не существует, то говорят, что пространство X является более $\mathfrak{R}$-широким, чем Y, или, что Y — более $\mathfrak{R}$-узким, чем X в обозначениях $X \underset{\mathfrak{R}}{>} Y$ или $Y \underset{\mathfrak{R}}{<} X$. Отношение $\underset{\mathfrak{R}}{<}$ является транзитивным, нерефлексивным и не симметричным. Каждый класс χ пространств будет частично упорядочен этим отношением. Если $X \underset{\mathfrak{R}}{\geqslant} Y$, то каждое свойство пространства X, инвариантное относительно $\mathfrak{R}$-отображений, выполняется также и в пространстве. К числу инвариантов $\mathfrak{R}$-отображений принадлежат, в частности, следующие свойства: нормальность, сепарабельность, метризуемость, связность, компактность, локальная компактность, локальная связность, дугообразная связность, локальная связность в размерности n, стягиваемость, локальная стягиваемость, свойство быть абсолютным окрестностным ретрактом, свойство быть абсолютным ретрактом, существовании неподвижных точек при непрерывных отображениях на себя. Пространство X_0 называется $\mathfrak{R}$-минорантой (соответственно $\mathfrak{R}$-мажорантой) для класса χ пространств, если $X_0 \leqslant X$ для $X \in \chi$ (соответственно $X_0 \underset{\mathfrak{R}}{\geqslant} X$ для всякого $X \in \chi$). Для всякого класса X не пустых пространств существует одно $\mathfrak{R}$-минорантное и одно $\mathfrak{R}$-мажорантное.

Класс χ пространств называется $\mathfrak{R}$-замкнутым слева (соответственно справа), если не содержит $\mathfrak{R}$-миноранту (соответственно $\mathfrak{R}$-мажоранту) класса χ.

Для данной тематики автор ставит следующие проблемы:

1. Является ли класс всех непустых компактных метрических пространств $\mathfrak{R}$-замкнутым справа?

2. Пусть n — целое число $\geqslant 0$. Является ли класс n-мерных компактных метрических пространств $\mathfrak{R}$-замкнутым справа?

Существует в трехмерном евклидовом пространстве E_3 семейство мощности континуума двумерных $\mathfrak{R}$-несравнимых абсолютных ретрактов. (реф. 2770)

3. Существует ли несчетное семейство пространств упорядоченных посредством отношения $\underset{\mathfrak{R}}{<}$?

4. Существует ли семейство пространств, упорядоченное отношением $\underset{\mathfrak{R}}{\leqslant}$ плотным образом (т. е. так, что для всяких двух пространств $X \underset{\mathfrak{R}}{<} Y$ этого семейства существует пространство Z, удовлетворяющее условиям $X \underset{\mathfrak{R}}{<} Z \underset{\mathfrak{R}}{<} Y$)?

5. Существует ли семейство пространств, упорядоченное посредством отношения $\underset{\mathfrak{R}}{<}$ подобно множеству всех действительных чисел?

Проблема 4 остается открытой, в частности для класса полиэдров. А. С. Пархоменко

2772. Теория ретрактов и ее проблемы. Борсук (Theorie der Retrakte und ihre Probleme. Borsuk K.), Изв. Матем. ин-т. Българ. АН, 1959, **4**, 45—54 (нем.; рез. болг., русск.)

Обзорный доклад по теории ретрактов (реф. 2771).

2773. Некоторые отображения, понижающие размерность. Дайер (Certain transformations which lower dimension. Dyer Eldon), Ann. Math., 1956, **63**, № 1, 15—19 (англ.)

Пусть f — непрерывное отображение компакта M на n-мерный компакт N. Доказаны теоремы: 1. Если для всех точек $y \in N$ размерность $\dim f^{-1}(y) \leqslant m$ и гомологические группы всех размерностей $H_k(f^{-1}(y)) = 0$ (рассматриваются вьеторисовские циклы с аддитивной группой действительных чисел, приведенных по модулю 1, в качестве поля коэффициентов), то $n \leqslant \dim M \leqslant n + m$. 2. Если f открыто и существует такое число $e > 0$, что для всех точек $y \in N$ полный прообраз $f^{-1}(y)$ есть невырождающийся локально связный континуум, не содержащий простой замкнутой линии диаметра $< e$, то $\dim M = n + 1$. Далее доказана теорема: 3. Пусть M — компакт, несущий такой n-мерный цикл γ^n, что никакое собственное замкнутое подмножество M не несет n-мерного цикла, гомологичного γ^n на M. Тогда, если f — открытое отображение открытого подмножества $O \subset M$ в метрическое пространство, при котором полный прообраз каждой точки из $f(0)$ есть дендрон, то f — гомеоморфизм. В частном случае, когда M — n-мерная сфера, из теоремы 3 вытекает, что у любого открытого подмножества евклидова пространства не существует вполне непрерывного разложения, элементами которого являются невырождающиеся дендроны.

И. А. Вайнштейн

2774. Вполне регулярные отображения. Дайер, Хамстром (Completely regular mappings. Dyer E., Hamstrom M.-E.), Fundam. math., 1958, 45, № 2, 103—118 (англ.)

Непрерывное отображение f метрического пространства X на метрическое пространство Y авторы называют вполне регулярным, если для любой точки $y \in Y$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всякой точки $x \in Y$, для которой расстояние $d(x, y) < \delta$, существует гомеоморфизм прообраза $f^{-1}(y)$ на $f^{-1}(x)$, являющийся ε-сдвигом. Открытое отображение $f: X \to Y$ называется 0-регулярным, если для любых точек $y \in Y$, $p \in f^{-1}(y)$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что если $x \in Y$ и a и b — точки из $f^{-1}(x)$, лежащие в сферической окрестности $S(p, \delta)$, то в пересечении $f^{-1}(x) \cap S(p, \varepsilon)$ найдется простая дуга, соединяющая a и b. Устанавливается ряд свойств вполне регулярных отображений, показывающих, что эти отображения очень похожи на проекции в прямых произведениях и при некоторых дополнительных ограничениях превращаются в проекции.

Основная теорема: Пусть K — компакт, X — полное и Y — конечномерное пространство и f — такое вполне регулярное отображение X на Y, что 1) для каждой точки $p \in Y$ существует гомеоморфизм f_p конуса $C(K)$ пространства K на $f^{-1}(p)$ и 2) существует гомеоморфизм h объединения $\bigcup f_p(K)$ $(p \in Y)$ на прямое произведение $Y \times K$ такой, что на $\bigcup f_p(K)$ имеет место равенство $f = \pi h$, где π — проекция $Y \times K$ на Y. Тогда существует такой гомеоморфизм h^* пространства X на прямое произведение $Y \times C(K)$, являющийся продолжением h, что на X имеет место равенство $f = \pi h^*$, где π — проекция $Y \times C(K)$ на Y. В случае, когда K — i-мерная сфера $(i \leqslant 3)$, а Y — n-мерная клетка, и в некоторых других случаях условие 2) может быть опущено. Доказано несколько теорем о 0-регулярных отображениях и их связи с вполне регулярными отображениями. Из одной из них, в частности, следует, что если существует 0-регулярное отображение компакта X на простую дугу, при котором полный прообраз каждой точки есть двумерная клетка, то X — трехмерная клетка.

И. А. Вайнштейн

2775. Замечание о пространствах, над которыми доминируют многообразия. Берштейн (Remark on spaces dominated by manifolds. Berstein I., Ganea T.), Fundam. math., 1959, **47**, № 1, 45—56 (англ.)

Если для двух пространств X и Y существует отображение $f: X \to Y$, обладающее левым гомотопически обратным отображением, то говорят, что пространство Y доминирует над пространством X. Доказано утверждение: Если непрерывное отображение $f: X \to Y$ произвольного пространства X в компактное n-мерное многообразие Y обладает левым гомотопическим обратным отображением и $H^n(X, Z) \neq 0$, то f является гомотопической эквивалентностью. Под многообразием понимается любое, не обязательно триангулируемое, локально евклидово хаусдорфово пространство. В. И. Кузьминов

2776. О некоторых вопросах топологии. Камацу Дзюнро, Кудо Тацудзи, Сугаку, 1959, **10**, № 2, 65—74 (японск.)

2777. Абстрактные полусимплициальные комплексы. Мидзуно Кацухико, Сугаку, 1959, **10**, № 2, 75—80 (японск.)

2778. О гомологиях Г-пространств. Накаока Минору, Сугаку, 1959, **10**, № 2, 97—104 (японск.)

2779. Аксиомы приведенных степеней. Араки Кацуро, Сугаку, 1959, **10**, № 2, 80—87 (японск.)

2780. Стационарные гомотопические группы сфер. Тода Хироси, Сугаку, 1959, **10**, № 2, 87—97 (японск.)

2781. H-пространства. Сугахара Масахиро, Сугаку, 1959, **10**, № 2, 125—132 (японск.)

2782. Характеристические классы дифференцируемых многообразий. Тамуро Итиро, Сугаку, 1959, **10**, № 2, 114—121 (японск.)

2783. Аксиоматическое определение характеристических классов Штифеля—Уитни и реализация их подмногообразиями. Судзуки Харуо, Сугаку, 1959, **10**, № 2, 121—125 (японск.)

2784. К теории дифференцируемых многообразий в целом. По поводу работы Тома. Сидзума Йосицугу, Симада Нобуо, Сугаку, 1959, **10**, № 2, 104—114 (японск.)

2785. Топологическая классификация пространств пучков сфер над сферами. Тамура (Homeomorphy classification of total spaces of sphere bundles over spheres. Tamura Itiro), J. Math. Soc. Japan, 1958, **10**, № 1, 29—43 (англ.)

Пусть $\mathfrak{B}^{q,r} = \{B, S^q, S^r, SO(r+1), p\}$ — косое произведение с проекцией $p: B \to S^q$, слоем S^r и структурной группой $SO(r+1)$, $\alpha(\mathfrak{B})$ — соответствующий этому косому произведению элемент гомотопической группы $\pi_{q-1}(SO(r+1))$. Как известно, $\pi_3(SO(4)) \approx \pi_7(SO(8)) \approx \approx Z + Z$. Автор фиксирует образующие ρ и σ группы $\pi_3(SO(4))$ и образующие $\bar{\rho}$ и $\bar{\sigma}$ группы $\pi_7(SO(8))$. Через $\mathfrak{B}^{4,3}_{m,n}$, $\mathfrak{B}^{8,7}_{m,n}$ обозначаются косые произведения описанного выше вида, удовлетворяющие условиям $\alpha(\mathfrak{B}^{4,3}_{m,n}) = m\rho + n\sigma$, $\alpha(\mathfrak{B}^{8,7}_{m,n}) = m\bar{\rho} + n\bar{\sigma}$. Пространства этих косых произведений обозначаются соответственно $B^{4,3}_{m,n}$ и $B^{8,7}_{m,n}$. Эти пространства естественным образом превращаются в гладкие многообразия.

Доказываются следующие утверждения: 1) Если $m \equiv \pm m' \bmod n$, то многообразие $B^{4,3}_{m,n}\left(B^{8,7}_{m,n}\right)$ гомеоморфно многообразию $B^{4,3}_{m',\pm n}\left(B^{8,7}_{m',\pm n}\right)$. В частности, все многообразия $B^{4,3}_{m,\pm 1}$ гомеоморфны семимерной сфере (РЖМат, 1957, 6039), а все многообразия $B^{8,7}_{m,\pm 1}$ — пятнадцатимерной сфере. 2) Если $m \equiv \pm m' \bmod (12, n)$, то многообразия $B^{4,3}_{m,n}$ и $B^{4,3}_{m',\pm n}$ гомотопически эквивалентны; если $m \equiv m' \bmod (120, n)$, то многообразия $B^{8,7}_{m,n}$ и $B^{8,7}_{m',\pm n}$ гомотопически эквивалентны. В случае, когда $n \neq \pm n'$, многообразия $B^{4,3}_{m,n}$ и $B^{4,3}_{m',n'}\left(B^{8,7}_{m,n}$ и $B^{8,7}_{m',n'}\right)$ имеют различные группы гомологий и, значит, различный гомотопический тип. 3) Если n нечетно и сущест-

вует гомотопическая эквивалентность многообразий $B^{4,3}_{m,n}$ и $B^{4,3}_{m',\pm n}$, переводящая понтрягинские классы многообразия $B^{4,3}_{m,n}$ в понтрягинские классы многообразия $B^{4,3}_{m',\pm n}$ (говоря более коротко, многообразия $B^{4,3}_{m,n}$ и $B^{4,3}_{m',\pm n}$ имеют одинаковый гомотопический тип и одинаковые понтрягинские классы), то многообразия $B^{4,3}_{m,n}$ и $B^{4,3}_{m',\pm n}$ гомеоморфны. Если, кроме того, n не делится на 3, то аналогичное предложение имеет место для многообразий $B^{8,7}_{m,n}$ и $B^{8,7}_{m',\pm n}$. 4) Если $n \not\equiv 0 \bmod 7$, то в сериях гомеоморфных друг другу гладких многообразий $B^{4,3}_{rn,n}$, $B^{4,3}_{n+2nr,\,2n}$, $B^{4,3}_{n+4nr,\,4n}$, $B^{4,3}_{3n+4nr,\,4n}$ (r пробегает множество целых чисел) существуют многообразия, не гладко гомеоморфные друг другу. Если $n \not\equiv 0, \bmod 127$, то существуют гомеоморфные, но не гладко гомеоморфные друг другу многообразия вида $B^{8,7}_{rn,n}$ (а также вида $B^{8,7}_{n+2nr,\,2n}$, $B^{8,7}_{2n+3nr,\,3n}$ и т. д.).

Основные результаты статьи доказываются с помощью конструкций, обобщающих соответствующие конструкции Милнора (РЖМат, 1957, 6389). При исследовании многообразий $B^{8,7}_{m,n}$ используются числа Кэли.

А. С. Шварц

2786. О реализации характеристических классов Штифеля — Уитни подмногообразиями. Судзуки (On the realization of the Stiefel—Whitney characteristic classes by submanifolds. Suzuki Haruo), Tohoku Math. J., 1958, **10**, № 1, 91—115 (англ.)

Пусть $\mathfrak{B}(E, V, S^{m-1}, SO(m))$ — пучок $(m-1)$-мерных сфер над n-мерным гладким замкнутым многообразием V, $W_i(\mathfrak{B})$ — i-мерный характеристический класс Штифеля—Уитни расслоения $\mathfrak{B}$, $W^{n-i}(\mathfrak{B})$ — двойственный класс гомологий. $P_{4k}(\mathfrak{B})$ — характеристический класс Понтрягина расслоения $\mathfrak{B}$ (классы $W_i(\mathfrak{B})$ рассматриваются как классы когомологий mod 2, классы $P_{4k}(\mathfrak{B})$ — как целочисленные классы когомологий). В работе выясняется, в каких случаях класс гомологий $W^{n-i}(\mathfrak{B})$ можно реализовать подмногообразием.

Указываются предложения такого типа: если класс $W^{n-2i}(\mathfrak{B})$ может быть реализован подмногообразием, то класс $(W_{2i+1}(\mathfrak{B}))^2$ принадлежит к идеалу, порожденному классом $W_{2i}(\mathfrak{B})$. Даются также некоторые достаточные условия реализуемости классов $W^{n-i}(\mathfrak{B})$ подмногообразиями. В частности, показывается, что в случае, когда V-шестимерное ориентируемое многообразие, класс $W^4(\mathfrak{B})$ всегда реализуем.

Как известно, классифицирующее пространство группы вращений $SO(m)$ в размерностях $\leqslant n$ может быть реализовано как грассманово многообразие $G_{m,N}$, где N достаточно велико. Класс гомологий, двойственный характеристическому классу Штифеля—Уитни универсального косого произведения с базой $G_{m,N}$, может быть реализован как алгебраическое многообразие (с особенностями), относящееся к числу так называемых многообразий Шуберта. В дальнейшем это алгебраическое многообразие называется просто многообразием Шуберта. Класс $W^{n-i}(\mathfrak{B})$ может быть построен как класс гомологий прообраза многообразия Шуберта при характеристическом отображении многообразия V в $G_{m,N}$ (предполагается, что характеристическое отображение дифференцируемо и в некотором смысле регулярно по отношению к многообразию Шуберта). Прообраз многообразия Шуберта будет, вообще говоря, псевдомногообразием. Указываются некоторые условия для того, чтобы таким путем можно было получить реализацию класса $W^{n-i}(\mathfrak{B})$ подмногообразием. Отметим следующие предложения. Для того чтобы класс $W^{n-2j-1}(\mathfrak{B})$ можно было реализовать подмногообразием, являющимся прообразом многообразия Шуберта, необходимо выполнение условия $P_{4(j+1)}(\mathfrak{B}) = 0$, $W_{2(j+1)-1}(\mathfrak{B})W_{2(j+1)+1}(\mathfrak{B}) = (W_{2(j+1)}(\mathfrak{B}))^2$. Если $n = 4(j-1)$ и $P_{4(j+1)}(\mathfrak{B}) = 0$, то класс $W^{n-2j-1}(\mathfrak{B})$ можно реализовать подмногообразием, являющимся прообразом многообразия Шуберта.

Исследуется также вопрос о реализации классов $W^{n-i}(\mathfrak{B})$ подмногообразиями в некоторых специальных многообразиях.

А. С. Шварц

2787. К теореме о накрывающей гомотопии. Дервент (On the covering homotopy theorem. Derwent J. E.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wet., 1959, **A62**, № 3, 275—279 (англ.)

Хюбш (РЖМат, 1956, 7235) обобщил теорему о накрывающей гомотопии (Стинрод, Топология косых произведений, М., 1953, стр. 63) на случай, когда база отображаемого косого произведения паракомпактна. Автор дает более простое доказательство этого результата Хюбша. Упрощение доказательства достигнуто за счет использования более глубоких свойств паракомпактных пространств.

А. С. Шварц

2788. Гладкие гомеоморфизмы двумерной сферы. Смейл (Diffeomorphisms of the 2-sphere. Smale Stephen), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, **10**, № 4, 621—626 (англ.)

Теорема А. Естественное вложение группы $SO(3)$ вращений двумерной сферы S^2 в пространство сохраняющих ориентацию гладких гомеоморфизмов сферы S^2 является гомотопической эквивалентностью.

Теорема В. Пространство гладких гомеоморфизмов квадрата, тождественных в некоторой окрестности границы квадрата, можно стянуть по себе в точку.

Гомеоморфизм называется гладким, если он и обратный к нему гомеоморфизм бесконечно дифференцируемы (иначе говоря, имеют класс $C\infty$). Пространства гладких гомеоморфизмов снабжаются C^r-топологией, $1 \leqslant r \leqslant \infty$.

Аналоги доказанных в работе теорем для пространств гомеоморфизмов были известны ранее. Однако топология пространств гладких гомеоморфизмов, как показывает известный пример Милнора (РЖМат, 1957, 6389), может отличаться от топологии пространств гомеоморфизмов.

А. С. Шварц

2789. О теории вычетов. Норге (Sur la théorie des résidus. Norguet François), C. r. Acad. sci., 1959, **248**, № 14, 2057—2059 (франц.)

Пусть X — локально бикомпактное топологическое пространство, S — его замкнутое подмножество. Предположим, что S и $X \setminus S$ — паракомпактные многообразия размерностей соответственно m и n.

Обозначим через $\partial: \overline{H}^{p-1}(S) \to \overline{H}^p(X \setminus S)$ пограничный гомоморфизм, через r гомоморфизм $H^{n-p}(X \setminus S) \to H^{m-p+1}(S)$, сопряженный гомоморфизму ∂ при двойственности между группами $\overline{H}^{p-1}(S)$ и $H^{m-p+1}(S)$, $\overline{H}^p(X \setminus S)$ и $H^{n-p}(X \setminus S)$ (здесь $H^p(Y)$ ($\overline{H}^p(Y)$) — группа когомологий (когомологий с компактными носителями) пространства Y с коэффициентами в поле комплексных чисел). Если $x \in H^{n-p}(X \setminus S)$, то автор называет элемент $r(x) \in H^{m-p+1}(S)$ вычетом элемента x.

В случае, когда X является многообразием класса $C\infty$, а S — регулярно вложенным подмногообразием класса $C\infty$, указывается другая конструкция гомоморфизма r.

Для случая, когда X — комплексно аналитическое многообразие, а S — его комплексно аналитическое подмногообразие на единицу меньшей комплексной размерности, устанавливается связь между гомоморфизмом r

и определенным Лере (C. r. Acad. sci., Paris, 1958, 247, стр. 2253; 1959, 248, стр. 22) понятием вычета замкнутой дифференциальной формы, полумероморфной (semi-méromorphe) на X и имеющей S полярным множеством.

Указываются еще некоторые теоремы о гомоморфизме r.

А. С. Шварц

2790. О геодезических дугах на римановых многообразиях. Шварц А. С., Успехи матем. наук, 1958, **13**, № 6, 181—184

Теорема. В замкнутом римановом многообразии с конечной фундаментальной группой любые две точки можно соединить бесконечной последовательностью геодезических дуг, длины которых монотонно возрастают не быстрее, чем в арифметической прогрессии. Эта теорема обобщает результат Люстерника, установленный им лишь для риманова многообразия, гомеоморфного сфере (Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1947, **19**).

В. А. Ефремович

Примечание редакции. Как сообщил автор, основная теорема верна для любого замкнутого риманова многообразия.

2791. Гомологии и кольцоиды. I. Хилтон, Ледерман (Homology and ringoids. I. Hilton P. J., Ledermann W.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1958, **54**, № 2, 152—167 (англ.)

Кольцоидом авторы называют множество, в котором для некоторых пар элементов определены их сумма и произведение, удовлетворяющие всем аксиомам кольца (каждый раз, когда эти аксиомы имеют смысл). Кольцоидом является, например, совокупность всех гомоморфизмов некоторой категории модулей. Авторы выделяют некоторый класс кольцоидов, которые они называют гомологическими кольцоидами. К этому классу принадлежат, в частности, все интересные кольцоиды, возникающие в гомологической алгебре. В гомологических кольцоидах можно определить все основные понятия алгебраической теории гомологий (такие, как „цепной комплекс" и его „группы гомологий"). Оставляя построение общей теории гомологических кольцоидов до следующих публикаций, авторы рассматривают некоторый специальный кольцоид $\mathfrak{M}$, играющий основную роль в теории абелевых групп с конечным числом образующих.

Пусть в некоторой абелевой группе с конечным числом образующих выбрана система образующих и система определяющих соотношений. Тогда, выражая определяющие соотношения через систему образующих, получим некоторую целочисленную, регулярную слева (т. е. имеющую линейно независимые строки) матрицу. Если двум группам сопоставлены этим способом матрицы A и B, то каждый гомоморфизм этих групп будет описываться парой матриц S и T, удовлетворяющих соотношению $AT=SB$. При этом пара S, T и пара S', T' тогда и только тогда описывает один и тот же гомоморфизм групп, когда существует такая целочисленная матрица X, что $T'=T+XB$, $S'=S+AX$. Тем самым мы приходим к некоторой категории M, объектами которой являются целочисленные регулярные слева матрицы, а отображениями — классы четверок (A, T, S, B) целочисленных матриц, удовлетворяющих соотношению $AT=SB$. Произведение (композиция) этих отображений определяется формулой

$$(A, T, S, B)\,(B, V, U, C) = (A, TV, SU, C).$$

Суммой отображений (A, S, T, B) и (A, S', T', B) называется отображение $(A, S+S', T+T', B)$. Относительно этих операций сложения и умножения множество $\mathfrak{M}$ всех отображений категории M является гомологическим кольцоидом. Авторы подробно изучают этот кольцоид и, в частности, указывают алгорифм разложения каждого отображения из $\mathfrak{M}$ в композицию мономорфизма, изоморфизма и эпиморфизма.

М. М. Постников

2792. Когомологии с неабелевыми коэффициентами и теорема ван Кампена. Олум (Non-abelian cohomology and van Kampen's theorem. Olum Paul), Ann. Math., 1958, **68**, № 3, 658—668 (англ.)

Показано, что когомологии с неабелевыми коэффициентами удовлетворяют (соответствующим образом истолкованным) аксиомам Эйленберга — Стинрода. Далее показано, что для этих когомологий имеет место аналог аддиционной теоремы (автор называет эту теорему теоремой Майера—Вьеториса). Легким следствием аддиционной теоремы является известная теорема ван Кампена о фундаментальной группе объединения двух пространств. Автор не отмечает, что когомологии с неабелевыми коэффициентами были впервые введены Робинсом (см., например, заметку референта в Докл. АН СССР, 195, **79**, 573—576).

М. М. Постников

2793. Скрещенные ранги и эйлеровы характеристики. Хеллер (Twisted ranks and Euler characteristics. Heller Alex), Illinois J. Math., 1957, **1**, № 4, 562—564 (англ.)

Пусть K — абелева категория („точная" категория в смысле Буксбаума). K' — абелева категория, объектами которой являются последовательности $A = \{\ldots, A_{-1}, A_0, A_1, \ldots\}$ объектов из K такие, что $A_i = 0$, за исключением конечного множества индексов i. Абелева категория dK конечных комплексов в K имеет в качестве объектов пары (A, d_1), где A — объект из K' и $d_1 : A \to A$ — отображение степени -1 с нулевым квадратом: $d_1^2 = 0$. Функция ρ на объектах из K со значениями в аддитивной группе называется рангом на K, если $\rho A = \rho A' + \rho A''$ для всякой точной последовательности $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$. Функция $\varkappa_\rho$ на объектах из K' определяется соотношением $\varkappa_\rho A = \sum_i (-1)^i \rho A_i$. Относительно подкатегории отображений четной степени в K' $\varkappa_\rho$ снова является рангом. Доказано, что $\varkappa_\rho A = \varkappa_\rho H(A, d)$. Если $\rho X = 0$ для всех проективных X из K, то ρ называется скрещенным рангом на K. Понятие периодического ковариантного аддитивного функтора $T : K \to L$ (K и L — абелевы категории) приводит к конструктивному определению скрещенного ранга на K, а теорема Артина—Тейта о периодичности в гомологиях конечной группы (РЖМат, 1956, 6427К) позволяет перенести ранее полученный результат автора (РЖМат, 1956, 283) на комплекс с более общей группой операторов.

А. И. Кострикин

2794. Заметка об одной теореме Армана Бореля. Земан (A note on a theorem of Armand Borel. Zeeman E. C.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1958, **54**, № 3, 396—398 (англ.)

Основная теорема 13.1 диссертации Бореля (РЖМат, 1953, 127) содержит два утверждения (a) и (b) о канонической спектральной алгебре E, удовлетворяющей некоторым условиям. Автор реферируемой заметки, предполагая верным утверждение (a) и отображая надлежащим образом построенную спектральную алгебру в E, дает простое доказательство утверждения (b). При этом находит применение теорема сравнения для спектральных последовательностей (РЖМат, 1958, 1006), согласно которой рассматриваемое отображение оказывается изоморфизмом. Автор отмечает, что используемая здесь техника продолжает оставаться действенной во всех тех случаях, когда в доказательстве нуждается лишь утверждение об единственности какого-либо свойства спектральных последовательностей. Это замечание иллюстрируется доказательством теоремы, содержащейся в диссертации Бореля под номером 16.1.

А. И. Кострикин

2795. О кольце когомологий конечной p-группы. Голод Е., Докл. АН СССР, 1959, **125**, № 4, 703—706

Доказаны следующие утверждения:

Теорема 1. Кольца когомологий $H(G, Z)$ и $H(G, Z_{p^\alpha})$ имеют конечное число образующих.

Теорема 2. Спектральная последовательность Хокшилда — Серра для (G, K, Z_p) стабилизируется, т. е. для достаточно большого r $E_r = E_{r+1} = \ldots = E_\infty$. Здесь G — конечная p-группа, K — циклический нормальный делитель, лежащий в центре группы G, Z — кольцо целых чисел, Z_{p^α} — кольцо вычетов по модулю p^α ($\alpha > 0$). Группа G действует как группа операторов в кольцах Z и Z_{p^α} тождественным образом. Приводится также доказательство утверждения, сообщенного автору И. Р. Шафаревичем: произвольный модуль конечного типа над кольцом многочленов от конечного числа переменных имеет рациональную функцию Пуанкаре. Отсюда и из теоремы 1 следует, что функция Пуанкаре $R_G(t)$ алгебры $H(G, Z_p)$ рациональная, со знаменателем $\prod (1 - t^{r_i})$, где r_i — размерности четномерных образующих алгебры $H(G, Z_p)$. Получен, следовательно, положительный ответ на вопрос, поставленный И. Р. Шафаревичем на III Всесоюзном математическом съезде. В более широкой своей постановке (РЖМат, 1958, 7522) он остается пока открытым.

А. И. Кострикин

2796. Об алгебрах когомологий некоторых классифицирующих пространств. Венков Б. Б., Докл. АН СССР, 1959, **127**, № 5, 943—944

Основным результатом является следующая теорема: Пусть G — замкнутая подгруппа полной линейной группы $X = GL(n, C)$. Если группы $H^i(B_G, Z_p)$ для $0 \leqslant i \leqslant (2n)^2$ имеют конечный тип, то алгебра $H^*(B_G, Z_p)$ имеет конечное число образующих (B_G означает классифицирующее пространство группы G). Доказательство основывается на рассмотрении двух спектральных последовательностей, связанных с парой (K, G), где K — связная группа Ли, а G — ее замкнутая подгруппа. Последовательность (I) — это спектральная последовательность Лере расслоения $(K, K/G, G)$; последовательность (II) имеет в качестве второго члена $H^*(B_G, H^*(K, Z_p))$ и сходится к группе, ассоциированной с $H^*(K/G, Z_p)$.

Из основной теоремы вытекает ряд важных следствий: для произвольной компактной группы Ли G алгебра $H^*(B_G, Z_p)$ имеет конечное число образующих; если G — дискретная подгруппа полной линейной группы $GL(n, C)$ и группы $H^i(G, Z_p)$ имеют конечный тип для $0 \leqslant i \leqslant (2n)^2$ (в частности, если G — любая конечная группа), то алгебра $H^*(G, Z_p)$ имеет конечное число образующих. Наконец, из рассмотрения спектральной последовательности (I) получается следующий результат: ряд Пуанкаре для алгебры $H^*(B_G, Z_p)$ есть рациональная функция со знаменателем $\prod_k (1 - t^k)^{\alpha_k}$, где $\sum_k \alpha_k \leqslant n$.

Е. С. Голод

2797 Д. Кольца гомологий незамкнутых множеств. Антоновский М. Я. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Ин-т матем. АН УзССР, Ташкент, 1959

См. также: 2740, 2819, 2823, 3440.

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Редакторы *С. М. Никольский, П. С. Новиков, С. И. Адян, А. А. Конюшков*

2798. О переходе к пределу. Маркус (Despre trecerea la limită. Marcus S.), Gaz. mat. şi fiz., 1959, **A11**, № 1, 6—17 (рум.; рез. франц., русск.)

При помощи понятия фильтра излагается единый способ рассмотрения различных используемых в анализе процессов перехода к пределу, начиная от предела последовательности и кончая полным изменением и интегралом. Резюме автора

2799. О компактных мерах. Сымбоан (Asupra măsurilor compacte. Sîmboan G.), Comun. Acad. RPR, 1959, **9**, № 2, 105—110 (рум.; рез. русск., франц.)

Используя понятие компактной меры, введенное Марчевским (РЖМат, 1954, 4772), автор приводит несколько теорем о разложении измеримых множеств и об измеримых функциях. По резюме автора

2800. Замечания к речи Ф. Рисса при вступлении на пост ректора Сегедского университета. Богнар (Megjegyzések Riesz Frigyes szegedi rektori székfoglaló beszédéhez. Bognár Mátyás), Mat. lapok, 1958, **9**, № 3-4, 232—259 (венг.; рез. русск., нем.)

Пусть $H(M) = [M] \setminus \langle M \rangle$ — граница множества M и $L^*(H)$ — внешняя мера множества H. Автор доказывает следующую теорему: Пусть $w > 0$, $z \geqslant 0$ и пусть $\{\ldots, N_\alpha, \ldots\}$ — система множеств на плоскости такая, что диаметры компонент множеств N_α не меньше w и для каждой конечной подсистемы $N_{\alpha_1}, \ldots, N_{\alpha_i}$ имеет место соотношение $L^*(H \cap (\bigcup_{i=1} N_{\alpha_i})) \leqslant z$. Тогда $L^*(H \cap (\bigcup_\alpha N_\alpha)) \leqslant z$. Резюме автора

2801. К задаче о плоской мере. Крофт (Note on a plane measure problem. Croft H. T.), Mathematika, 1958, **5**, № 10, 125—127 (англ.)

Пусть в плоскости задан круг C радиуса 1. Обозначим через m линейную лебегову меру, а через m^2 — двумерную лебегову меру. Пусть $\mathbf{A}$ — система всех тех множеств $A \subset C$, для которых $m(\lambda \cap A) \leqslant 2l$, где λ — произвольная прямая; при этом $0 < l < 1$. Автор решает задачу о нахождении $\sup\{m^2A : A \in \mathbf{A}\}$. Показывается, что $\sup\{m^2A : A \in \mathbf{A}\} = 2\arcsin l + 2l\sqrt{1 - l^2}$ и что не существует $\max\{m^2A : A \in \mathbf{A}\}$. В доказательстве леммы следует писать правильно

$$m(\lambda \cap A) = 2\sum_{j=1}^{n} \left\{\sqrt{R_j^2 - p^2} - \sqrt{r_j^2 - p^2}\right\}.$$

L. Mišík

2802. Регулярные меры и функции Бэра. Зинк (On regular measures and Baire functions. Zink Robert E.), Monatsh. Math., 1959, **63**, № 1, 19—23 (англ.)

Ранее (РЖМат, 1958, 2810) автор доказал следующее: Пусть X — топологическое пространство и (X, S, μ) — пространство с мерой. Пусть μ внешне регулярна, $f \geqslant 0$ есть S-измеримая функция, $v(E) = \int_E f d\mu$ для $E \in S$. Для того чтобы и мера v была внешне регулярной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия: 1) если f интегрируема на E, то существует такая последовательность $\{U_n\}_{n=1}^\infty$ открытых множеств, что $E \subset \bigcup_{n=1}^\infty U_n$ и f интегрируема на U_n ($n = 1, 2, \ldots$); 2) если f интегрируема на E и ε и δ — произвольные положительные числа, то существует такое открытое множество U, содержащее $E \cap \{x : f(x) = 0\}$, что $\mu(\{x : f(x) > \delta\} \cap U) < \varepsilon$.

В реферируемой работе показывается, что иногда необходимым и достаточным условием является условие 1). Это так, когда f является полунепрерывной сверху неотрицательной S-измеримой функцией (теорема 1), а также когда S представляет собой σ-кольцо борелевских множеств в X и f является неотрицательной S-измеримой функцией Бэра (теорема 6). В конце работы приведены два примера. В первом указана S-измеримая функция $f \geqslant 0$ первого класса Бэра, которая показывает, что условие 1) не является достаточным для того, чтобы мера v была внешне регулярной, когда S не есть σ-кольцо борелевских множеств в X. Второй пример показывает, что измеримая по Борелю функция Бэра f не должна удовлетворять условию 2), если она не удовлетворяет условию 1). Приведенная в примере функция f принадлежит первому классу Бэра. Функция f не может быть полунепрерывной сверху, как это вытекает из доказательства теоремы 1. L. Mišík

2803. Теория интегрирования. Ревю (Théorie de l'intégration. Revuz A.), Bull. Assoc. professeurs math. enseign. public, 1959, 38, № 196, 95—106 (франц.)

В первом параграфе работы излагается так называемый принцип Эвдокса (Eudox): Пусть E — множество, M — кольцо подмножеств $A \subset E$, m — конечная неотрицательная аддитивная функция на M; пусть $\overline{M}$ — система всех $A \subset E$, для которых, во-первых, существует $\alpha \in M$ такое, что $A \subset \alpha$, и, во-вторых, $\sup m\beta = \inf m\alpha$, где $\beta \in M$, $\beta \subset A$, $\alpha \in M$, $A \subset \alpha$; для $A \in \overline{M}$ пусть будет $\overline{m}A = \sup m\beta = \inf m\alpha$. О множествах системы $\overline{M}$ говорят, что они допускают квадратуру (M, m). Доказывается теорема: $\overline{M}$ является кольцом, $M \subset \overline{M}$, $\overline{m}$ — конечной неотрицательной аддитивной функцией, $\overline{m} = m$ на M. Если, в частности, E представляет собой двумерное декартово пространство E_2, M — множество всех объединений $\bigcup_{i=1}^{n} R_i$ непересекающихся „прямоугольников", $m(\bigcup_{i=1}^{n} R_i) = \sum_{i=1}^{n} mR_i$, причем mR_i — произведение „размеров", то $\overline{m}$ есть мера Жордана в плоскости; при этом под „прямоугольником" разумеется каждое множество $A \subset E_2$, для которого при подходящих рациональных a, b, c, d справедливо $(a, b, c, d) \subset A \subset \langle a, b, c, d\rangle$. Аналогично поступает автор в случае неположительной функции m.

Во втором параграфе излагается абстрактное обобщение интеграла Римана: Пусть X — множество, M — кольцо подмножеств $A \subset X$, m — конечная неотрицательная аддитивная функция на M; для конечных неотрицательных k_1, k_2 и для $A \subset M$ пусть будет $(A, k_1, k_2) = \{(x, y);\ x \in A,\ k_1 < y < k_2\}$, $m(A, k_1, k_2) = (k_2 - k_1)\, mA$. Далее, пусть M^+ означает множество всех конечных объединений непересекающихся множеств (A, k_1, k_2) и m^+ — функцию, определенную на M^+ как сумма соответствующих $m(A, k_1, k_2)$; наконец, пусть f — ограниченная неотрицательная функция на X, равная нулю всюду, за исключением некоторого $Af \in M$. При этих условиях говорят, что f имеет интеграл (M, m), если множество $A^+(f) = \{(x, y);\ x \in Af,\ 0 < y < f(x)\}$ допускает квадратуру (M^+, m^+), и обозначают $\int_X f dm = \overline{m}^+ A^+(f)$. Заменяя неотрицательные k_1, k_2 неположительными, неравенство $<$ обратным $>$ и неотрицательную функцию f неположительной, получаем интеграл $\int_X f dm = \overline{m}^- A^-(f)$ и, наконец, интеграл $\int_X f dm = \int_X f^+ dm + \int_X f^- dm$, где $f^+ = \sup(f, 0)$, $f^- = \inf(f, 0)$.

Чтобы вывести обычные свойства обобщенного таким образом интеграла Римана, автор вводит множество P всех конечных разбиений P множества Af на множества $A_i \in M$, частично упорядоченное следующим образом: $P_1 > P_2 <=>$ каждое множество $A_i \in P_1$ является частью некоторого множества $A_j \in P_2$; к двум любым P_1, P_2 существует общее уплотнение $\sup(A_1, A_2) > P_1, P_2$, образованное всеми пересечениями $A_i \cap A_j$, где $A_i \in P_1$, $A_j \in P_2$. Затем вводятся верхние и нижние суммы Римана $\sum(P) = \sum_{i=1}^{n} \sup\{f(x);\ x \in A_i\}\, mA_i$ и $\sigma(P)$ и полагается $\int_X f dm = \inf\{\sum(P);\ P \in \boldsymbol{P}\} = \sup\{\sigma(P);\ P \in \boldsymbol{P}\}$. Необходимое и достаточное условие для того, чтобы f имела интеграл, имеет классический вид: для любого $\varepsilon > 0$ существует P такое, что $\sum(P) - \sigma(P) < \varepsilon$, или же $\sum_{A_i \in P} \Omega[f, A_i]\, mA_i < \varepsilon$, где $\Omega[f, A_i]$ означает колебание функции f на A_i.

Из доказываемых автором теорем о множестве $J(X, M, m)$ всех f, имеющих интеграл (M, m), приведем следующие: J нельзя расширить по принципу Эвдокса: $J(X, \overline{M}, \overline{m}) = J(X, M, m)$. Если ограничимся только частью J_{A_0} множества J, в которой имеются все те функции f, для которых Af является частью фиксированного множества $A_0 \in M$, то $\|f\| = \sup\{|f(x)|;\ x \in A_0\}$ есть норма в J_{A_0}, при которой J_{A_0} является полным пространством; если $\{f_n\}$ — фундаментальная последовательность в J_{A_0}, то $\int_X \lim f_n dm = \lim \int_X f_n dm$.

Выше не было речи о топологии в X и, следовательно, о том, имеют ли непрерывные функции интеграл. Автор приводит очень общие условия, при выполнении которых непрерывные функции имеют интеграл (M, m), и объясняет, почему их нельзя „разумно" обобщить. Это следующие условия: Помимо условий, содержащихся в определении интеграла, X, M, f удовлетворяют следующим условиям: X локально компактно; для $x \in X$ те множества $A \subset M$, которые содержат x, образуют полную систему окрестностей точки x; f непрерывна, и замыкание множества $\{x;\ x \in X,\ f(x) \neq 0\}$ компактно.

В работе имеются опечатки. M. Neubauer

2804. Представление функций двух переменных сингулярным двойным интегралом. Габисония О., Тбилисис университетис шромеби, Тр. Тбилисск. ун-та, 1957, 64, 387—397 (рез. груз.)

Рассматривается вопрос о представлении суммируемой функции двух переменных в так называемых D-точках и L-точках сингулярным двойным интегралом. Доказываются две теоремы, одна из которых (теорема 2) такова: Если для любых m и n ядро $\Phi_{mn}(x, y; \zeta, \eta)$ имеет такую мажоранту $\Psi_{mn}(x, y; \zeta, \eta)$, что: 1) $\int_a^b \int_c^d \Psi_{mn}(x, y; \zeta, \eta) d\zeta d\eta < K(x, y)$, 2) $\lim_{m, n \to \infty} \int_a^b \Psi_{mn}(x, y; \zeta, \eta)\, d\zeta = 0$ при $\eta \neq y$, $\lim_{m, n \to \infty} \int_c^d \Psi_{mn}(x, y; \zeta, \eta)\, d\eta = 0$ при $\zeta \neq x$, то для любой суммируемой функции $f(x, y)$

$$\lim_{m, n \to \infty} \int_a^b \int_c^d f(\zeta, \eta)\, \Phi_{mn}(x, y; \zeta, \eta)\, d\zeta d\eta = f(x, y)$$

в каждой L-точке функции $f(x, y)$.

Точка (x, y) называется L-точкой $f(x, y)$, если

$$\lim_{h, k \to 0} \frac{1}{hk} \int_x^{x+h} \int_y^{y+k} |f(\zeta, \eta) - f(x, y)|\, d\zeta d\eta = 0,$$

$$\sup_{0 < h < b-a} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \int_c^d |f(\zeta, \eta) - f(x, y)|\, d\zeta d\eta = M_1(x, y) < \infty,$$

$$\sup_{0<k\leqslant d-c}\frac{1}{k}\int_a^b\int_y^{y+k}|f(\zeta,\eta)-f(x,y)|\,d\zeta d\eta=M_2(x,y)<\infty.$$

Теорема 3 относится к суммированию двойных рядов Фурье в L-точках. Если функция $f(x,y)$, суммируемая на $[-\pi,\pi;-\pi,\pi]$, является периодической функцией периода 2π относительно каждой из переменных и выполнено одно из условий:

1) $\Delta^2_{ii}\lambda_i\leqslant 0$, $\Delta^2_{kk}\mu_k\leqslant 0$, 2) $\{\lambda_i\}$, $\{\mu_k\}$ являются соответственно M_r- и M_s-последовательностями, то двойной ряд Фурье—Лебега функции $f(x,y)$ будет $R^{(r,s)}(\lambda,\mu)$-суммируемым к $f(x,y)$ в каждой L-точке функции $f(x,y)$. (В случае 2) результат следует из работы референта (РЖМат, 1958, 6614). *Реф.*).

Последовательность $\{\lambda_m\}$ называется M_r-последовательностью, если $m=O(\lambda_m)$, $m(\lambda_m-\lambda_{m-1})^r=O(\lambda_m^r)$ и $\Delta^2_{ii}\left(1-\frac{\lambda_i}{\lambda_m}\right)^r$ знакопостоянна при $0\leqslant i\leqslant m-2$ (r — данное число >0).

Двойной ряд Фурье-Лебега функции $f(x,y)$ называется $R^{(r,s)}(\lambda\mu)$-суммируемым в точке (x,y) к функции $f(x,y)$, если $\lim\limits_{m,n\to\infty}\sigma^{(r,s)}_{mn}(x,y;f)=f(x,y)$, где $\sigma^{(r,s)}_{mn}(x,y;f)=$

$$=\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{\lambda_i}{\lambda_m}\right)^r\left(1-\frac{\mu_k}{\mu_n}\right)^s\gamma_{i,k}\,A_{i,k}(x,y),\quad A_{i,k}(x,y)=$$

$$=a_{ik}\cos ix\cos ky+b_{ik}\sin ix\cos ky+c_{ik}\cos ix\sin ky+$$
$$+d_{ik}\sin ix\sin ky,$$

$$\gamma_{i,k}=\begin{cases}1/4, & \text{если } m=n=0,\\ 1/2, & \text{если } m=0,\ n>0, \text{ или } m>0,\ n=0,\\ 1, & \text{если } m>0,\ n>0,\end{cases}$$

причем a_{ik}, b_{ik}, c_{ik}, d_{ik} — коэффициенты Фурье функции $f(x,y)$. И. В. Матвеев

Примечание редакции. Теорема 2 есть распространение на двумерный случай достаточности условий теоремы Д. К. Фаддеева (Матем. сб., 1936, **1**, 351—368).

2805. Об интегрируемости по Стилтьесу. Цирилман Asupra integrabilităţii Stieltjes. Ţirilman Lucian), Comun. Acad. RPR, 1959, **9**, № 1, 17—21 (рум.; рез. русск., франц.)

Приводится критерий интегрируемости по Стилтьесу для пар функций, из которых по крайней мере одна строго возрастает. Основной результат (теорема 1): Пусть f — ограниченная и g — строго возрастающая функции, определенные на $[a,b]$, причем g принимает значения из отрезка $[\alpha,\beta]$. Для интегрируемости по Стилтьесу функции f относительно g на $[a,b]$ необходимо и достаточно, чтобы: 1) функции f и g не имели общих разрывов, 2) функция $U(t)=f[g^{-1}(t)]$ была интегрируемой по Риману на $[\alpha,\beta]$ (функция g^{-1} определена условием: $g^{-1}(t)=x$ при $t\in[g(x-0),g(x+0)]$).

Этот результат распространяется на обобщенный интеграл Стилтьеса (GS), рассмотренный Поллардом и др. Резюме автора

2806. Функция Гёце всюду непрерывна, но нигде не дифференцируема. Кантор (Geőcze Zoárd függvénye mindenütt folytonos, de sehol sem differenciálható. Kántor Sándor), Mat. lapok, 1957, **8**, № 3-4, 264—267 (венг.; рез. русск., нем.)

В 1905 г. Гёце была построена функция, в отношении которой им было доказано, что она в данном интервале непрерывна, но любая дуга ее графика неспрямляема. Автор доказывает, что функция Гёце всюду непрерывна, но нигде не дифференцируема. Резюме автора

2807. Замечание о функции Гёце. Часар (Megjegyzés Geőcze Zoárd függvényéhez. Császár Ákos), Mat. lapok, 1957, **8**, № 3-4, 268—271 (венг.; рез. русск., франц.)

Модификацией конструкции Гёце автор строит семейство непрерывных функций, которые при некотором выборе параметров нигде не дифференцируемы, а при другом выборе строго возрастают и имеют производную, равную нулю почти всюду. Резюме автора

2808. Об определении функции по ее производным числам. Суньер-Балагёр (Sobre la determinación de una función mediante sus números derivados. Sunyer Balaguer F.), Collect. math., 1958, **10**, № 3, 185—194 (исп.)

Доказываются теоремы, сформулированные автором ранее (РЖМат, 1958, 6588).

2809. Об обобщенной вариации. I. Муселяк, Орлич (On generalized variations (I). Musielak J., Orlicz W.), Studia math., 1959, **18**, № 1, 11—41 (англ.)

Пусть $M(u)$ есть непрерывная неубывающая функция, определенная для $u\geqslant 0$, и $M(u)\geqslant 0$. Применяются следующие условия относительно $M(u)$: 1) существуют такие числа $a>0$, $L>0$, что $M(u)<Lu$ для $0<u\leqslant a$; 2) $\lim\limits_{u\to 0}M(u)/u=0$; 3) $\lim\limits_{u\to\infty}M(u)/u=\infty$; 4) существуют $a>0$ и $\varkappa>0$ такие, что $M(2u)<\varkappa M(u)$ для $0<u\leqslant a$; 5) $M(u)$ — выпуклая функция. При условиях 2), 3) и 5) для функции $M(u)$ определяется дополнительная функция $N(v)$ по формуле

$$N(v)=\max_{u\geqslant 0}[uv-M(u)].$$

Пусть $x(t)$ есть комплексная функция, определенная на сегменте $[a,b]$. Вариация функции $x(t)$ на $[a,b]$ относительно функции $M(u)$ определяется по формуле

$$V_M(x)=\sup_H\sum_{k=1}^{m}M\{|x(t_k)-x(t_{k-1})|\},$$

где H есть разбиение $[a,b]$ точками $\{t_k\}$. Если $V_M(x)<\infty$, то $x(t)$ называется функцией с ограниченной M-вариацией. Обозначим через V_M класс функций с ограниченной M-вариацией, для которых $x(a)=0$, а через V^*_M — класс таких функций $x(t)$, для каждой из которых существует такое постоянное число k, что $kx(t)\in V_M$.

Доказаны следующие предложения:

I. $V_{M_1}\subset V_{M_2}$ тогда и только тогда, когда существуют числа $a>0$, $b>0$ такие, что $M_2(u)\leqslant bM_1(u)$ при $0<u\leqslant a$. II. Класс V_M является линейным тогда и только тогда, когда M удовлетворяет условию 4). III. Если $M(u)$ удовлетворяет условиям 4) или 5), то V^*_M будет полным пространством в смысле сходимости по M-вариации. IV. Каждая последовательность $x_n(t)\in V^*_M$, $n=1,2,\ldots$, ограниченная в смысле M-вариации, содержит подпоследовательность, сходящуюся к функции $x(t)\in V^*_M$ в каждой точке сегмента $[a,b]$.

Функция $x(t)$ называется абсолютно непрерывной на $[a,b]$ относительно $M(u)$, если для каждого $\varepsilon>0$ существует такое $\eta>0$, что из неравенства

$$\sum_{i=0}^{m}M(\beta_i-\alpha_i)<\eta,\quad(\alpha_k,\beta_k)(\alpha_l,\beta_l)=0,\ i\neq k,$$

вытекает неравенство

$$\sum_{i=0}^{m}M\{|x(\beta_i)-x(\alpha_i)|\}<\varepsilon.$$

Обозначим через AC_M класс абсолютно непрерывных функций относительно M, для которых $x(a)=0$, а через

AC^*_M — класс функций $x(t)$, для каждой из которых существует такое постоянное число $k>0$, что $kx(t)\in AC_M$. V. Если $M(u)$ удовлетворяет условиям 4) или 5), то AC^*_M есть полное пространство в смысле сходимости по M-вариации. VI. Если $M(u)$ удовлетворяет условиям 2) и 4) или 2) и 5), то AC^*_M будет сепарабельным пространством. VII. Пусть $M(u)$ удовлетворяет условиям 2) и 5). Тогда для любой периодической с периодом $b-a$ функции $x(t)\in AC^*_M$ соответствующая функция Стеклова

$$x_n(t)=n\int_t^{t+1/n}x(\tau)\,d\tau$$

стремится к функции $x(t)$ в смысле M-вариации.

Изучается сходимость сингулярного интеграла по M-вариации. Ниже будем предполагать, что $M(u)$ удовлетворяет только одному условию 5). Норму в пространстве V^*_M определяют как точную нижнюю грань чисел $k>0$, для которых $V_M(x/k)\leqslant 1$. Если $M(u)=u^p$, $p\geqslant 1$, то вышеуказанная норма $\|x\|$ имеет вид

$$\|x\|=\left[\sup_H\sum_{i=1}^m|x(t_i)-x(t_{i-1})|^p\right]^{1/p}.$$

Вышеопределенная норма в V^*_M удовлетворяет условиям B-нормы. Сходимость по норме влечет сходимость по M-вариации, а если $M(u)$ будет дополнительно удовлетворять условию 4), то оба вида сходимости эквивалентны. Далее изучаются интегралы Стилтьеса и общий вид линейных функционалов, определенных в пространстве AC_M. А. Г. Джваршейшвили

2810. О выпуклых множествах и функциях. Часар (Konvex halmazokról és függvényekről. Császár Ákos). Mat lapok, 1958, 9, № 3-4, 273—282 (венг.; рез. русск., франц.)

Дается следующее обобщение теорем Островского и Хукухара. Пусть K — открытое выпуклое подмножество евклидова пространства E^n, $f(x)$ — определенная на K выпуклая функция (т. е. $f\left(\frac{x'+x''}{2}\right)\leqslant\frac{f(x')+f(x'')}{2}$ для $x', x''\in K$). Предположим, что существуют измеримое множество положительной меры $E\subset K$ и измеримая на E функция $g(x)$ такие, что на E либо $f(x)\leqslant g(x)$, либо $g(x)\leqslant f(x)$. Тогда в первом случае $f(x)$ непрерывна на K, а во втором случае почти всюду на E имеет место неравенство $g(x)\leqslant\underline{f}(x)$; здесь $\underline{f}(x)=\lim\limits_{\delta\to 0+}\inf\{f(t);\ |t-x|<\delta\}$.

Доказательство основывается на следующей лемме. Пусть $C\subset E^n$ — такое множество, что из $x,\ y\in C$ следует $\frac{x+y}{2}\in C$. Если C содержит подмножество положительной меры, то множество внутренних точек множества C есть такое выпуклое открытое множество K, для которого $K\subset C\subset\bar{K}$.

Резюме автора

2811. Конструктивные характеристики компактных множеств в пространствах Банаха и ε-энтропия. Брудный Ю. А., Тиман А. Ф., Докл. АН СССР, 1959, 126, № 5, 927—930

Пусть F — сепарабельное банахово пространство, $X=\{x_1, x_2, \ldots\}$ — система линейно независимых элементов из F, образующая в нем замкнутую систему, L_n — подпространство, натянутое на элементы $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $W\subset F$ — ограниченное множество.

Введем обозначения: расстояние от точки $x\in F$ до L_n: $E(x, L_n)=\inf_{c_k}\|x-\sum_{k=1}^n c_k x_k\|$; отклонение W от $L_nE(W, L_n)=\sup_{x\in W}E(x, L_n)$; n-й поперечник или n-я ширина W:

$$\tau_n(W)=\inf_{L_n}E(W, L_n),$$

$$d_n(X)=\inf_{1\leqslant\nu\leqslant n}\frac{1}{\|x_\nu\|}\inf_{c_k}\|x_\nu-\sum_{\substack{k=1\\k\neq\nu}}^n c_k x_k\|;$$

$H_\varepsilon(W)$ — энтропия W, $\varepsilon_W(H)$ — функция, обратная к $H_\varepsilon(W)$.

В статье приводятся (без доказательства) следующие неравенства, оценивающие функции $H_\varepsilon(W)$ и $E(W, L_n)$ друг через друга:

I. Если $E(W, L_n)\leqslant\varepsilon$ и $M=\sup_{x\in W}\|x\|$, то $H_{4\varepsilon}(W)\leqslant(n+1)\lg\frac{4M}{\varepsilon}+(n+1)\lg\frac{n+2}{d_n}$.

II. $E(W, L_n)\leqslant 4\varepsilon_W(n+2)$.

Из неравенства I получаются следующие оценки для n-мерных поперечников в гильбертовом пространстве. Пусть M^β_k означает класс множеств W гильбертова пространства, для которых $\lg_k H_\varepsilon(W)\asymp\left(\lg\frac{1}{\varepsilon}\right)^\beta$; здесь $\lg_k$ — повторный логарифм порядка k, запись $g(\varepsilon)\asymp f(\varepsilon)$, $\varepsilon\to 0$, для положительных $g(\varepsilon)$ и $f(\varepsilon)$ означает, что $g=O(f)$, $f=O(g)$, $\varepsilon\to 0$.

1. Если $\beta>1$ и $W\in M^\beta_0$, то

$$\tau_n(W)\geqslant\rho^{\sqrt[\beta-1]{n}},\quad 0<\rho<1.$$

2. Если $\beta>1$ и $W\in M^\beta_1$, то

$$\tau_n(W)\geqslant\rho^{\sqrt[\beta]{\lg n}},\quad 0<\rho<1.$$

3. Если $0<\beta\leqslant 1$ и $W\in M^\beta_1$, то для больших n

$$\tau_n(W)\geqslant\varepsilon_W\left(Cn(\lg n)^{1/\beta}\right),\quad C>0.$$

4. Если $W\in M^3_k$ и $k\geqslant 2$, то

$$\tau_n(W)\geqslant\varepsilon_W(n^2).$$

Константы ρ и C не зависят от n.

Пусть $W^{r+\alpha}_s(K, L^{(s)}_p)$ означает класс 2π-периодических по каждому переменному функций $f(t_1, \ldots, t_s)$, ограниченных по норме $L^{(s)}_p$ константой K, для которых

$$\sup_k\sup_{|\delta|<h}\left\|\frac{\partial^r f(t_k+\delta)}{\partial t_k^r}-2\frac{\partial^r f(t_k+0)}{\partial t_k^r}+\frac{\partial^r f(t_k-\delta)}{\partial t_k^r}\right\|\leqslant h^\alpha,\quad 0<\alpha\leqslant 1,\qquad(1)$$

где $\varphi(t_k+\delta)$ означает $\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_{k-1}, t_k+\delta, t_{k+1}, \ldots, t_s)$; и $\Delta_\alpha(K, L^{(s)}_p)$ означает класс функций $f\in L^{(s)}_p$, ограниченных по норме $L^{(s)}_p$ константой K, для которых левая часть (1) при $r=0$ не превышает $|\lg h|^{-\alpha}$, $\alpha>0$. Приводятся следующие оценки введенных выше функций:

а) $\tau_n\left(\Delta_\alpha(K, L^{(1)}_2)\right)\geqslant\frac{C}{(\lg n)^\alpha}$, $C>0$;

б) $\lg H_\varepsilon\left(\Delta_\alpha(K, L^{(s)}_p)\right)\asymp\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/\alpha}$;

в) $C_1\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{s}{r+\alpha}} \leqslant H_\varepsilon\left(W_s^{r+\alpha}(K, L_p^{(s)})\right) \leqslant C_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{s}{r+\alpha}} \lg\frac{1}{\varepsilon}$,

$C_1, C_2 > 0$.

Оценки типа а) для других классов функций содержатся в работе А. Н. Колмогорова (Ann. Math., 1936, **37**, № 1); для класса $W_s^{r+\alpha}(K, L_\infty^{(s)})$ А. Н. Колмогоров (РЖМат, 1957, 3281) показал, что $H_\varepsilon\left(W_s^{r+\alpha}(K, L_\infty^{(s)})\right) \asymp \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{s}{r+\alpha}}$.

В. М. Тихомиров

2812. Граничные свойства некоторого класса функций. Лизоркин П. И., Докл. АН СССР, 1959, **126**, № 4, 703—706

Пусть G — плоская область с достаточно гладкой границей Г. На G рассматриваются функции $u(x, y)$, суммируемые в степени p внутри области G, для которых

$$D_{p,\sigma}(u, G) = \iint_G \sigma(x, y)|\operatorname{grad} u|^p dxdy < \infty,$$

где $\sigma(x, y)$ — положительная ограниченная и измеримая функция, удовлетворяющая в области G неравенствам

$$c_1\rho^\alpha \leqslant \sigma(x, y) \leqslant c_2\rho^\alpha$$

(ρ—расстояние точки (x, y) до Г по нормали). При $1<p<\infty$, $0 \leqslant \alpha < p-1$ устанавливается, что функция $u(x, y)$ имеет граничные значения $u(x, y)|_\Gamma = \varphi(s)$ в смысле сходимости почти всюду по нормалям, суммируемые со степенью p.

Основная теорема. Для того чтобы функция $\varphi(s)$ была граничным значением функции $u(x, y)$, необходимо и достаточно, чтобы она принадлежала к L_p на Г и удовлетворяла неравенству

$$\int_\Gamma\int_\Gamma \frac{|\varphi(t)-\varphi(\tau)|^p}{|t-\tau|^{p-\alpha}} dtd\tau < \infty.$$

Этот результат при $\alpha = 0$ совпадает с соответствующим результатом Гальярдо (Gagliardo E., Rend. Seminar mat. Univ. Padova, 1957, **27**, 284), при $\alpha \neq 0$ обобщает соответствующие результаты Л. Д. Кудрявцева (РЖМат, 1959, 2676) и референта (РЖМат, 1959, 3664).

А. А. Вашарин

2813. Обобщение критерия компактности Арцела. Добреску, Сэлэджан (O extindere a criteriului de compacitate al lui Arzelà. Dobrescu Eugen, Sălăgean Ioan), Comun. Acad. RPR, 1959, **9**, № 3, 215—221 (рум.; рез. русск., франц.)

Исследуется класс разрывных функций, названных Бёгелем (Bögel K., J. reine und angew. Math., 1934, 170, 197) гиперболически непрерывными (их определение приведено в РЖМат, 1957, 1274).

Распространением критерия Арцела на гиперболически непрерывные функции является следующая теорема (теорема VIII): Если множество функций $\{f(x, y)\}$, определенных в замкнутом двумерном промежутке D, удовлетворяет условиям: 1) функции равномерно ограничены и равностепенно гиперболически непрерывны в D, 2) каждое из множеств функций одной переменной $\{f(x, b)\}$ и $\{f(a, y)\}$, где (a, b) — фиксированная точка промежутка D, компактно, то множество $\{f\}$ компактно в D.

По резюме авторов

2814. Безусловная суммируемость функциональных рядов. Олевский А. М., Докл. АН СССР, 1959, **125**, № 2, 269—272

Работа является продолжением исследований Орлича (Orlicz W., Bull. Acad. polon., 1927, 81—115, 117—125) и референта (РЖМат, 1959, 7904), относящихся к безусловной суммируемости рядов. Без доказательства формулируется ряд теорем из указанной области. Приведем некоторые утверждения.

И. И. Волков впервые отметил, что существует регулярный метод суммирования T такой, что расходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^\infty 1 \qquad (1)$$

T-суммируем при любом порядке следования членов в ряде (1). В связи с этим фактом приводится в некотором смысле обратное утверждение:

Теорема 1. Пусть $\sum_{n=1}^\infty a_n(x)$ — безусловно T-суммируемый почти всюду на E ряд, члены которого измеримые почти всюду конечные функции. Тогда $a_n(x) = f(x) + \alpha_n(x)$, где ряд $\sum_{n=1}^\infty \alpha_n(x)$ безусловно сходится почти всюду на E, а $f(x)$ — фиксированная, измеримая и почти всюду конечная функция. При этом, если регулярный метод Тёплица T суммирует ряд (1), то функция $f(x)$ может быть произвольной; если же метод T не суммирует ряд (1), то $f(x) = 0$ почти всюду на E.

Автор отмечает, что если члены ряда — константы, то аналогичный результат ранее получен В. Ф. Гапошкиным и автором.

Далее, в указанной выше работе референта был построен расходящийся всюду на [0,1] ортогональный ряд, который при любом порядке членов всюду на [0,1] суммируем некоторым методом T. Автор усиливает этот результат. Именно, справедлива

Теорема 3. Пусть c_n — произвольные числа, удовлетворяющие условию $\sum_{n=1}^\infty c_n^{-2} < \infty$ (если $c_{n_0} = 0$, то полагается $c_{n_0}^{-2} = 1$). Тогда существует расходящийся всюду на [0,1] ортогональный ряд

$$\sum_{n=1}^\infty c_n \varphi_n(x), \qquad (2)$$

который безусловно суммируем всюду на [0,1].

Затем автор усиливает результаты Орлича и референта, относящиеся к вопросу, когда из безусловной суммируемости ортогонального ряда вытекает его безусловная сходимость.

В указанной выше работе референта были найдены необходимые и достаточные условия, когда из безусловной суммируемости ортогонального ряда по ограниченной в совокупности (или полной) системе следует безусловная сходимость. Автор утверждает, что эти условия всегда выполнены. Например, формулируется

Теорема 6. Всякий безусловно суммируемый почти всюду на E ряд вида (2) по полной системе безусловно сходится почти всюду на E и $\lim_{n\to\infty} |c_n| = 0$.

В конце работы приводятся некоторые утверждения, относящиеся к безусловно суммируемым рядам на множестве положительной меры. Из этих результатов, как частный случай, вытекает одно утверждение референта, относящееся к тригонометрическим рядам.

Примечание референта. В приведенной формулировке теорема 6 неточна. Именно, если $mE = 0$, то очевидно, что из безусловной суммируемости почти всюду на E всегда вытекает безусловная сходимость почти всюду на E, хотя условие $\lim_{n\to\infty} |c_n| = 0$ может и не выполняться. Утверждение автора будет справедливым, если еще предположить, что $mE > 0$. П. Л. Ульянов

2815. О сходимости почти всюду ортогональных рядов при любом порядке его членов. Алексич (Über die Konvergenz fast überall der Orthogonalreihen bei jeder Anordnung ihrer Glieder. Alexits G.), Acta scient. math., 1958, **19**, № 3-4, 158—161 (нем.)

На основании результата Орлича обобщается „внутренний" критерий Д. Е. Меньшова, относящийся к безусловной сходимости почти всюду ортогональных рядов.

Пусть $a_n \downarrow 0$. Доказывается:

Теорема 1. Если ортогональный на [0,1] ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} c_m \varphi_m(x) \qquad (1)$$

таков, что, расположив отличные от нуля числа $|c_m|$ в порядке невозрастания (положим $|c_{m_n}|$), имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_{m_n}|^{2-a_n} < \infty, \qquad (2)$$

то ряд (1) при любом порядке членов сходится почти всюду на [0,1], как только

$$a_n \geqslant (4+\varepsilon)\,\frac{\log_2 \log_2 n}{\log_2 n} \quad (n \geqslant n_0) \qquad (3)$$

для некоторого $\varepsilon > 0$.

Далее показывается, что теорема 1 становится неверной, если в (3) множитель $4+\varepsilon$ заменить на множитель $4-\varepsilon$. Точнее, справедлива

Теорема 2. Для каждого $\varepsilon > 0$ и

$$a_n < (4-\varepsilon)\,\frac{\log_2 \log_2 n}{\log_2 n}$$

существует расходящийся всюду на [0,1] ортогональный ряд (1) с монотонными коэффициентами, для которого справедливо (2).

В конце работы указывается, что теоремы 1 и 2 можно несколько обобщить и что исследование критического случая при $4\,\frac{\log_2 \log_2 n}{\log_2 n}$ может быть трудным.

Примечание референта. На стр. 160, строка 5 сверху, вместо $\log n$ следует читать $\log^2 n$.

П. Л. Ульянов

2816. О сходимости рядов с пропусками. Мацуяма (On the convergence of some gap series. Matsuyama Noboru), Sci. Rept Kanazawa Univ., 1955, **3**, № 1. 11—20 (англ.)

Изучаются лакунарные ряды типа

$$\sum_1^{\infty} c_n \varphi(\lambda_n x), \qquad (1)$$

где $\varphi(x+2\pi) = \varphi(x)$, $\int_0^{2\pi} \varphi(x)\,dx = 0$, $\varphi(x) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, $0 < \alpha < 1$.

Продолжая исследования Каца (Kac, Ann. Math., 1943, **44**, 411—415) и Хартмана (Hartman, Duke Math. J., 1942, **9**, 404—405), Кавата и Удагава (Kawata, Udagawa, Kodai Math. Semin. Repts, 1949, № 5-6, 19—22) получили некоторые результаты относительно ряда (1), где λ_ν — не обязательно целые числа. Автор дает некоторые обобщения этих последних результатов. Так, например, если $1 \leqslant n(x) \leqslant N$, $\lambda_{n+1}/\lambda_n \geqslant \lambda > 1$ и $\omega(n)$ удовлетворяет некоторым условиям, то для частных сумм ряда (1) выполняется неравенство

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} S_{n(x)}(x)\, d\left(\frac{\sin^2 x/2}{2\pi x^2}\right) \right| \leqslant A\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2\, \omega(n)\right)^{1/2}$$

По реферату из Math. Revs, 1957, **18**, № 2, 126—127

2817. О суммируемости ортогональных рядов. Алексич Г., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. **4**. М., АН СССР, 1959, 183

2818 Д. Аддитивные функции множества и измеримые отображения. Квачко М. Е. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., ЛГУ, Л., 1959

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

2819. Некоторые операции в рангированных пространствах. I. Окано (Some operations on the ranked spaces. I. Okano Hatsuo), Proc. Japan Acad., 1957, **33**, № 4, 172—176 (англ.)

Сначала автор в определении рангированного пространства (РЖМат, 1956, 2034) освобождается от аксиомы (C) аксиоматики Хаусдорфа, так что внутренности окрестностей точек $I[v(p)]$ могут теперь не совпадать с самими окрестностями $v(p)$. Определения рангированного пространства и фундаментальной последовательности окрестностей при этом остаются без изменений, а остальные определения Кунуги модифицируются следующим образом. Рангированное пространство R ранга ω_ν называется полным, если для каждой фундаментальной последовательности $v_\alpha(p_\alpha)$, $0 \leqslant \alpha < \omega_\mu$ при $\mu = \nu$ будет $\bigcap_\alpha v_\alpha(p_\alpha) \neq 0$, а при $\mu < \nu$ будет $\bigcap_\alpha I[v_\alpha(p_\alpha)] \neq 0$. Множество $E \subset R$ называется нигде не плотным, если для всякой точки $p \in R$ и всякой ее окрестности $v(p)$ будет $I[v(p)] \not\subseteq \overline{E}$. Множество $F \subset R$ называется первой категории, если оно является объединением ω_ν-последовательности нигде не плотных множеств. Доказывается теорема Бэра: в полном рангированном пространстве никакое непустое открытое множество не может быть первой категории.

Далее определяется произведение произвольного множества I рангированных пространств R_i, $i \in I$, одинаковых рангов ω_ν. Это—рангированное пространство, состоящее из точек декартова произведения множеств R_i, в котором за окрестности ранга α точек $p = \{p_i\}$ принимаются совокупности точек, координаты которых при $i \in A$, где A — любое подмножество I мощности $< \aleph_\nu$, изменяются в каких-либо окрестностях ранга α точек p_i, а при остальных значениях i пробегают все пространство R_i (при этом на пространства R_i накладывается ограничение, состоящее в том, что всякая окрестность какой-либо точки содержит окрестности этой точки любых достаточно больших рангов). Доказывается, что произведение рангированных пространств полно тогда и только тогда, когда все перемножаемые пространства полны.

Наконец, рассматривается группа $F(E, G)$ отображений фиксированного множества E в фиксированную группу G. Если G — рангированная группа, т. е. если она вместе с тем является рангированным пространством, в котором окрестности ранга α для произвольных точек получаются правыми (левыми) переносами всевозможных окрестностей единицы ранга α, то группу $F(E, G)$ тоже удается рассматривать как рангированную группу, причем ее топология зависит от выбора системы Γ подмножеств множества E, удовлетворяющей некоторому условию. Исследуется вопрос о том, когда эта группа будет полной. В частности, для случая $\omega_\nu = \omega_0$ группа $F(E, G)$ полна тогда и только тогда, когда полна группа G.

Приводятся также примеры полного рангированного пространства, не удовлетворяющего хаусдорфовой аксиоме (C), и полной рангированной группы $F(E, G)$, для которой аксиома (C) не выполняется, хотя она выполняется для G. М. Ф. Бокштейн

2820. О замкнутых подпространствах полных рангированных пространств. Окано (On closed subspaces of the complete ranked spaces. Okano Hatsuo), Proc. Japan Acad., 1957, **33**, № 6, 336—337 (англ.)

Пусть R — рангированное пространство (РЖМат, 1956, 2034), A — его подмножество, $v = \{v_\alpha(p_\alpha),\ 0 \leqslant \alpha < \omega_\mu\}$ — фундаментальная последовательность окрестностей в R. Через $\vartheta(v)$ обозначим пересечение $\bigcup_\alpha I[v_\alpha(p_\alpha)]$, если $\mu < \nu$, и $\bigcup_\alpha v_\alpha(p_\alpha)$, если $\mu = \nu$ (обозначения те же, что и в реф. 2819; как и там, хаусдорфова аксиома (C) не предполагается выполняющейся). Обозначая теперь через $\widetilde{A}$ множество всех точек $p \in R$, для которых $p \in \vartheta(v)$ для какой-либо фундаментальной последовательности $v = \{v_\alpha(p_\alpha)\}$, $p_\alpha \in A$, и рассматривая $\widetilde{A}$ как замыкание A, получаем в R новую топологию (для которой, однако, вообще говоря, $\widetilde{\widetilde{A}} \neq \widetilde{A}$), называемую r-топологией. В работе строятся примеры, показывающие, что подпространство полного рангированного пространства, замкнутое как в обычной, так и в r-топологии, может не быть полным. Приводится также достаточное условие для полноты подпространства полного рангированного пространства. М. Ф. Бокштейн

2821. О пополнении рангированных пространств. Окано (On the completion of the ranked spaces. Okano Hatsuo), Proc. Japan Acad., 1957, **33**, № 6, 338—340 (англ.)

Для рангированных пространств, удовлетворяющих аксиоме (C) аксиоматики Хаусдорфа, вопрос о пополнении изучался Кунуги (РЖМат, 1956, 2034, 7226). В реферируемой работе рассматривается рангированное пространство R, для которого аксиома (C) может не выполняться, но зато выполняются (обозначения такие же, как в реф. 2819): 1) ослабленная аксиома (C′): если точка q лежит в окрестности $v(p)$ точки p, то найдется окрестность $u(q)$ точки q, для которой $I[u(q)] \subseteq v(p)$; 2) аксиома отделимости (T_1'): для любых двух различных точек p и q существуют такие окрестности $v(p)$ и $u(q)$, что $q \notin I[v(p)]$ и $p \notin I[u(q)]$; 3) условие: для всякой фундаментальной последовательности $u = \{u_\alpha(p_\alpha);\ 0 \leqslant \alpha < \omega_\mu\}$, для которой $\mu < \nu$, множество $\bigcup_\alpha I[u_\alpha(p_\alpha)]$ не пусто (это условие всегда выполняется, если $\omega_\nu = \omega_0$). Для таких пространств строится пополнение $\hat{R}$, за точки которого принимаются классы семейств фундаментальных последовательностей, удовлетворяющих определенным условиям, причем R оказывается вложенным в $\hat{R}$ в качестве всюду плотного множества как для обычной топологии, так и для r-топологии в $\hat{R}$ (реф. 2820). Если R есть метрическое пространство, то все пополнение совпадает с обычным. М. Ф. Бокштейн

2822. Меры в рангированных пространствах. Окано (Measures in the ranked spaces. Okano Hatsuo), Proc. Japan Acad., 1958, **34**, № 3, 136—141 (англ.)

Для рангированных пространств (РЖМат, 1956, 2034; как и в реф. 2819 хаусдорфова аксиома (C) сначала не предполагается выполняющейся) строится теория меры, обобщающей меру Лебега. Рангированное пространство R предполагается пространством счетного ранга (т. е. имеющим окрестности лишь всевозможных конечных рангов), удовлетворяющим следующим условиям: 1) всякая окрестность $v(p)$ точки p содержит окрестности этой точки любых достаточно больших рангов; 2) для любых двух неотрицательных целых чисел m, n максимальное число (n, m) окрестностей ранга n, содержащихся в какой-нибудь окрестности ранга m, одинаково для любой окрестности этого ранга; 3) существует такое число n_0, что для $n \geqslant n_0$ будет $1 \leqslant (n, n_0) < +\infty$. Определяется функция $\lambda(v(p)) = \lim\limits_{k \to +\infty} \dfrac{(n_k, m)}{(n_k, n_0)}$, где m — ранг окрестности $v(p)$, а n_k — некоторая возрастающая последовательность натуральных чисел, для которой этот предел существует. Далее определяется внешняя мера μ^* в R, а именно $\mu^*(A) = \inf \sum \lambda(v(p))$, где суммирование происходит по произвольному семейству $\{v(p)\}$ окрестностей, объединение которых содержит A. Показывается, что если пространство R и построенная внешняя мера μ^* удовлетворяют некоторым дополнительным условиям, а именно аксиоме (C) аксиоматики Хаусдорфа, аксиоме отделимости любых двух различных точек окрестностями с непересекающимися замыканиями, возможности в некотором смысле сколь угодно точной (относительно μ^*) аппроксимации любой окрестности окрестностями большего ранга и, наконец, условию $\mu^*(\bigcup v_n(p_n) \setminus \bigcup v_n(p_n)) = 0$ для любой конечной или счетной совокупности $\{v_n(p_n)\}$ окрестностей, внешняя мера объединения которых конечна, то в таком пространстве всякое открытое множество будет μ^*-измеримым, причем для всякой окрестности $v(p)$ будем иметь $\mu^*(v(p)) = \lambda(v(p))$. Отмечается правая (левая) инвариантность построенной внешней меры μ^* в случае, когда R является рангированной группой (реф. 2819). Приводятся примеры. М. Ф. Бокштейн

2823. Меры в рангированных пространствах. II. Окано (Measures in the ranked spaces. II. Okano Hatsuo), Proc. Japan Acad., 1958, **34**, № 4, 205—207 (англ.)

Так как условия, при которых для построенной в предыдущей работе (реф. 2822) внешней меры каждое открытое множество будет измеримым, не всегда выполняются, то в реферируемой работе для рангированных пространств строится борелева мера, определение которой требует от пространства, вообще говоря, меньших ограничений. Пусть R есть рангированное пространство счетного ранга, удовлетворяющее хаусдорфовой аксиоме (C). Окрестность $v(p)$ точки p называется строго вложенной в окрестность $u(q)$ точки q, если существует такая окрестность $v'(p)$ точки p, что $v(p) \subseteq v'(p) \subseteq u(q)$ и ранг которой меньше ранга $v(p)$, но больше ранга $u(q)$. Конечная совокупность непересекающихся окрестностей $\{v_n(p_n)\}$ называется упаковкой окрестности $u(q)$, если все эти окрестности строго вложены в $u(q)$. Две упаковки каких-либо двух окрестностей называются упаковками одного типа, если для каждого значения n они содержат одинаковое число окрестностей ранга n. На пространство R дополнительно накладываются следующие условия: 1) всякая окрестность содержит окрестности той же точки любых достаточно больших рангов; 2) существует такое число n_0, что для всякого значения n максимальное число непересекающихся окрестностей ранга n, строго вложенных в окрестность ранга n_0, конечно; 3) если $v(p)$ и $u(q)$ — окрестности одинакового ранга, то для каждой упаковки окрестности $v(p)$ существует упаковка того же типа окрестности $u(q)$; 4) для всякой фундаментальной последовательности $\{v_n(p_n)\}$ пересечение $\bigcap_n v_n(p_n)$ содержит точку, каждая окрестность которой содержит какую-нибудь из окрестностей фундаментальной последовательности. Затем строится такая же функция $\lambda(v(p))$, что и при построении лебеговой меры (реф. 2822) с той разницей, что при ее определении вместо величины (n, m) берется максимальное число $[n, m]$ окрестностей ранга n, теперь уже

строго вложенных в окрестность ранга m. Исходя из этой функции, принимаемой за $\lambda_0(v(p))$, автор индуктивно строит невозрастающую трансфинитную последовательность функций $\lambda_\beta(v(p))$, определенную для непредельных трансфинитных чисел β условием $\lambda_\beta(v(p)) = \sup \sum \lambda_{\beta-1}(v_n(p_n))$, где верхняя грань суммы берется по всевозможным упаковкам $\{v_n(p_n)\}$ окрестности $v(p)$, а для предельных значений β с помощью предельного перехода от меньших значений. Такая последовательность, очевидно, стабилизируется, начиная с некоторого счетного трансфинита, и функция, к которой мы приходим, обозначается через $\lambda_\Omega(v(p))$. Для произвольного открытого множества G полагаем теперь $\sup \sum \lambda_\Omega(v_n(p_n)) = \lambda_*(G)$, где суммирование производится по произвольным конечным семействам вложенных в G непересекающихся окрестностей $v_n(p_n)$, а затем определяем внешнюю меру ν^* в R условием $\nu^*(A) = \inf_G \lambda_*(G)$, где G — открытое множество, содержащее данное множество $A \subset R$. Если при этом для всякой окрестности $v(p)$ существует такое содержащее ее замкнутое множество F, что $\nu^*(F \setminus v(p)) = 0$, то всякое открытое множество будет измеримым, так что ν^* определяет меру на борелевском кольце множеств, порожденном открытыми множествами пространства R. При этом мера каждого непустого открытого множества положительна, за исключением того случая, когда построенная выше функция λ_Ω тождественно равна нулю. М. Ф. Бокштейн

2824. О конечных множествах и постулатах Пеано. Кернс (On finite sets and the Peano postulates. Kearns D. A.), Math. Mag., 1959, **32**, № 4, 217—219 (англ.)

Пусть множество S удовлетворяет следующим гипотезам:

P1. S просто упорядочено отношением „$<$“.

P2. S не имеет максимального элемента.

P3. Если $a \in S$, то $L_a = \{x\}$ (где $x \in S$, $x < a$) конечно, т. е. не может быть приведено во взаимно однозначное соответствие ни с какой своей правильной частью.

В статье доказывается, что для множества S выполнены следующие теоремы:

Теорема 5. S содержит минимальный элемент x_0.

Теорема 6. S вполне упорядочено отношением „$<$“.

Теорема 7. Упорядочение „$<$“ множества S дискретно, так что любой элемент S имеет единственный последующий и, если он не является минимальным элементом, единственный предшествующий элемент.

Теорема 8. Пусть S' есть произвольное подмножество S такое, что 1) $x_0 \in S'$ и 2) S' содержит элемент x', следующий за x, всякий раз, когда оно содержит x. Тогда $S' = S$.

Теоремы 5, 7 и 8 по существу представляют постулаты Пеано. С. И. Адян

2825. К дальнейшему развитию теории множеств. Карл (Zur Weiterentwicklung der Mengenlehre. Karl Herbert), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, v. 2, Amsterdam, 1954, 404 (нем.)

Соображения о возможности построения модели теории множеств внутри множества действительных чисел. В. А. Успенский

2826. Дополнение к статье «Теорема о функциях выбора». Брёйн (Addendum to «A theorem on choice functions». Bruijn N. G. de), Proc. Koninkl. nederl. akad. wet., 1959, **A62**, № 3, 327 (англ.)

Исправление двух ошибок, содержащихся в указанной статье автора (РЖМат, 1959, 4592). На наличие ошибок автору указал Хейтинг. С. И. Адян

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯМИ

2827. Закон итерированного логарифма для лакунарных тригонометрических рядов. Вейсс (The law of the iterated logarithm for lacunary trigonometric series. Weiss Mary), Trans. Amer. Math. Soc., 1959, **91**, № 3, 444—469 (англ.)

Пусть $\sum_{k=0}^{\infty}(a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x)$ — лакунарный ряд, т. е. $n_{k+1}/n_k > q > 1$ для всех k. Пусть

$$B_N = \left[\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left(a_k^2 + b_k^2\right)\right]^{1/2},\quad M_N = \max_{1 \leqslant k \leqslant N}\left(a_k^2 + b_k^2\right)^{1/2}$$

и $S_N(x)$ — сумма первых N членов ряда. Если при $N \to \infty$ имеем $B_N \to \infty$ и $M_N = o\left\{\frac{B_N}{(\lg \lg B_N)^{1/2}}\right\}$, то почти для всех x

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{S_N(x)}{\left(2B_N^2 \lg \lg B_N\right)^{1/2}} = 1.$$

Аналогичное предложение справедливо, если вместо $S_N(x)$ рассмотреть абелево среднее $S(r, x) = \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x) r^{n_k}$ и вместо B_N взять B_r, где $B_r^2 = \frac{1}{2}\sum_1^{\infty}\left(a_k^2 + b_k^2\right) r^{2n_k}$, т. е. если удовлетворены условия предыдущей теоремы, то

$$\overline{\lim_{r\to 1}} \frac{S(r, x)}{\left(2B_r^2 \lg \lg B_r\right)^{1/2}} = 1$$

почти всюду. Н. К. Бари

2828. О рядах Харди — Литлвуда. Вейсс (On Hardy—Littlewood series. Weiss Mary), Trans. Amer. Math. Soc., 1959, **91**, № 3, 470—479 (англ.)

Харди и Литлвуд изучали поведение рядов

$$\sum_1^{\infty} n^{-1/2} \exp(i\beta n \lg n + in\theta). \qquad (1)$$

$$\sum_1^{\infty} n^{-1/2} (\lg n)^{-1/2} \exp(i\beta n \lg n + in\theta), \qquad (2)$$

где β — действительное число, отличное от нуля, в частности доказали, что абелевы средние ряда (1) почти всюду неограничены.

Обозначая через $S_N(\theta)$, $S_\rho(\theta)$ частные суммы и абелевы средние для ряда (1), аналогично $S_N^*(\theta)$ и $S_\rho^*(\theta)$ для ряда (2), автор доказывает, что почти всюду

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{|S_N(\theta)|}{(\lg N \lg \lg \lg N)^{1/2}} = 1,$$

$$\overline{\lim_{\rho\to 1}} \frac{|S_\rho(\theta)|}{\left(\lg \frac{1}{1-\rho} \lg \lg \lg \frac{1}{1-\rho}\right)^{1/2}} = 1,$$

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{|S_N^*(\theta)|}{(\lg \lg N \cdot \lg \lg \lg \lg N)^{1/2}} = 1,$$

$$\overline{\lim_{\rho\to\infty}} \frac{|S_\rho^*(\theta)|}{\left(\lg \lg \frac{1}{1-\rho} \cdot \lg \lg \lg \frac{1}{1-\rho}\right)^{1/2}} = 1.$$

Далее, если $F_N(\xi, \eta)$ есть двумерная функция распределения для $\frac{S_N(\theta)}{(2^{-1}\lg N)^{1/2}}$ по множеству E, т. е.

$$F_N(\xi,\eta)=\left|\left\{\theta:\theta\in E,\ \operatorname{Re}\frac{S_N(\theta)}{(2^{-1}\lg N)^{1/2}}<\xi,\ \operatorname{Im}\frac{S_N(\theta)}{(2^{-1}\lg N)^{1/2}}<\eta\right\}\right|,$$

то $F_N(\xi,\eta)/|E| \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} G(\xi,\eta)$, где $G(\xi,\eta)$ есть двумерное гауссово распределение. Имеют место три аналогичные формулы для $F_\rho(\xi,\eta)$, $F_N^*(\xi,\eta)$ и $F_\rho^*(\xi,\eta)$, получаемые из предыдущих, если соответственно вместо $\frac{S_N(\theta)}{(2^{-1}\lg N)^{1/2}}$ писать

$$\frac{S_\rho(\theta)}{\left(2^{-1}\lg\frac{1}{1-\rho}\right)^{1/2}},\quad \frac{S_N^*(\theta)}{(2^{-1}\lg\lg N)^{1/2}} \text{ или } \frac{S_\rho^*(\theta)}{\left(2^{-1}\lg\lg\frac{1}{1-\rho}\right)^{1/2}}.$$

Н. К. Бари

2829. О сопряженной функции нескольких переменных. **Ватанабэ** (On conjugate function of several variables. Watanabe Hiroshi), Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., 1958, **A12**, № 2, 180—190 (англ.)

Работа в основном является продолжением известных исследований, посвященных вопросу существования особых интегралов. Пусть $f(x_1,\dots,x_n)$ имеет период 2π по каждому переменному и f интегрируема на n-мерном квадрате со стороной 2π. Сопряженная функция $\bar f(x_1,\dots,x_n)$ к функции $f(x_1,\dots,x_n)$ определяется в виде

$$\bar f(x_1,\dots,x_n)=\lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0\\ \dots\\ \varepsilon_n\to 0}}\left(-\frac{1}{\pi}\right)^n\int_{\varepsilon_1}^{2\pi}\dots\int_{\varepsilon_n}^{2\pi}\frac{f(x_1+u_1,\dots,x_n+u_n)}{2\operatorname{tg}\frac{u_1}{2}\dots 2\operatorname{tg}\frac{u_n}{2}}\,du_1\dots du_n, \qquad (1)$$

если последний предел существует и интеграл

$$\int_{-\pi}^{\pi}{}^{(\varepsilon_k)} = \int_{-\pi}^{-\varepsilon_k}+\int_{\varepsilon_k}^{\pi}\quad (k=1,\dots,n).$$

Сокол-Соколовский (Sokol-Sokolowski K., Fundam. math., 1947, **34**, 166—182) и Зигмунд (Zygmund A., Fundam. math., 1949, **36**, 207—235; особ. стр. 233) доказали, что при некоторых дополнительных ограничениях на функцию $f(x_1,\dots x_n)$ предел (1) существует почти всюду при произвольном стремлении $\varepsilon_1\to 0,\dots,\varepsilon_n\to 0$.

Автор доказывает, что справедлива

Теорема 1. Если $f(x_1,\dots,x_n)$ интегрируема, то сопряженная функция $\bar f(x_1,\dots,x_n)$ существует почти всюду в смысле существования предела (1), в котором $\varepsilon_k\to 0$ подчиняется условию $\lambda\leqslant\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_j}\leqslant 1/\lambda (i,j=1,2,\dots,n)$, где λ — некоторое фиксированное число из $(0,1)$. Кроме того, для норм справедливо неравенство

$$\|\bar f(x_1,\dots,x_n)\|_{L^\delta}\leqslant A_{n,\delta}\|f(x_1,\dots,x_n\|_{L^1},$$

где $0<\delta<1$, $A_{n,\delta}$ — постоянная, зависящая лишь от n и δ.

Далее, Марцинкевич и Зигмунд (Marcinkewicz J., Zygmund A., Fundam. math., 1939, **32**, 122—132) доказали, что если $f(x_1,x_2)\in L$, то почти всюду $\sigma_{n,m}(x_1,x_2)\to f(x_1,x_2)$, где $\sigma_{n,m}(x_1,x_2)$ — среднее арифметическое ряда Фурье функции $f(x_1,x_2)$, а m и $n\to\infty$ так, что для некоторого λ из $(0,1)$ справедливы неравенства $\lambda<m/n<1/\lambda$.

Автор распространяет этот результат на сопряженные ряды к рядам Фурье от функций многих переменных.

П. Л. Ульянов

2830. Об одном обобщении интеграла Валле-Пуссена. **Лебедева Л. П.**, Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та им. А. И. Герцена, 1958, **183**, 179—196

Рассматривается оператор

$$Q_n(f;x)=\int_0^{2\pi}\left(1-\alpha_n\sin^2\frac{t}{2}\right)^n f(x+t)\,dt:\int_0^{2\pi}\left(1-\alpha_n\sin^2\frac{t}{2}\right)^n dt,$$

где $\{\alpha_n\}$ — некоторая последовательность вещественных чисел.

Теорема. Для того, чтобы равномерно относительно x $Q_n(f;x)\to f(x)$ $(n\to\infty)$ для всякой $f\in C_{2\pi}$, необходимо и достаточно, чтобы для последовательности $\{\alpha_n\}$ выполнялось условие $(1-\alpha_n)^n\to 0$ $(n\to\infty)$.

Доказательство проводится непосредственной оценкой разности $Q_n(f;x)-f(x)$.

Указывается, что этот результат может быть получен так же, как следствие общей теоремы С. М. Никольского о линейных методах суммирования рядов Фурье (Изв. АН СССР. Сер. матем., 1948, **12**, 259—278).

И. Г. Соколов

2831. О приближении периодических функций, удовлетворяющих условию Липшица, суммами Бернштейна — Рогозинского. **Корнейчук Н. П.**, Докл. АН СССР, 1959, **125**, № 2, 258—261

Рассматриваются оценки верхней грани уклонений $E_n(\alpha;\beta)=\sup_{f\in KH^{(\alpha)}}\max_x|f(x)-U_n(f;x;\beta)|$, где $U_n(f;x;\beta)=\frac{1}{2}\{S_n(f;x+\beta_n)+S_n(f;x-\beta_n)\}$ — суммы Бернштейна — Рогозинского функции $f(x)$.

Если $\beta_n=\frac{\pi}{2n+1}$ $(n\geqslant 2)$, то для $0\leqslant\alpha\leqslant 1$ $(K=1)$

$$E_n(\alpha;\beta)=\left[\frac{\pi^\alpha}{\alpha+1}+\varepsilon_n(\alpha)\right]\frac{1}{(n+1)^\alpha}+\frac{c_n(\alpha)}{(n+1)^{\alpha+1}}, \qquad (14)$$

где $0<\varepsilon_n(\alpha)<0{,}03\alpha+0{,}09$, $|c_n(\alpha)|<2$.

Асимптотическая оценка (14) распространяется на случай, когда $\beta_n=\frac{\pi}{2n+1}+O\left(\frac{1}{n\ln n}\right)$.

Отдельно рассмотрен случай $\alpha=1$.

Самостоятельный интерес представляет лемма 2: Пусть $\psi(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и такова, что $\Psi(x)=\int_a^x\psi(t)\,dt$ строго возрастает (убывает) на (a,c), $a<c<b$, и строго убывает (возрастает) на (c,b), причем $\Psi(b)=0$. Если $H^{(\alpha)}(a,b)$ — класс функций, удовлетворяющих на $[a,b]$ условию $H^{(\alpha)}$ $(0\leqslant\alpha\leqslant 1,\ K=1)$, то

$$1)\ \sup_{f\in H^{(\alpha)}}\left|\int_a^b\psi(t)f(t)\,dt\right|=\int_a^c|\psi(t)|[\rho(t)-t]^\alpha\,dt=\int_c^b|\psi(t)|[t-\bar\rho(t)]^\alpha\,dt,$$

где функция $\rho(x)$ определяется как корень уравнения $\Psi(x) = \Psi[\rho(x)]$, $a \leqslant x \leqslant c$, лежащий в промежутке $[c, b]$, $\bar{\rho}(x)$ — функция, обратная для $\rho(x)$.

Указанная верхняя грань достигается для функции вида $F(x) + c$, где c — произвольная постоянная и

$$F(x) = \begin{cases} -\alpha \int_x^c [\rho(t) - t]^{\alpha-1}\, dt, & a \leqslant x \leqslant c, \\ \alpha \int_c^x [t - \bar{\rho}(t)]^{\alpha-1}\, dt, & c \leqslant x \leqslant b. \end{cases}$$

Автор отмечает, что ему стало известно, когда статья была приготовлена к печати, что подобной лемме 2 результат был получен также С. Б. Стечкиным, но не опубликован. И. Г. Соколов

2832. Суммируемость рядов по ортогональным полиномам. Чэнь Цзянь-гун (The summability of the series of orthogonal polynomials. Chen Kien-kwong), Sci. Rec., 1959, **3**, № 2, 55—60 (англ.)

Пусть $0 \leqslant \tau(x) \in L(a, b)$ и $\{P_n(x)\}$ — ортонормированная относительно веса $\tau(x)$ система полиномов на $[a, b]$.

Доказывается ряд теорем, относящихся к сходимости или суммируемости рядов Фурье по ортогональным полиномам. Сформулируем некоторые из них. Пусть $f \in L^p(a, b)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$,

$$\omega_k(f; t)_{L^p} = \sup_{|h| < t} \left[\int_a^b \left| \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{k-\nu} \binom{k}{\nu} f(x + \nu h)\right|^p \times \right.$$

$$\left. \times \tau(x)\, dx\right]^{1/p} \qquad (1)$$

и

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x), \qquad (2)$$

где $$c_n = \int_a^b f(x)\, P_n(x)\, \tau(x)\, dx.$$

Тогда справедливы

Теорема 1. Если $k = 1$ или 2 и

$$\int_0^{e^{-1}} \omega_k^2(f; t) \log \frac{1}{t} \frac{dt}{t} < \infty, \qquad (3)$$

то ряд (2) сходится почти всюду на $[a, b]$.

Теорема 2. Если

$$\int_0^{e^{-1}} \omega_k^2(f, t)_{L^2} \frac{\left(\log\log \frac{1}{t}\right)^2}{\lg \frac{1}{t}} \frac{dt}{t} < \infty \quad (k = 1 \text{ или } 2),$$

то ряд (2) (C, α)-суммируем почти всюду на $[a, b]$ при всех $\alpha > 0$.

Теорема 3. Если

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} c_n^2 \lg n\, (l_1(n) \dots l_{j-1}(n))\, l_j^p(n) < \infty \quad (p > 1),$$

то ряд (2) безусловно сходится почти всюду на $[a, b]$, где $l_1(n) = \lg n$, $l_i(n) = \lg(l_{i-1}(n))$, а n_0 — достаточно большое число.

Такого же типа утверждения доказываются и для тригонометрических рядов. Как частный случай, автор получает результат референта (РЖМат, 1959, 6774), относящийся к безусловной сходимости тригонометрических рядов.

Примечание референта. 1) На стр. 55, строка 14 снизу, должно быть $o(\log\log n)^2$. 2) На стр. 55, строка 1 снизу (см. (3)), вместо $\omega_k^2(f; t)$ должно быть по-видимому, $\omega_k^2(f; t)_{L^2}$. Автор формулирует следующий результат И. П. Натансона: если $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ $(\alpha > 1/2)$, то ряд (2) сходится почти всюду на $[a, b]$. Во-первых, результат И. П. Натансона относится к 1933 г., а не к 1938 г., как процитировано у автора. Во-вторых, в этом направлении имеется более сильный результат А. Н. Колмогорова (Докл. АН СССР, 1934, 1, 291—294). В-третьих, автор налагает на вес условие $\tau(x) \geqslant 0$ на $[a, b]$ и, стало быть, $\tau(x)$ может обращаться в нуль на множестве положительной меры, тогда как у Натансона и Колмогорова вес $\tau(x) > 0$ на $[a, b]$. Верны ли теоремы Натансона и Колмогорова при условии $\tau(x) \geqslant 0$ на $[a, b]$ — референту неизвестно. Отметим, что при условии $\tau(x) \geqslant 0$ система полиномов $P_n(x)$ может быть неполной. 4) Если вес $\tau(x) \geqslant 0$ на $[a, b]$, то доказательства автора вызывают сомнение, ибо из условия Радемахера — Меньшова $\sum_{n=2}^{\infty} c_n^2 \log^2 n < \infty$ непосредственно не вытекает сходимость ряда (2) почти всюду на $[a, b]$, когда вес $\tau(x) = 0$ на множестве положительной меры. 5) Согласно условиям автора, функция $f(x)$ определена на $[a, b]$, а для определения $\omega_k(f; t)$ (см. (1)) нужно знать значения функции вне $[a, b]$. Каковы эти значения, автор ничего не говорит. П. Л. Ульянов

2833. Оценка приближения непрерывных функций обобщенными полиномами Бернштейна. Шао Пинцзун (Shao Pin-tsung), Шусюэ цзиньчжань, 1958, **4**, № 2, 282—287 (кит.; рез. англ.)

Пусть $\{r_n\}$ — последовательность целых чисел, причем $0 = r_0 < r_1 < \dots < r_n < \dots$, $r_n \to \infty$, и пусть $\beta_{f, r_n}(x) =$

$$= \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{r_k}{r_n}\right) \binom{r_n}{r_k} (r_{k+1} - r_k)\, x^{r_k} (1 - x)^{r_n - r_k}$$ — обобщенный полином Бернштейна порядка r_n, построенный для непрерывной на отрезке $[0, 1]$ функции $f(x)$.

Доказывается, что если $r_n - r_{n-1} = O(r_n^{\alpha})$ $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1/2)$,

то $$\beta_{f, r_n}(x) = f(x) + O\left(\omega\left(r_n^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)\right) + O\left(r^{-\frac{1}{2}+\alpha+\varepsilon}\right),$$

где $\varepsilon > 0$ и $\omega(\delta)$ — модуль непрерывности функции $f(x)$. Б. Э. Апарасио

2834. О приближении функций многочленами с целыми коэффициентами. Жирнова Г. А., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, № 4, 80—88

Изучаются вопросы о равномерном приближении действительных функций нескольких переменных многочленами с целыми рациональными коэффициентами и о наименьшем отклонении таких многочленов от нуля в n-мерном параллелепипеде $a_i \leqslant x_i \leqslant b_i$ $(i = 1, \dots, n)$.

Именно доказывается, что для того, чтобы всякую непрерывную функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ можно было равномерно приблизить многочленами указанного выше вида на замкнутом и ограниченном множестве E n-мерного пространства, необходимо и достаточно, чтобы существовал многочлен с целыми рациональными коэффициентами $P(x_1, \dots, x_n)$, удовлетворяющий на этом множестве условию $0 < \rho_0 \leqslant P(x_1, \dots, x_n) \leqslant \rho_1 < 1$.

Дается оценка такого приближения для случая, когда множество E расположено внутри единичной сферы.

Доказывается существование многочлена с целыми рациональными коэффициентами $P_m(x_1, \dots, x_n)$, наибольшие степени которого по переменным суть $m_1, \dots, m_n$, удовлетворяющего условию

$$|P_m(x, \dots, x_n)| \leqslant 2^{\frac{n[(m_1+1)\dots(m_n+1)-1]}{(m_1+1)\dots(m_n+1)}} \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{n} (m_i+1)\left(\frac{b_i-a_i}{4}\right)^{\frac{m_i(m_i+1)}{2(m_1+1)\dots(m_n+1)}}$$

в параллелепипеде $a_i \leqslant x_i \leqslant b_i$ $(i=1,\dots,n)$, причем степени $m_1,\dots,m_n$ могут быть заданы произвольно.

Формулируются теоремы, представляющие обобщения теорем Джексона — Гельфонда на случай n-мерного пространства и на случай многочленов с целыми коэффициентами от n переменных. Доказательства этих теорем не приводятся ввиду их громоздкости.

Б. Э. Апарисио

2835. Равномерное приближение с диофантовыми дополнительными условиями непрерывных функций. **Хостад** (Uniform approximation with Diophantine side-conditions of continuous functions. Håstad Matts), Arkiv mat., 1958, **3**, № 6, 487—493 (англ.)

Работа состоит из двух различных частей. В первой части рассматривается вопрос о приближении непрерывных на отрезке $I=[-1,1]$ функций рациональными дробями (отношениями двух многочленов). Здесь получены следующие две теоремы.

Теорема 1. Каждая положительная непрерывная на I функция $f(x)$ может быть приближена на I рациональными дробями, нули и полюсы которых принадлежат двум заданным множествам P и $\bar{P}$, которые удовлетворяют следующим условиям: 1) $\bar{P}$ есть образ P при отражении от действительной оси; 2) P (и $\bar{P}$) расположено на сегменте некоторой прямой, причем эта прямая составляет с осью x угол, не равный $\frac{\pi}{2}$; 3) P и ($\bar{P}$) содержит подмножество P' ($\bar{P}$), которое плотно в себе (т. е. P' содержится в множестве всех предельных точек P').

Теорема 2. Каждая непрерывная функция может быть приближена на I рациональными дробями, нули которых принадлежат I и множествам P и $\bar{P}$, а полюсы — множествам P и $\bar{P}$, где P и $\bar{P}$ удовлетворяют условиям теоремы 1.

Вторая часть посвящена вопросам приближения непрерывных функций нескольких переменных многочленами с целыми рациональными коэффициентами (I-многочленами, по терминологии автора). Пусть A—компактное множество в евклидовом пространстве R^n. A принадлежит классу M, если существует I-многочлен $u(x,y,\dots)$, удовлетворяющий условиям: 1) $|u(x,y,\dots)|<1$ на A; 2) $u(x,y,\dots)\neq 0$ на A. Если же вместо условия 2) потребовать лишь выполнение условия 2') $u(x,y,\dots)\not\equiv 0$ на A, то множество A принадлежит классу M'. Если $B\in M'$, то существует подмножество B (обозначим его $N(B)$), обладающее тем свойством, что если $(x_0,y_0,\dots)\in N(B)$, то $u(x_0,y_0,\dots)=0$ для каждого I-многочлена $u(x,y,\dots)$, удовлетворяющего условиям 1) и 2'). Доказаны следующие теоремы.

Теорема 3. Необходимым и достаточным условием возможности равномерного приближения непрерывных функций I-многочленами на множестве A является принадлежность A классу M.

Теорема 4. Если $B\in M'$, то на B могут быть приближены те и только те непрерывные функции $f(x,y,\dots)$, для которых существует I-полином $p(x,y,\dots)$ такой, что $f(x,y,\dots)=p(x,y,\dots)$ для $(x,y,\dots)\in N(B)$. Доказаны еще три теоремы, в которых установлено, что прямоугольник $R\begin{pmatrix}a\leqslant x\leqslant b\\ c\leqslant y\leqslant d\end{pmatrix}$, у которого хотя бы одна сторона <4, принадлежит M', причем описывается множество $N(R)$, и R не принадлежит ни M, ни M', если $b-a\geqslant 6$ и $c-d\geqslant 4$. Результаты второй части обобщают результаты Фекете для случая одной переменной (РЖМат, 1956, 6522, 6523).

Примечание референта: Теоремы 1 и 2 являются следствием следующей теормеы, на которую автор не ссылается: Последовательность $\left\{\frac{1}{x-a_k}\right\}_1^{\infty}$, где среди a_k нет равных и все они находятся вне $[-1,1]$, замкнута в $C(0,1)$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|c_k|)=\infty,\ \text{где}\ c_k=a_k-\sqrt{a_k^2-1},\quad k=1,2,\dots$$

(Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации. М. — Л., Гостехиздат, 1947, 271—279). Из этой теоремы могут быть получены более сильные утверждения, чем полученные в статье. Ю. А. Брудный

2836. Методы приближения с уменьшением вариации. **Шёнберг** (On variation diminishing approximation methods. Schoenberg I. J.), On Numerical Approximat. Madison, Univ. Wisconsin Press, 1959, 249—274 (англ.)

Пусть $0\leqslant x_0\leqslant\dots\leqslant x_n\leqslant 1$ и $f(x)$ — вещественная функция, определенная в $[0,1]$. Обозначим через $v(f(x_\nu))$ число перемен знаков в конечной последовательности ординат $f(x_\nu)$, а через $v(f)$ — число перемен знаков функции $f(x)$ на отрезке $[0,1]$, т. е. $v(f)=\sup_{\{x_\nu\}} v(f(x_\nu))$, где верхняя грань берется по всем произвольным конечным множествам $\{x_\nu\}$. Пусть $g(x)=L(f(x))$ — линейный оператор (метод приближения), удовлетворяющий условию: если $f(x)\equiv 1$, то и $g(x)\equiv 1$. Метод назовем методом уменьшения вариации, если он обладает свойством $v(g)\leqslant v(f)$. Аналогично, обозначая через $v_c(f)$ число перемен знака периодической функции $f(t)$ на периоде, метод $g(t)=L(f(t))$ назовем методом уменьшения вариации для периодических функций, если $v_c(g)\leqslant v_c(f)$. Показывается, что полиномы Бернштейна

$$B_n(x)=\sum_{\nu=0}^{n} f\left(\frac{\nu}{n}\right)\binom{n}{\nu}x^{\nu}(1-x)^{n-\nu}\qquad (n\geqslant 1)$$

для функции $f(x)$, определенной на отрезке $[0,1]$, и суммы Валле-Пуссена

$$V_n(t)=\frac{1}{2\pi}\frac{(n!)^2}{(2n)!}\int_0^{2\pi}\left(2\cos\frac{t-\tau}{2}\right)^{2n}f(\tau)\,d\tau$$

для периодической функции $f(t)$ являются методами уменьшения вариации. Через $T(f)$ и $T_c(f)$ обозначим соответственно полную вариацию функции $f(x)$ на отрезке $[0,1]$ и полную вариацию периодической функции $f(t)$ на периоде. Показывается, что в неравенстве Поповича $T(B_n)\leqslant T(f)$ знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда функция $f(x)$ монотонна. Доказывается неравенство $T_c(V_n)\leqslant T_c(f)$, причем знак равенства здесь имеет место тогда и только тогда, когда $f(t)=\mathrm{const}$. Пусть $G(t)$ — неотрицательная периодическая функция ограниченной вариации с нормировкой

$$2G(t)=G(t+0)+G(t-0),\quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}G(t)\,dt=1$$

и $f(t)$ — периодическая суммируемая функция. $G(t)$ назовем ядром сохранения выпуклости, если из условия выпуклости $f(t)$ в $(0,2\pi)$ следует выпуклость в $(0,2\pi)$ функции

$$g(t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}G(t-\tau)f(\tau)\,d\tau.$$

Даются условия, при которых функция $G(t)$ является ядром сохранения выпуклости, и рассмотрены примеры таких ядер. А. В. Ефимов

2837. Замечания об интерполировании. V (Об устойчивости интерполяции). Эгервари, Туран (Notes on interpolation. V (On the stability of interpolation). Egerváry E., Turán P.), Acta math. Acad. scient. hung., 1958, **9**, № 3-4, 259—267 (англ.)

Часть IV см. РЖМат, 1960, 1564.

Рассматривается интерполяционная формула общего вида

$$R_n(f, x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\, r_k(x), \qquad (1)$$

построенная для n произвольных узлов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ промежутка $[-1, 1]$; здесь фундаментальные полиномы $r_k(x)$ подчинены условиям

$$r_k(x_\nu) = \delta_{k\nu} \quad (k, \nu = 1, 2, \ldots, n),$$

а в остальном пока произвольны. Интерполяционная формула (1) называется устойчивой, если при любом значении x из $[-1, 1]$ и для произвольных чисел y_ν, y_ν^* выполняются соотношения

$$\min_\nu |y_\nu - y_\nu^*| \leqslant \left| \sum_{k=1}^{n} y_k r_k(y) - \sum_{k=1}^{n} y_k^* r_k(x) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_\nu |y_\nu - y_\nu^*|$$

(ср. Hahn H., Math. Z., 1918, **1**, 115—142). „Степенью" интерполяционной формулы (1) называется сумма степеней фундаментальных полиномов $r_k(x)$. Ставится задача о нахождении „наиболее экономичной" интерполяционной формулы (1), т. е. такой, которая является устойчивой и для которой „степень" минимальна (для случая тригонометрического интерполирования задача решена Джексоном (Jackson D., Rend. Circolo mat. Palermo, 1914, **37**, 371) и Фейером (см. Pólya G., Jahresber. Deutsch. Math.-Ver., 1913, **22**, 206)).

Теорема 1. Наименьшая „степень" устойчивой интерполяционной формулы (1) равна $2(n-1)^2$; она получается в том и только в том случае, когда в качестве узлов x_ν выбраны точки $x_1 = -1$, $x_n = 1$ и корни $x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$ полинома Лежандра $P_{n-2}(x)$. Эта „наиболее экономичная" интерполяционная формула имеет вид

$$R_n(f, x) = f(1)\frac{1+x}{2}P_{n-2}^2(x) + f(-1)\frac{1-x}{2} \times$$

$$\times P_{n-2}^2(x) + \sum_{k=2}^{n-1} f(x_k)\frac{1-x^2}{1-x_k^2}\left(\frac{P_{n-2}(x)}{(P'_{n-2}(x_k)(x-x_k)}\right)^2.$$

Теорема 2. Последовательность „наиболее экономичных" интерполяционных формул $R_n(f, x)$, $n = 3, 4, 5, \ldots$, сходится в $[-1, 1]$ равномерно к $f(x)$, какова бы ни была непрерывная на $[-1, 1]$ функция $f(x)$.

Отмечается новое тождество для бесселевой функции $J_0(x)$, а именно

$$1 - J_0^2(x) = 4x^2 J_0^2(x) \sum_{\nu=1}^{\infty} [J_0'(\lambda_\nu)]^{-2}(x^2 - \lambda_\nu^2)^{-2},$$

где λ_ν — положительные корни функции $J_0(x)$, а также некоторые другие приложения построенной интерполяционной формулы. В. Ф. Николаев

2838. О сходимости интерполяционного процесса Лагранжа по корням полиномов Чебышева второго рода. **Егорова И. А.**, Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та им. А. И. Герцена, 1958, **183**, 143—150

Доказывается, что интерполяционный процесс Лагранжа, построенный по корням многочленов Чебышева второго рода, равномерно на $[-1,1]$ сходится для всякой абсолютно непрерывной в $[-1,1]$ функции $f(x)$. Для функции $f(x)$ с ограниченным изменением на $[-1,1]$ доказывается сходимость его во всех точках непрерывности $f(x)$. Л. А. Янович

2839. Об одном методе построения интерполяционных формул. Берман Д. Л., Докл. АН СССР, 1959, **124**, № 1, 11—14

Пусть

$$\sigma_n(f, x) = \int_{-1}^{1} f(t)\, R_{n,m}(x, t)\, p(t)\, dt, \qquad (1)$$

где $f \in C[-1,1]$, $R_{n,m}(x, t)$ — алгебраический многочлен степени n относительно x и степени m относительно t, $p(x) \geqslant 0$, и $\{\omega_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ — ортонормальная система многочленов с весом $p(x)$ в $[-1,1]$. Составляется оператор

$$\tilde{\sigma}_n(f, x) = \sum_{k=1}^{s} \rho_k^{(s)} f(x_k^{(s)})\, R_{n,m}(x, x_k^{(s)}),$$

который получается из (1), если интеграл в правой части вычислить по формуле квадратур Гаусса — Якоби с узлами в корнях полинома $\omega_s(x)$; $\{\rho_k^{(s)}\}_{k=1}^{s}$ — числа Кристоффеля узлов $\{x_k^{(s)}\}_{k=1}^{s}$.

Формулируется теорема, утверждающая, что если $R_{n,n}(x, t) = \sum_{k=0}^{n} \omega_k(x)\, \omega_k(t)$, то $\tilde{\sigma}_n(f, x)$ при $s = n$ совпадает с интерполяционной формулой Лагранжа функции $f(x)$ с узлами в $\omega_n(x)$.

Приводятся следующие теоремы:

1) Пусть вес $p(x)$ ортогональной системы полиномов удовлетворяет неравенству $p(x)\sqrt{1-x^2} \geqslant A > 0$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, где A — постоянное число, и пусть соответствующие числа Кристоффеля удовлетворяют условиям $\rho_k^{(n)} = O\left(\frac{1}{n}\right)$, $k = 1, 2, \ldots, n$; $n = 1, 2, \ldots$. Тогда, если числа m, s удовлетворяют условию

$$2s - m \to \infty, \quad n \to \infty, \qquad (2)$$

то из отношения

$$\sigma_n(f, x) \to f(x), \quad n \to \infty \qquad (3)$$

вытекает соотношение

$$\tilde{\sigma}_n(f, x) \to f(x), \quad n \to \infty. \qquad (4)$$

2) Пусть вес $p(x)$ ортогональной системы полиномов удовлетворяет неравенствам $0 < A \leqslant p(x)\sqrt{1-x^2} \leqslant B$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, где A и B — постоянные. Тогда, если выполняется условие (2), то из соотношения (3) следует соотношение (4).

Сходимость везде равномерная. Теоремы о сходимости примыкают к результатам С. М. Лозинского (Матем. сб., 1944, **14**, 175) и Г. И. Натансона (РЖМат, 1958, 5645). Н. П. Кеда

2840. О формулах квадратур, точных для тригонометрических полиномов. Турецкий А. Х., Уч. зап. Белорусск. ун-т, 1959, вып. 1(49), 31—54

Пусть для любого натурального числа n и $k = 0, 1, \ldots, 2n$

$$B_i^{(n)} + \int_0^{2\pi} p(x) l_i(x)\, dx, \text{ где } l_i(x) = \frac{A_{n+\frac{1}{2}}(x)}{2\sin\frac{x-x_i}{2} A'_{n+\frac{1}{2}}(x_i)},$$

$$A_{n+\frac{1}{2}}(x) = A\prod_{i=0}^{2n}\sin\frac{x-x_i}{2},\quad A=\text{const}.$$

Квадратурную формулу

$$\int_0^{2\pi} p(x)\,f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{2n} B_i^{(n)} f(x_i) \qquad (1)$$

автор называет формулой „типа Гаусса" в том случае, если она оказывается точной всякий раз, когда $f(x)$ есть тригонометрический полином степени не выше $2n$. В разделе 2 устанавливаются необходимые и достаточные условия, при которых формула (1) является формулой „типа Гаусса" (теорема 1). В теоремах 2—4 доказывается неравенство $B_i^{(n)} > 0$ для коэффициентов $B_i^{(n)}$ квадратурной формулы „типа Гаусса", решается вопрос о числе нулей полинома $A_{n+\frac{1}{2}}(x)$, ортогонального по весу $p(x)$ ко всякому тригонометрическому полиному полуцелого порядка, не превосходящего $n-\frac{1}{2}$, на полусегменте $[0, 2\pi)$, и формулируется утверждение (теорема 4) о сходимости формул „типа Гаусса" для всякой непрерывной периодической функции. В разделе 3 получается система уравнений, позволяющая с точностью до постоянных c_n и d_n единственным образом определить полином

$$A_{n+\frac{1}{2}}(x) = \sum_{k=0}^{n}\left[c_k\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x + d_k\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right],$$

ортогональный на $(0, 2\pi)$ по весу $p(x)$ ко всякому полиному полуцелого порядка $\leqslant n-\frac{1}{2}$, и приводятся примеры построения формул „типа Гаусса" для весов, заданных формулами: $p(x)=1$, $p(x)=1+\cos x$, $p(x)=1+\sin x$, $p(x)=1+\cos mx$, $p(x)=1+\sin mx$.

В разделе 4 автор вводит в рассмотрение четные полиномы $C_{n+\frac{1}{2}}(x)$ порядка $n+\frac{1}{2}$, ортогональные по весу $p(x)$ ко всем четным полиномам полуцелого порядка $\leqslant n-\frac{1}{2}$ со старшим коэффициентом, равным единице, и подобные же нечетные полиномы $S_{n+\frac{1}{2}}(x)$:

$$C_{n+\frac{1}{2}}(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k^{(n)}\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x,\ c_n^{(n)}=1,$$

$$S_{n+\frac{1}{2}}(x) = \sum_{k=0}^{n} d_k^{(n)}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x,\ d_n^{(n)}=1.$$

Для этих полиномов доказываются теоремы, аналогичные рассмотренным в разделе 3.

В работе содержатся и другие результаты, среди которых может быть отмечена

Теорема 8. Если $x_k^{(n)}$ $(k=0,1,\ldots,2n)$ суть нули из $[0, 2\pi)$ полинома $A_{n+\frac{1}{2}}(x)$, ортогонального на $(0, 2\pi)$ по весу $p(x)$ ко всякому полиному полуцелого порядка $\leqslant n-\frac{1}{2}$, и $T_n(f,x)=\sum_{k=0}^{2n} f(x_k^{(n)})l_{k,n}(x)$—тригонометрический полином целого порядка n, интерполирующий функцию $f(x)$ $[f(x)\in C_{2\pi}]$ в узлах $x_k^{(n)}$, то

$$\int_0^{2\pi} p(x)\,[T_n(f,x)-f(x)]^2\,dx \leqslant 4E_n^2\int_0^{2\pi} p(x)\,dx,$$

где E_n — наилучшее приближение $f(x)$ тригонометрическими полиномами n-го порядка. Г. Я. Доронин

См. также: 2530, 2677, 3166, 3213

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Редакторы *А. И. Маркушевич, Г. Ц. Тумаркин*

2841. **Обобщение полиномов Фабера. Уолш** (A generalization of Faber's polynomials. Walsh J. L.), Math. Ann., 1958, **136**, № 1, 23—33 (англ.)

Для представления функций, аналитических на конечном числе ограниченных непересекающихся континуумов K_i; $i=1,2,\ldots,\nu$, со связанным дополнением вводятся полиномы $b_n(z)$, являющиеся обобщением полиномов Фабера. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ — произвольные точки в плоскости w, $m_1, m_2, \ldots, m_\nu$ — неотрицательны, причем $\sum m_i = 1$; обозначим $U(z)=(z-a_1)^{m_1}(z-a_2)^{m_2}\ldots(z-a_\nu)^{m_\nu}$.

Устанавливается предварительно, что существует последовательность чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$, каждое из которых равно одному из a_i, такая, что на любом замкнутом множестве F, не содержащем a_i и при любом $n \geqslant 0$

$$0 < A_1\,|\,U(z)\,|^n < |\,(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_n)\,| < A_2\,|\,U(z)\,|^n.$$

Пусть $u_n(z)=(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_n)$, Γ_σ означает линию уровня $G(z)=\ln\sigma$ $(\sigma>1)$ функции Грина дополнения к $K=\sum K_i$ с особенностью на бесконечности, D_σ — совокупность конечных областей, ограниченных Γ_σ, $D_\sigma^{(\infty)}$ — множество $G(z)>\ln\sigma$. Пусть также $G_\sigma^{(\infty)}$ означает область $|\,U(w)\,|>\mu\sigma$, L_σ — граница $G_\sigma^{(\infty)}$.

Согласно одного результата Уолша (РЖМат, 1957, 3030) существует функция $\psi(w)$ взаимно однозначно и конформно отображающая $G_1^{(\infty)}$ на область $D_1^{(\infty)}$, $\psi(\infty)=\infty$, $\psi'(\infty)=1$; число $\mu>0$ определяется этой нормировкой.

Доказывается, что для $z\in\Gamma_\sigma$ и $w\in G_\sigma^{(\infty)}$ имеет место разложение

$$\frac{\psi'(w)}{\psi(w)-z} = \frac{b_0(z)}{w-\alpha_1} + \frac{b_1(z)}{(w-\alpha_1)(w-\alpha_2)} + \ldots,$$

в котором полиномы $b_k(z)=z^k+\ldots$ являются обобщением полиномов Фабера.

Если $f(z)$ аналитична на K, то справедливо разложение $f(z)=\sum_0^\infty c_k b_k(z)$, $z\in K$, причем ряд равномерно сходится внутри максимальной D_ρ из областей D_σ, в которых $f(z)$ аналитична.

Скорость сходимости частных сумм этого ряда характеризуется соотношением $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sup_{z\in K} [\max |f(z)-s_n(z)|]^{1/n} = 1/\rho$. Устанавливается оценка $|b_n(z)| < A_3\sigma^n\mu^n$, в которой z принадлежит Γ_σ, A_3 зависит от σ.

Для полиномов $b_k(z)$ выполняется тождество

$$b_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_\lambda} \frac{u_n(w)\psi'(w)\,dw}{\psi(w)-z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\lambda} \frac{u_n[\Phi(t)]}{t-z}\,dt,$$

в котором $z\in D_\lambda$ а $\Phi(z)$ — функция, обратная к $\psi(w)$.

С. Н. Мергелян

2842. О скорости приближения аналитических функций рациональными функциями с заданными полюсами. **У о л ш** (Note on degree of approximation to analytic functions by rational functions with preassigned poles. W a l s h J. L.), Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1956, **42**, № 12, 927—930 (англ.)

Пусть E — ограниченное открытое множество с границей J, состоящей из конечного числа аналитических кривых Жордана, попарно без общих точек. Если $f(z)$ аналитична в E, $f(z)\in L(p,\alpha)$ на J, $0<\alpha<1$, и в каждой из областей, дополнительных в $E+J$, содержатся точки

$$\alpha_{n1}^{(k)},\ \alpha_{n2}^{(k)},\ \ldots,\ \alpha_{nm(n,k)}^{(k)};\quad \sum m(n,k) = n, \qquad (1)$$

причем совокупность всех этих точек не имеет предельных точек на J, а $\dfrac{n}{m(n,k)}$ ограничено при всех n и k, то существует рациональная функция $R_n(z)$ порядка n с полюсами в (1) такая, что

$$|f(z)-R_n(z)| \leqslant \frac{c}{n^{p+\alpha}},\ z\in E+J.$$

Аналогичные результаты устанавливаются и в случае, когда на кривых J известен модуль непрерывности p-й производной $f(z)$, а также если $f^{(p)}(z)$ удовлетворяет на J условию $|f^{(p)}(s+h)+f^{(p)}(s-h)-2f^{(p)}(s)| < A|h|$, $z\in J$.

Эти оценки непосредственно следуют из одной теоремы Севуэла и Эллиота (РЖМат, 1953, 684).

С. Н. Мергелян

2843. Полнота систем функций. **У С ю е-м о у** (O u S o m o), Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1957, **7**, № 4, 477—491 (кит.; рез. англ.)

Устанавливаются критерии полноты различных систем аналитических функций в пространстве $L_p(-\pi,\pi;dg)$ в предположении, что $g(x)$ не убывает, $g(x-0)=g(x)$ и

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\ln g'(x)|\,dx = \infty.$$

Изучается полнота следующих систем функций:

$\{G(\alpha_n t)\}$, $\{t^n G^{(n)}(\alpha_n t)\}$, $\{G(\alpha_n x)\}$, $\left\{\frac{1}{t-\alpha_n}\right\}$, $\left\{\frac{1}{(t-\alpha_n)^n}\right\}$, $\{x^n G^{(n)}(\alpha_n x)\}$ $(t=e^{ix})$.

Приведем два примера. 1) Если аналитическая в круге $|z|<1$ функция $G(z)$ удовлетворяет условию $\ln\max_{|z|<r}|G(z)| \leqslant S\left(\frac{1}{1-r}\right)$, $0<r<1$, где $S(t)\uparrow+\infty$ при $t\to+\infty$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1-|\alpha_n|}{S\left(\frac{\lambda}{1-|\alpha_n|}\right)}\right\}^{1+\varepsilon} = \infty,$$

где $|\alpha_n|<1$, $\lambda>1$, $\varepsilon>0$, то любое из трех условий

$$\overline{\lim_{R\to\infty}}\int_1^R \lambda(r)\left[\frac{1}{R^2}+\frac{1}{r^2}\right]dr = \infty,\quad \overline{\lim_{\alpha\to 1-0}}\ \overline{\lim_{r\to\infty}}\ \frac{\lambda(r)-\lambda(\alpha r)}{r(1-\alpha)} > 1,$$

$$0<\alpha<1,\quad \int_1^R \frac{\lambda(r)}{r}\,dr > 2R - \frac{1}{p}\ln R - C$$

достаточно для полноты системы $\{G(\alpha_n e^{ix})\}$ ($\lambda(r)$ означает число точек α_n с условием $|\alpha_n|<r$). 2) Если $G(z)$ аналитичны в $|z|<1$, $G^{(n_i)}(0)\not\equiv 0$, $\lambda(r)$ — количество чисел n_i с условием $n_i<r$ и выполнено одно из трех приведенных выше условий, то для полноты системы $\{e^{inx}G^{(n)}(\alpha_n e^{ix})\}_0^\infty$ достаточно, чтобы $\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n-\alpha_{n+1}|<\infty$, где $|\alpha_n|<1$, $\alpha_n\to\alpha$, $|\alpha|<1$, $|\alpha_n-\alpha|\leqslant 1-|\alpha|$.

Некоторые из результатов работы известны или являются простыми следствиями известных фактов.

С. Н. Мергелян

2844. О выделении особенностей аналитических функций. Х а в и н В. П., Докл. АН СССР, 1958, **121**, № 2, 239—242

Автор дает новое, весьма изящное доказательство следующей теоремы Ароншайна (Aronszajn N., Acta math., 1935, **65**, № 1, 1—156), обобщившего ранее известную в этом направлении теорему Пуанкаре (см., например, Валирон Ж, Аналитические функции, М.-Л., Гостехиздат, 1957):

Т е о р е м а 1. Пусть F_0, F_1, F_2 — замкнутые множества расширенной плоскости, $F_0=F_1\cup F_2$, G_0, G_1, G_2—их дополнения. Если $u_0(z)$ аналитична в G_0, то существуют функции $u_1(z)$ и $u_2(z)$ такие, что в G_0: $u_0(z)=u_1(z)+u_2(z)$ и $u_i(z)$ аналитична в G_i $(i=1,2)$.

У Пуанкаре было: $F_0=(-\infty,+\infty)$, $F_1=[-1,1]$, $F_2=(-\infty,-1)\cup([1,+\infty)$. Доказательство автора основано на теории линейных топологических пространств. Работа Ароншайна была автору, по-видимому, неизвестна.

В качестве следствия отмечается

Т е о р е м а 2. Пусть G_1 и G_2 — две области, причем $G_1\cap G_2$ не пусто. Если система аналитических функций $\{\theta_k^i(z)\}$ полна в G_i $(i=1,2)$, то система $\{\theta_k^1(z),\ \theta_k^2(z)\}$ полна в $G_1\cup G_2$. Далее доказывается

Т е о р е м а 3. Пусть $u_0(z)$ аналитична в $|z|<1$ и

(1) $\int_0^{\theta_0}|u_0(re^{i\varphi})|^p\,d\varphi < C < +\infty$, $0<r<1$, $p>1$, $0<\theta_0\leqslant 2\pi$;

(2) $\int_0^1 |u_0(r)|\,dr$ и $\int_0^1 |u_0(re^{i\theta_0})|\,dr$ сходятся.

Тогда существует функция $\psi(\varphi)$ такая, что

$$\int_0^{\theta}|\psi(\varphi)|^p\,d\varphi < +\infty \quad\text{и}\quad u_0(z) = \int_0^{\theta_0}\frac{\psi(\varphi)\,d\varphi}{e^{i\varphi}-z} + u_1(z)$$

и $u_1(z)$ аналитична всюду вне дуги $\theta_0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$.

Доказательство автора, основанное на функциональном анализе, слишком сложно и существенно использует то, что $p>1$. Нетрудно дать элементарное доказательство, причем можно распространить результат и на $p=1$.

С. R. Хавинсон

2845. Об экстремальных значениях модуля производной однолистных и ограниченных функций. **Я н о в с к и й** (Sur les valeurs extrémales du module de la dérivée des fonctions univalentes bornées. J a n o w s k i W i t o l d. Prace. Łodzkie towarz. nauk., 1958, Wydz. 3, № 53, 50 s.) (франц.)

2846. О геометрических свойствах голоморфных функций. **Х а я с и** (H a y a s h i Y s h i o), Sci. Papers Fac. Engng Tokushima Univ., 1953, № 5, 61—63) (японск.; рез. англ.)

2847. **Об одной проблеме коэффициентов при однолистном отображении области $|\zeta|>1$.** **Воделанн** (Über ein Koeffizientenproblem für schlichte Abbildungen des $|\zeta|>1$. Waadeland Haakon. Kgl. norske vid. selskabs forhandl., 1957, **30**, № 27, S. 168—170, ill.) (нем.)

Рассматривается класс Σ функций $\omega=\Phi(\zeta)=\zeta+\frac{c_1}{\zeta}+\frac{c_2}{\zeta^2}+\ldots$, регулярных и однолистных в области $1<|\zeta|<\infty$, и верхняя грань модулей коэффициентов в этом классе: $C_n=\sup_{\Phi\in\Sigma}|c_n|$. Предположение $C_n=\frac{2}{n+1}$ опровергнуто Гарабедяном и Шиффером в 1955 г., так как ими доказано равенство $C_3=\frac{1}{2}+e^{-6}$ (РЖМат, 1956, 5193).

Автор дает следующие оценки снизу для C_n:

$$G_{2k-1}\geqslant\frac{1}{k}\left(2e^{-2\frac{k+1}{k-1}}+1\right),$$

$$C_{2k}\geqslant\frac{1}{2k+1}.$$

И. Е. Базилевич

2848. **О методе структурных формул и принципе соответствия границ при конформном отображении.** **Касьянюк** (Про метод структурних формул і принцип відповідності границь при конформному відображенні. Касьянюк С. А.), Доповіді АН УРСР, 1959, № 1, 14—17 (укр.; рез. русск., англ.)

Пусть функция $a=a(u, v)$ определена, дифференцируема по обеим переменным в конечной или бесконечной области G и удовлетворяет условию: через каждую точку области G (кроме точки ∞) проходит только одна из линий уровня этой функции. Пусть функция $w=f(z)=u+iv$; $f(0)=0$; $f'(0)=1$ регулярна в $|z|<1$ и отображает этот круг на область, граница которой Γ полностью принадлежит области G. Положим $z=e^{i\varphi}$ $(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$. Автор утверждает, что если $\frac{da}{d\varphi}\geqslant 0$ $(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$, то функция $w=f(z)$ будет однолистной в $|z|<1$. На основе этого утверждения излагается некоторый общий метод построения структурных формул ранее известных классов функций, регулярных и однолистных в единичном круге. Кроме того, получены достаточные условия однолистности некоторых новых классов функций. В тексте имеется одно, вообще говоря, неверное утверждение, которое в дальнейшем используется в правильной форме.

Ю. Д. Максимов

2849. **О росте многолистных функций.** **Хейман, Кеннеди** (On the growth of multivalent functions. Hayman W. K., Kennedy P. B.), J. London Math. Soc., 1958, **33**, № 3, 333—341 (англ.)

Пусть функция $f(z)$ регулярна в области Δ, $n(w)$ — число корней уравнений $f(z)=w$ в Δ, $p(R, \Delta, f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}n(Re^{i\varphi})\,d\varphi$, $W(R, \Delta, f)=\int_0^R p(t, \Delta, f)\,d(t^2)$.

Если

$$W(R, \Delta, f)\leqslant pR^2 \text{ для } 0<R<\infty, \qquad (1)$$

то функция $f(z)$ называется p-листной в среднем в области Δ.

Первая половина нижеследующей теоремы была доказана Спенсером (Spencer D. C., Trans. Amer. Math. Soc., 1940, **48**, 418—435), вторая Хейманом (Hayman W. K., Multivalent functions, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 48):

Теорема А. Пусть функция $f(z)$ регулярна и p-листна в среднем в круге $|z|<1$ и пусть

$$M(r, f)=\max_{|z|=r}|f(z)| \quad (0<r<1).$$

Тогда

$$M(r, f)=O\{(1-r)^{-2p}\} \quad (r\to 1). \qquad (2)$$

Кроме того, если

$$\limsup_{r\to 1}(1-r)^{2p}M(r, f)>0, \qquad (3)$$

то существует такое θ_0, $0\leqslant\theta_0<2\pi$, что $\liminf_{r\to 1}(1-r)^{2p}\times|f(re^{i\theta_0})|>0$.

В указанной работе Хейманом было также установлено неравенство

$$\log|f(re^{i\theta})|<O\left\{\left(\log\frac{1}{1-r}\right)^{1/2}\right\} \qquad (4)$$

для данного $\eta>0$ равномерно в области $\eta\leqslant|\theta-\theta_0|\leqslant\pi$ при $r\to 1$.

В настоящей работе авторы усиливают неравенство (4) следующим образом.

Теорема 1. Пусть функция $f(z)$ удовлетворяет условиям теоремы А и θ_0 имеет прежний смысл. Тогда в неравенстве (4) можно заменить O на o.

Теорема 2. Пусть $0<p<\infty$ и $\mu(r)\downarrow 0$ при $r\to 1$. Тогда существует функция $f(z)$, регулярная и p-листная в среднем в круге $|z|<1$, удовлетворяющая следующим условиям:

$$|f(r)|\sim\alpha(1-r)^{-2p} \quad (r\to 1),$$

$$\limsup_{r\to 1}\frac{\log|f(-r)|}{\mu(r)\{\log(1/(1-r))\}^{1/2}}>0,$$

где $\alpha>0$ и не зависит от r. Если p — целое число, то функцию $f(z)$ можно считать p-листной. И. Е. Базилевич

2850. **Заметка к принципу Фрагмена — Линделёфа.** **Фука** (Poznámka k Phragmén—Lindelöfovu principu. Fuka Jaroslav), Časop. pěstov. mat., 1959, **84**, № 1, 64—73 (чешск.; рез. русск., нем.)

Автор изучает в статье условия, при которых имеет место принцип Фрагмена — Линделёфа для субгармонических функций в области специального типа. Он занимается зависимостью допустимого роста функции (при приближении к особой точке на границе данной области) от геометрических свойств границы. Особое внимание уделяется случаю, когда данная особая точка является точкой возврата граничной жордановой кривой.

I. Černý

2851. **Об одном условии регулярности граничных точек в задаче Дирихле на плоскости.** **Гурский** (O pewnym warunku regularnosci punktów brzegowych w zagadnieniu Dirichleta na płaszczyźnie. Górski Jerzy), Zesz. nauk. Uniw. Jagiell., 1956, № 6, 3—9 (польск.; рез. русск., англ.)

Известный достаточный критерий регулярности граничной точки (а именно наличие неравенства $\overline{\lim_{r\to 0}}C(r)/r>0$, где $C(r)$ — емкость части границы в круге радиуса r с центром в рассматриваемой точке) доказывается в случае плоскости методом экстремальных точек (Leja F., Ann. Soc. polon. math., 1935, **18**, 4—11).

Н. С. Ландкоф

2852. **О функциях Бибербаха и Лебедева—Милина.** **Жень Фу-яо** (On the functions of Bieberbach and of Lebedev—Milin. Jen Fu-yao), Sci. Rec., 1958, **2**, № 4, 121—125 (англ.)

Пусть $w=f(z)$, $f(0)=(0)$, — функция, регулярная и однолистная в $|z|<1$. Обозначим: B — класс функ-

ций $f(z)$, удовлетворяющих условию $f(z_1)\cdot f(z_2)\neq 1$ для всяких z_1 и z_2 из $|z|<1$; L — класс функций $f(z)$, удовлетворяющих условию $f(z_1)f(z_2)\neq -1$ для всяких z_1 и z_2 из $|z|<1$.

Пусть r_1 и r_2 — фиксированные числа: $0<r_1<1$; $0<r_2<1$. В работе, опираясь на метод экстремальной длины, находятся максимум и минимум $|f(r_2)|$ в классах B и L при фиксированном $|f(-r_1)|$.

Н. А. Лебедев

2853. **К определению напряжений в цилиндрических валах с кольцевой выточкой. Положий, Скоробогатько** (До визначення напруг в циліндричних валах з кільцевою виточкою. Положій Г. М., Скоробогатько А. А.), Наук. зап. Київськ. ун-т, 1957, **16**, № 16, 165—170 (укр.; рез. русск.)

Метод мажорантных областей применяется для решения задачи об определении максимальных напряжений на поверхности цилиндрического вала с кольцевой выточкой гиперболической формы. Для достаточно глубоких выточек произвольной ширины получены оценки с точностью около 1% — 3%. Для очень узких и неглубоких выточек точность оценки значительно уменьшается.

Б. В. Боярский

2854. **Качественные методы решения задач математической физики. Положий, Пахарева** (Якісні методи розв'язання задач математичної фізики. Положій Г. М., Пахарева Н. О.), Наук. зап. Київськ. ун-т, 1957, **16**, № 16, 69—77 (укр.; рез. русск.)

Дается обзор разработанных как авторами, так и другими учеными вариационных принципов в решении некоторых задач теории плоской и осесимметрической фильтрации, теории кручения призматических стержней и др. Некоторые из приведенных результатов получены в самое последнее время и в полном изложении не опубликованы.

Б. В. Боярский

2855. **Единственность и устойчивость аналитических функций. Лаврентьев** (Uniqueness and stability of analytic functions. Lavrentieff M. M. Suomalais. tiedeakat. toimituks., 1958, Sar. AI, № 250/19, 6 pp.) (англ.)

Устанавливается количественное выражение классической теоремы единственности для аналитических функций. Пусть $f(z)$ аналитична в $|z|<1$, $A=\{a_l\}$ — последовательность чисел с условиями $|a_l|<|a_{l+1}|$, $|a_l|\leqslant|a|<1$. Если $|f(z)|\leqslant 1$ при $|z|<1$ и $|f(z)|\leqslant\varepsilon$, $z\in A$, то при $|z_0|<1$

$$|f(z_0)|\leqslant\left[\frac{|z_0|+|a|}{1+|a||z_0|}\right]^{\frac{n-1}{4}}.$$

Здесь n означает наибольшее число точек a_l, удовлетворяющих неравенствам

$$|a_{l_1}-a_{l_2}|\geqslant 4\pi\frac{1+|z_0|}{1-|z_0|}\ln\frac{1+|a||z_0|}{|z_0|+|a|}\cdot\frac{1}{|\ln\varepsilon|}.$$

Для функций $f(z_1, z_2)$ двух переменных, аналитических в области $|z_1|^2+|z_2|^2<1$, $z_1=x+iu$, $z_2=y+iv$, указываются условия на множество A точек (x, y), расположенных в круге $x^2+y^2<R<1$, при которых из неравенств $|f(z_1, z_2)|<1$, $|z_1|^2+|z_2|^2<1$, $|f(z_1, z_2)|\leqslant\varepsilon$ на множестве A, следует оценка $|f(x, y)|\leqslant\varphi(\varepsilon)$, в которой $\varphi(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$.

С. Н. Мергелян

2856. **О проблеме «$M(r)$». Кацнельсон** (Sur le problème «$M(r)$». Katznelson Yitzhak), C. r. Acad. sci., 1958, **246**, № 2, 211—213 (франц.)

Проблемой "$M(r)$" автор называет определение условий на числа $M_n>0$, необходимых и достаточных для того, чтобы однозначная функция $f(z)$, аналитическая всюду вне некоторого замкнутого множества $E\in(-\infty, \infty)$ и удовлетворяющая неравенствам $|f(z)z^n y|\leqslant M_n$, $z=x+iy$, $n\geqslant 0$ $z\overline{\in}E$, обращалась тождественно в нуль.

Для характеристики чисел M_n используется функция $M(r)=\inf\limits_{n\geqslant 0}M_n r^{-n}$.

В случае, когда $n\geqslant 0$ $E=(-\infty, \infty)$, проблема „$M(r)$" совпадает с классической проблемой Ватсона. Для широких классов замкнутых множеств E эта проблема детально изучалась С. Мандельбройтом и его учениками.

Устанавливается, что достаточным условием, близким к необходимому, является расходимость интеграла

$$\int^{\infty} S(e^{\sigma})\,e^{-V(\sigma)}d\sigma/G(\sigma),$$

где $S(e^{\sigma})=\sup\limits_{n\geqslant 0}(n\sigma-\ln M_n)$, а функция $V(\sigma)$, $G(\sigma)$ связаны только с множеством E.

С. Н. Мергелян

2857. **Конформное отображение односвязных римановых поверхностей. Хейнс** (The conformal mapping of simply-connected Riemann surfaces. II. Heins Maurice), Nagoya Math. J., 1957, **12**, 139—143 (англ.)

Согласно известной теоремы Радо риманова поверхность, определяемая как двумерное многообразие с конформными соотношениями соседства (Неванлинна Р., Униформизация, 1955, п. 2.23, РЖМат, 1956, 7313) удовлетворяет аксиоме счетности (см. там же, гл. IV, § 3). Опираясь на это, можно различными методами доказать основную теорему Римана о конформном отображении односвязных римановых поверхностей (см., например, Р. Неванлинна, там же, гл. VI и Heins M., Ann. Math., 1949, **50**, № 3, 686 — 690). В реферируемой работе приводится доказательство теоремы Римана, не опирающееся на свойство счетности римановой поверхности. Новое доказательство Хейнса представляет модификацию его прежнего доказательства (см. статью Хейнса, указанную выше, а также его статью: РЖМат, 1958, 4650). Для этого в прежние теоретико-потенциальные построения вводятся необходимые изменения, в основе которых лежит определение римановой поверхности как поверхности гиперболического (параболического) типа, если на ней существует (не существует) непостоянной неотрицательной субгармонической функции (Ahlfors L., Suomalais. tiedeakat, toimituks. Sar. AI, 1952, **125**.)

Л. И. Волковыский

2858. **Тип и топологическая структура границы односвязных римановых поверхностей. Зейберт** (Typus und topologische Randstruktur einfach-zusammenhängender riemannscher Flächen. Seibert Peter. Suomalais. tiedeakat. toimituks 1958. Sar., AI, № 250/34, 11 S., ill.) (нем.)

Пусть $w=f(z)$ — мероморфная функция, определенная в области $G: |z|<R\leqslant\infty$, а F — соответствующая ей риманова поверхность. Множество всех трансцендентных особенностей обратной функции $f^{-1}(w)$ (граничных элементов F) обозначается через Z. Определяемая в G метрика $\rho(z_1, z_2)$ (точное значение которой, так же как и упоминаемого ниже циклического порядка, приводится в РЖМат, 1958, 2873) переносится на F. Циклический порядок на окружности $|z|=R$ порождает соответствующий порядок в множестве Z. Таким образом Z можно рассматривать как топологическое пространство с введенным для его элементов некоторым соотношением порядка. Z изоморфно топологическому пространству Λ с циклическим порядком, если существует сохраняющее этот порядок топологическое отображение Z на Λ. Автором доказаны следующие утверждения:

1. Пусть Λ — произвольный дисконтинуум на окружности. В классе римановых поверхностей, которые соответствуют мероморфным функциям с одним асимптотическим значением, существует поверхность F параболического (гиперболического) типа, у которой Z изоморфно Λ.

2. Каково бы ни было замкнутое множество Λ на окружности существует поверхность параболического (гиперболического) типа, соответствующая мероморфной функции с числом асимптотических значений более одного, у которой Z изоморфно Λ. Из 2), в частности, следует, что существуют односвязные римановы поверхности параболического типа, у которых граница Z изоморфна континууму. Эти теоремы автора существенно дополняют известные результаты Гросса, Кирста и Мазуркевича (см. также РЖМат, 1957, 3045) о множестве асимптотических значений мероморфной функции.

Д. Б. Потягайло

2859. К связи между автоморфизм-функциями и типом поверхности. Хёльстрём (Zur Beziehung zwischen den Automorphiefunktionen und dem Flächentypus. Hällström Gunnar af. Acta Acad. aboensis. Math. et phys., 1956, **20**, № 10, 11 S., ill.) (нем.)

Автоморфизм-функциями (Automorphfiefunktionen, automorphism functions) или S-функциями заданной аналитической функции $f(z)$ называются такие функции $S(z)$, что $f(S(z)) \equiv f(z)$. При этом S-функция может быть однозначной, многозначной или ветвью многозначной функции. Если $f(z)$ мероморфна во всей конечной плоскости и $S(z)$ однозначна, то $S(z)$ обязательно линейная функция (Shimizu T., Japan J. Math., 1931, 8, 175—304). Поэтому, если $f(z)$ униформизирует односвязную риманову поверхность R и имеет однозначную нелинейную S-функцию, то R обязательно гиперболического типа. Пример такой поверхности, в связи с комплексом отрезков, был дан Фуре (Foures L., Ann. scient. École norm. supèr., III ser., 1952, **69**, 183—201). Теория S-функций обстоятельно изучалась автором в ряде статей (см., например, Hällström Gunnar af, Asta Acad. aboensis. Math. et phys., 1948—1949, **16**, № 4, 1—28). В реферируемой работе приводятся примеры однозначных S-функций, бесконечнолистных и конечнолистных. Показано, что для любого натурального n существуют поверхности R гиперболического типа с однозначными n-листными S-функциями. Приводится интересный пример бесконечносвязной поверхности гиперболического типа (с положительной границей), подобной однолистным. Все построения связаны с рассмотрением комплексов отрезков.

Л. И. Волковыский

2860. О топологической классификации римановых накрытий. Стойлов С., Ж. чистой и прикл. матем. Акад. РНР, 1956, **1**, № 2, 35—40

Воспроизводится содержание лекции, прочитанной автором на факультете естественных наук в Париже 30 ноября 1955 г. Рассматриваются римановы покрытия типа (I) (или Иверсена) $(V_0)_T^V$: они определяются внутренним отражением $p_0 = T(p)$ двумерного многообразия V в или на двумерное многообразие V_0 со следующим свойством: для любой простой дуги σ_0 на V_0 с концами a_0 и b_0 и любой точки $a \in T^{-1}(a_0)$ на V всегда существует простая дуга σ на V с концами a и b', причем $T(\sigma)$ и $T(b')$ расположены соответственно в любых заданных окрестностях σ_0 и b_0. Общие свойства римановых накрытий типа (I) приводят к известным теоремам для многих классов аналитических функций, порождающих такие накрытия, и тем самым выясняются топологические основания подобных теорем.

Л. И. Волковыский

2861. О продолжаемости аналитических множеств конечной площади. Штолль (Über die Fortsetzbarkeit analytischer Mengen endlichen Oberflächeninhaltes. Stoll Wilhelm), Arch. Math., 1958, **9**, № 3, 167—175 (нем.)

Замкнутое подмножество N комплексного многообразия A называется аналитическим, если оно локально определяется, как множество общих нулевых точек некоторого конечного множества голоморфных функций. Если A является открытым подмножеством некоторого объемлющего комплексного многообразия G, то аналитическое подмножество $\widetilde{N}$ многообразия G называется продолжением N, если $\widetilde{N} \cap A = N$.

Под комплексной размерностью $\dim_z N$ аналитического множества N в точке z понимается половина топологической размерности множества $N \cap U_z$, где U_z — некоторая достаточно малая окрестность точки z. Эта топологическая размерность всегда есть четное число. Величина $d(N) = \max_{z \in N} \dim_z N$ называется комплексной размерностью многообразия N. Если во всех точках $z \in N$ имеет место равенство $\dim_z N = d(N)$, то множество называется чисто или однороднораз мерным.

Пусть комплексные размерности многообразий G и A равны n; $S = G - A$ — комплексно q-мерное подмножество G; N — комплексно однородно p-мерное аналитическое подмножество A. Точка $P \in S$ называется регулярной для N, если она обладает такой (открытой) окрестностью $U_p \supset G$, что подмножество N может быть продолжено в $A \cap U_p$. Продолжение N в многообразие G возможно тогда и только тогда, когда все точки S регулярны для N. В этом случае продолжение N в G совпадает с замыканием N в G. Указанное условие заведомо выполнено и продолжение всегда возможно, если $p > q$. Сказанное имеет место и при $p = q$, если дополнительно известно, что каждая неприводимая часть S содержит по крайней мере одну точку, регулярную для N. В случае $q > p$ необходимое условие для продолжаемости N в G состоит в конечности площади $I(K \cap N)$ относительно какой-нибудь римановой метрики на G. Здесь K — произвольное компактное подмножество многообразия G (см. работу автора РЖМат, 1955, 4997). В работе для случая $p = q$ доказывается: Если на G форма $\chi_2 = \frac{i}{2} \sum_{\mu,\nu=1} g_{\mu\nu} dz_\mu \wedge d\bar{z}_\nu$ определяет непрерывную и продолжительную эрмитову метрику, $\chi_{2p} = \frac{1}{p!} \bigwedge_{\nu=1}^{p} \chi_2$ и $I(K \cap N) = \int_{K \cap N} \chi_{2p} < \infty$ для любого компактного подмножества K многообразия G, то все точки S регулярны для N. Автор высказывает предположение, что эта теорема верна и при $q > r$.

Б. А. Фукс

2862. Характеристика областей Рунге с помощью плюрисубгармонических функций. Бремерман (Die Charakterisierung Rungescher Gebiete durch plurisubharmonische Funktionen. Bremermann Hans J.), Math. Ann., 1958, **136**, № 2, 173—186 (нем.)

Область голоморфности $D \subset C^n$ называется областью Рунге относительно области голоморфности $D^* \supset C^n$ (в этом случае пишут $D \Re D^*$), если $D \subset D^*$ и алгебра функций, голоморфных в области D^*, является плотной в алгебре функций, голоморфных в области D (в смысле топологии, определяемой с помощью равномерной сходимости внутри области D; в рассматриваемом случае всякая функция, голоморфная в D, может быть аппроксимирована и притом равномерно внутри D функциями, голоморфными в D^*).

Доказывается, что:

1) $D \Re D^*$ в том и только в том случае, если область D псевдовыпукла относительно D^*. Последнее означает, что существует последовательность областей $D_\nu = \{V_\nu(z) < 0\}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, удовлетворяющих условиям: $D_\nu \subset D_{\nu+1} \subset D$, $\lim_{\nu \to \infty} D_\nu = D$. Здесь $V_\nu(z)$ — плюрисубгармонические функции в области D^*.

2) Пусть область $D = \{V(z) < 0\}$, где $V(z)$ — плюрисубгармоническая функция в некоторой окрестности области D. Тогда банахова алгебра функций, голоморф-

ных в области D и непрерывных в замкнутой области $\overline{D}$, плотна в алгебре всех функций, голоморфных в области D (в смысле топологии, определяемой с помощью равномерной сходимости внутри области D).

В работе указывается на большое значение для рассматриваемого круга вопросов понятия границы „в смысле Г. Е. Шилова" (иначе шиловской границы) некоторой области D, относительно какого-то класса функций $\mathfrak{C}$, полунепрерывных сверху в замкнутой области $\overline{D}$. Граница в смысле Шилова $S_{\mathfrak{C}}(D)$ — это подмножество замкнутой области $\overline{D}$ со следующими свойствами: 1) если функция $\varphi\in\mathfrak{C}$ удовлетворяет условию $\varphi\leqslant M$, где M — постоянная величина на $S_{\mathfrak{C}}(D)$, то $\varphi\leqslant M$ всюду на $\overline{D}$; 2) всякое другое подмножество замкнутой области, обладающее свойством 1), содержит множество $S_{\mathfrak{C}}(D)$. Как известно (см. принадлежащее Г. Е Шилову, Дополнение IV к статье Гельфанда, Райкова и Шилова, Успехи матем. наук, 1946, вып. 12, 136—146), подобная граница $S_{\mathfrak{C}}(D)$ существует, если $\mathfrak{C}$ — банахова алгебра действительно- или комплекснозначных функций, непрерывных в замкнутой области $\overline{D}$. В реферируемой работе доказываются следующие теоремы:

1) Пусть $D\Re D^*$ и $D\supset D^*$, $\mathfrak{C}_{\overline{D}}$ — класс модулей функций, голоморфных в области D и непрерывных в замкнутой области $\overline{D}$, $\mathfrak{C}_{D^*}$ — класс модулей функций, голоморфных в области D^*. Тогда $S_{\mathfrak{C}_{\overline{D}}}(D)=S_{\mathfrak{C}_{D^*}}(D)$.

2) Пусть область $D=\{V(z)<0\}$, где $V(z)$ — плюрисубгармоническая функция в некоторой окрестности $U(D)$ области D. Тогда область D имеет границу $S(D)$ в смысле Шилова относительно класса функций плюрисубгармонических в области $U(D)$ Эта граница $S(D)$ совпадает с границей области D в смысле Шилова относительно банаховой алгебры $\mathfrak{C}_{\overline{D}}$, состоящей из функций голоморфных в области D и непрерывных в замкнутой области $\overline{D}$.

Отмечается, что существуют области (не являющиеся областями голоморфности), для которых утверждение последней теоремы не имеет места. Автор указывает, что примеры подобных областей приведены в его статье, опубликованной в Air Force Report, Princeton 1957.

В заключение указывается, что основной результат работы, приведенный в реферате под номером 1), справедлив для голоморфнополных комплексных многообразий (иначе, многообразий Штейна). Полного доказательства этого утверждения не приводится.

Делается также предположение, что методы исследования и результаты работы могут быть распространены и на голоморфно полные комплексные пространства. Б. А. Фукс

2863. Интерполяционные проблемы для функций многих комплексных переменных. Спрингер (Interpolation problems for functions of several complex variables. Springer George), J. Math. and Mech., 1958, 7, № 6, 957—962 (англ.)

Пусть D (($E\subset C^n$, где D — ограниченная область, E — область голоморфности в пространстве C^n n комплексных переменных z, $L^2(D)$ — класс функций, голоморфных в D и удовлетворяющих условию $\|g\|^2=\int_D |g|^2 dV<\infty$ (dV — элемент объема), $M\subset E$ — некоторое комплексно-аналитическое многообразие комплексной размерности $n-1$, f — функция, голоморфная в E, обращающаяся в нуль на M и отличная от торжественного нуля. Рассматриваются классы функций $H^2_M(D)$ и $L^2_M(D)$. Голоморфная в области D функция h, удовлетворяющая условию $\|h\|<\infty$, принадлежит к классу $H^2_M(D)$. если $h=g+\varphi f$, где g, $\varphi\in L^2(D)$. Эта функция $h\in L^2_M(D)$, если $h=cg+\varphi f$, где $g+f\varphi\in H^2_M(D)$ и C — комплексная постоянная. Легко видеть, что класс $L^2_M(D)\supset H^2_M(D)$ и является линейным пространством; класс $H^2_M(D)$ таковым не является.

В работе находится функция $h_0\in H^2_M(C)$, имеющая минимальную норму $\|h\|$, эта функция выражается через кернфункцию Бергмана K_f области D с весом $|f|$. Далее приводится соотношение, связывающее K_f с кернфункцией K_M области D, вычисленной для класса $L^2_M(D)$.

Полученные соотношения распространяются на функции g, мероморфные в области D, обладающей границей Шилова $S_{\mathfrak{C}}(D)$ специального вида относительно класса $\mathfrak{C}$ функций, голоморфных в D и непрерывных в $\overline{D}$. В этом случае $\|g\|$ определяется интегрированием по $S_{\mathfrak{C}}(D)$ (Определение границы в смысле Шилова см. реф. 2862). Б. А. Фукс

2864. О проблеме Леви и о вложении вещественно-аналитических многообразий. Грауэрт (On Levi's problem and the imbedding of real-analytic manifolds. Grauert Hans), Ann. Math., 1958, 68, № 2, 460—472 (англ.).

Пусть $\mathfrak{W}$ — комплексное многообразие, G — относительно компактное открытое множество в $\mathfrak{W}$. Область G называется псевдовыпуклой, если для всякой точки ее границы ∂G существует окрестность U в $\mathfrak{W}$ и в ней конечное число вещественных функций φ_l класса C^2 таких, что $d\varphi_l\neq 0$ в U, $G\cap U$ задается неравенствами $\varphi_l(x)<0$, для всякого вектора $(a_1,\ldots,a_n)$, удовлетворяющего равенствам $\sum\frac{\partial\varphi_l}{\partial z^\nu}a_\nu=0$, имеем $L(\varphi_l)\equiv\sum\frac{\partial^2\varphi_l}{\partial z^\nu\,\partial\overline{z}^\mu}a_\nu\overline{a}_\mu\geqslant$ на $\partial G\cap U$ (z^ν — комплексные координаты в U). Если существуют такая окрестность U и такие функции φ_l, что $L(\varphi_l)>0$ при $(a_1,\ldots,a_n)\neq 0$, то G называется псевдовыпуклой в сильном смысле. Доказывается, что всякая псевдовыпуклая в сильном смысле область является голоморфно выпуклой. Отсюда следует, что всякая псевдовыпуклая область комплексного афинного пространства является областью регулярности (это было доказано в 1954 г. Ока, Норге и Бремерманом, РЖМат, 1956, 2167). Доказывается также, что если в псевдовыпуклой в сильном смысле области G существует плюрисубгармоническая в сильном смысле функция, то G является многообразием Штейна. Этот результат используется для доказательства того, что всякое паракомпактное вещественно-аналитическое многообразие $\Re$ допускает свойственное аналитическое регулярное вложение в евклидово пространство R^k достаточно высокой размерности k (для компактных многообразий это было доказано в 1957 г. Морри, РЖМат, 1959, 5786). Доказано также, что если K (соответственно, K_1) — наименьшее из таких чисел k, что $\Re$ допускает свойственное аналитическое регулярное вложение (соответственно, свойственное регулярное вложение класса C^1) в R^k то $K=K_1\leqslant 2\dim\Re$. А. Л. Онищик

2865. Об одном классе устранимых особенностей. Лелон (Sur une classe de singularités impropres. Lelong Pierre), Arch. Math., 1958, 9, № 3, 161—166 (франц.)

Работа примыкает к статье автора (РЖМат, 1959, 9952). Сохраняются обозначения и терминология этой статьи.

Замкнутая часть E области $D \subset C^n$, где C^n — пространство n комплексных переменных $z_1, \ldots, z_n$, принадлежит к классу L_n; 1) для $n=1$, если множество E пусто, 2) для $n=2$, если множество E проектируется в подпространство $C^1(z_1)$ на действительно полярное в пространстве $R^2 = C^1(z_1)$ множество e; при этом сечения множества E плоскостями $C^1(z_2) = \{z_1 = \text{const}\}$ должны быть или действительно полярны или пусты; 3) для $n > 2$, если для каждого полицилиндра $P\{|z_k - z_k^0| < r_k,\ 1 \leqslant k \leqslant n\}$ пересечение $P \cap E$ проектируется в пространство $R^{2n-2} = C^{n-1}(z_1, \ldots, z_{n-1})$ на действительно полярное множество e; при этом сечения $P_{|}E$ плоскостями $C^1(z_n)$ должны быть или пусты, или действительно полярны в пространстве $R^2 = C^1(z_n)$, или представлять собой полный круг $\{|z_n - z_n^0| < r_n\}$; последняя возможность может иметь место лишь для множества плоскостей, проектирующихся в пространство $C^{n-1}(z_1, \ldots, z_{n-1})$ на действительно полярное множество $e_1 \subset e$; здесь $e_1 \in L_{(n-1)}(p)$, где $p = \{|z_j - z_j^0| < r_j,\ 1 \leqslant j \leqslant n-1\}$.

Через $L_n(D)$ обозначается множество замкнутых частей области D, принадлежащих к классу L_n.

В работе доказывается:

Теорема. Если D — односвязная область в пространстве C^n и $E \subset L_n(D)$, то область $D - E$ также односвязна.

В качестве следствия из этой теоремы автор получает следующее предложение:

Теорема. Пусть V (не обязательно однозначная) плюрисубгармоническая функция в области $G = D - E \subset C^n$, где $E \subset L_n(D)$. Тогда в любой окрестности каждой точки $M \in E$ можно найти такой полицилиндр $P_M \in D$, что 1) $P_M - E$ оказывается односвязной областью; 2) каждая ограниченная сверху в окрестности E ветвь функции V может быть продолжена на весь полицилиндр P_M.

Аналогичное утверждение доказывается для комплексно-аналитических многообразий. Б. А. Фукс

2866. Об ограниченных функциях многих комплексных переменных. Одзаки, Мацуно (Note on bounded functions of several complex variables. Ozaki Shigeo, Matsuno Takeshi), Sci. Repts Tokyo Kyoiku Daigaku, 1956, **A5**, 25 Febr., 130—136 (англ.)

Доказываются следующие предложения: Пусть $W(Z)$ и Z — (m, n)-матрицы. Если при $\|Z\| < 1$ функция $W(Z)$ регулярна и удовлетворяет условию $\|W\| < 1$, то

$$\frac{\|dW\|}{\|dZ\|} \leqslant \frac{\sqrt{\|E_n - W^*W\|\ \|E_m - WW^*\|}}{1 - \|Z\|^2} \leqslant \frac{1}{1 - \|Z\|^2}.$$

Здесь E_n и E_m — квадратные единичные матрицы соответственно порядков n и m.

Если $m = n$, то

$$\frac{\sigma(W(0)) - \|Z\|}{1 - \sigma(W(0))\,\|Z\|} \leqslant \sigma(W(Z)) \leqslant \frac{\sigma(W(0)) + \|Z\|}{1 + \sigma(W(0))\,\|Z\|}.$$

Здесь $\sigma(W) = \min |\sqrt{\sigma_k(W)}|$, где $\sigma_k(W)$ — характеристические числа для W^*W. Б. А. Фукс

2867. Теорема Фату для функций, гармонических в полупространстве. Геринг (The Fatou theorem functions harmonic in a half-space. Gehring F. W.), Proc. London Math. Soc., 1958, **8**, № 29, 149—160 (англ.)

Рассматриваются гармонические функции $u = u(x, y, z)$ в полупространстве $D: z > 0$. Обозначим через H^+ класс функций u, неотрицательных в D, а через H — класс функций u, представимых в виде разности двух функций из H^+. Известно, что $u \in H$ тогда и только тогда, когда на представима в виде

$$u(x, y, z) = kz + \frac{z}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu(\xi, \eta)}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2]^{3/2}},$$

где k — постоянная, а μ — функция множества, определенная на всех борелевских множествах плоскости $z=0$ и такая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|d\mu(\xi, \eta)|}{[1 + \xi^2 + \eta^2]^{3/2}} < \infty.$$

В случае класса H^+ добавляется условие $k \geqslant 0$, $\mu \geqslant 0$.

В более ранней работе (РЖМат, 1959, 6830) автор доказал ряд теорем абелева и тауберова типа для функций классов H и H^+ в верхней полуплоскости. В настоящей работе такие теоремы доказываются для случая полупространства. Будем говорить, что $D\mu(0, 0) = A$, если

$$D_\mu(0, 0) = \lim_{t \to 0+} \frac{1}{\pi t^2} \int_0^{2\pi}\int_0^t d\mu(r, \theta).$$

Будем писать $D^*\mu(0, 0) = A$, если

$$\lim_{t \to 0+} \frac{1}{\pi t^2} \int_\alpha^\beta\int_0^t d\mu(r, \theta) = \frac{\beta - \alpha}{2\pi} A$$

для всех $\alpha < \beta$ и если существует постоянная B такая, что

$$\left| \frac{1}{\pi t^2} \int_\alpha^\beta\int_0^t d\mu(r, \theta) \right| \leqslant B < \infty$$

для всех $\alpha < \beta < \alpha + 2\pi$ и достаточно малых t.

Приведем формулировки четырех теорем.

Теорема 1. Пусть $u(x, y, z) \in H$ и $D\mu(0, 0) = A$. Тогда $\lim u(0, 0, z) = A$ при $z \to 0+$.

Теорема 2. Пусть $u(x, y, z) \in H^+$ и $\lim u(0, 0, z) = A$ при $z \to 0+$. Тогда $D\mu(0, 0) = A$.

Теорема 3. Пусть $u(x, y, z) \in H$ и $D^*\mu(0, 0) = A$. Тогда $\lim u(x, y, z) = A$, когда $(x, y, z) \to (0, 0, 0)$ вдоль любого луча в полупространстве $z > 0$.

Теорема 4. Пусть $u(x, y, z) \in H^+$ и $\lim u(x, y, z) = A$, когда $(x, y, z) \to (0, 0, 0)$ вдоль любого луча в полупространстве $z > 0$. Тогда $D^*\mu(0, 0) = A$.

Е. Д. Соломенцев

2868. Теория комплексных функций с обобщенными матрицами Дирака как комплексными единицами. I. Такасу (A complex function theory with generalized Dirac matrices as complex units. I. Takasu Tsurusaburo), Yokohama Math. J., 1954, **2**, № 2, 107—126 (англ.)

В случае алгебры кватернионов над полем действительных чисел с базисом γ_k ($k = 0, 1, 2, 3$), где $\gamma_0 = 1$, $\gamma_1\gamma_2 = -\gamma_2\gamma_1 = \gamma_3$; $\gamma_k^2 = -\gamma_0$, $k = 1, 2, 3$, выводятся условия моногенности (справа и слева) кватернионных функций от действительных переменных: x^0, x^1, x^2, x^3 относительно переменной $\zeta = \sum_{k=0}^{3} \gamma_k x^k$.

Примечание референта. Эти условия моногенности кватернионных функций были уже давно даны акад. Н. М. Крыловым (Докл. АН СССР, 1947, **55**, № 9, 799 — 800) и А. С. Мейлихзоном (Докл. АН СССР, 1948, **59**, № 3, 431 — 434), доказавшим, что лишь линейные функции от ζ являются моногенными относительно ζ. Эти исследования остались, по-видимому, совершенно неизвестными автору и он не приводит указанной теоремы Мейлихзона. Автор рассматривает также случай

$\gamma_1^2 = \gamma_2^2 = \gamma_0$ — случай гиперболических кватернионов, по его терминологии. Изучаются некоторые алгебраические и геометрические свойства кватернионов и степенных кватернионных рядов. Библ. 17 назв.

В. С. Федоров

2869 Д. О расположении особых точек функций, представимых рядами полиномов Дирихле. Ковшов А. И. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Горьковск. ун-т, Горький, 1958

2870 Д. Об одном классе рациональных интерполяционных рядов. Миронов В. Т. Автореф. дисс. докт. физ.-матем. н., Казанск. ун-т, Саратов, 1959

2871 Д. Асимптотические оценки для одного класса рядов по рациональным дробям. Клюев В. В. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, М., 1958

2872 Д. Дифференциальные граничные задачи теории функций комплексного переменного. Исаханов Р. С. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Тбилисск. матем. ин-т, Вычисл. центр АН ГрузССР, Тбилиси, 1959

См. также: 2789, 2890, 2891, 2904, 3010, 3017, 3018, 3237, 3246, 3373.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Редакторы *В. В. Немыцкий, Н. И. Мозжерова*

2873. Новая теория, относящаяся к нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям с характеристическими функциями. Ли Го-пин, Шусюэ сюэбао, 1954, 4, № 4, 467—477 (кит.)

2874. Единственность решения одной специальной задачи для системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений. Бекташи Т. Г., Элми эсэрләр. Азәрб. унив., Уч. зап. Азерб. ун-т, 1958, № 4, 33—37 (рез. азерб.)

Для системы двух дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{dx^2} &= f(x, u, u', v), \\ \frac{dv}{dx} &= g(x, u, u', v) \end{aligned} \tag{1}$$

относительно одной неизвестной задаются краевые условия

$$\begin{cases} u(a) = u_a, \\ u(b) = u_b, \end{cases} \tag{2}$$

а относительно другой — начальное условие

$$v(a) = v_a, \tag{3}$$

где u_a, u_b, v_a — заданные числа.

Доказывается следующая теорема: Пусть правые части системы (1) непрерывны в области D: $a \leqslant x \leqslant b$; $-\infty < u < +\infty$; $-\infty < u' < +\infty$; $-\infty < v < +\infty$. В каждой конечной части области D для правых частей системы (1) выполняется условие Липшица по переменным u, u', v. Функция f возрастает относительно u и не убывает относительно v. Функция g возрастает относительно u и относительно u'. Тогда решение системы (1), удовлетворяющее краевым и начальному условиям (2) и (3), единственно. Г. А. Каменский

2875. О существовании решения одной специальной задачи для системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений. Бекташи Т. Г., Элми эсэрләр. Азәрб. унив., Уч. зап. Азерб. ун-т, 1958, № 5, 3—16 (рез. азерб.)

Методом С. Н. Бернштейна доказывается теорема: Пусть правые части системы

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{dx^2} &= f\left(x, u, \frac{du}{dx}, v\right) \\ \frac{dv}{dx} &= g\left(x, u, \frac{du}{dx}, v\right) \end{aligned} \tag{1}$$

и их частные производные по u, u', v непрерывны в области D: $a \leqslant x \leqslant b$; $-\infty < u < +\infty$; $-\infty < u' < +\infty$; $-\infty < v < +\infty$; существует такое число $k > 0$, такие ограниченные в каждой конечной части области $a \leqslant x \leqslant b$; $-\infty < u < +\infty$; $-\infty < v < +\infty$ функции $\alpha(x, u, v)$ и $\beta(x, u, v)$ и такая интегрируемая на $[a, b]$ функция $\psi(x) \geqslant 0$, что в области D выполняются условия:

$$\frac{\partial f}{\partial u} \geqslant k, \quad \frac{\partial f}{\partial v} \geqslant 0, \quad \frac{\partial g}{\partial u} > 0, \quad \frac{\partial g}{\partial u'} > 0,$$

$$|f(x, u, u', v)| \leqslant \alpha(x, u, v)\, u'^2 + \beta(x, u, v),$$

$$|g(x, u, u', v)| \leqslant \psi(x).$$

Тогда существует единственное решение системы (1), удовлетворяющее следующим краевым и начальному условиям: $u(a) = u_a$, $u(b) = u_b$, $v(a) = v_a$, где u_a, u_b, v_a — заданные числа. Г. А. Каменский

2876. Об интегрировании обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка посредством преобразования Лапласа. Винтнер (On the integration of ordinary linear differential equations of second order by means of Laplace transforms. Wintner Aurel), Rev. mat. hisp.-amer., 1958, **18**, № 1-2, 71—80 (англ.)

Пусть T — класс вполне монотонных на $(0, +\infty)$ функций $h(x)$, т. е. $(-1)^n h^{(n)}(x) \geqslant 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ при $0 < x < +\infty$ и S — класс положительных на $(0, +\infty)$ функций $g(x)$ таких, что $g'(x) \in T$. Доказывается теорема: Если $f(x) \in S$ и $t(x) = \int_{+0}^{x} f(v)\, dv$ определена на $(0, +\infty)$, то линейное дифференциальное уравнение $y'' - f(x)y = 0$ имеет единственное (с точностью до постоянного множителя) решение вида

$$y = \int_0^{+\infty} e^{-t(x)u}\, d\mu(u),$$

где $d\mu(u) \geqslant 0$ при $0 \leqslant u < +\infty$. Аналогичная теорема, с известными усложнениями, имеет место также для дифференциального уравнения

$$y'' - g(x)\, y' - f(x)\, y = 0,$$

где $g(x) \in T$ и $f(x) \in T$. В заключение исследуются некоторые интегральные представления функций.

Б. П. Демидович

2877. Новый метод решения нелинейных и линейных с переменными коэффициентами уравнений в полных производных. Нахождение периодических решений. Куликов Н. К., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, № 4, 140—152

Рассматривается нелинейное дифференциальное уравнение

$$\varphi(x^{(n)}, x^{(n-1)}, \ldots, x', x, t) = f(t), \tag{1}$$

где φ — непрерывно дифференцируемая функция своих аргументов и $f(t)$ — непрерывная функция, причем $\varphi_x \neq 0$. Предлагается общее решение уравнения (1) искать в следующей специальной форме:

$$\left.\begin{aligned} \psi &= \sum_{j=1}^{n} c_j(t)\, e^{r_j t} + z^*, \\ x^{(k)} &= \sum_{j=1}^{n} c_j(t)\, r_j^k\, e^{r_j t} + z^*(k) \\ &(k = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

где

$$\psi = \frac{1}{\psi_x}\left[\varphi - \sum_{k=1}^{n} x^{(k)} \varphi_{x^{(k)}}\right],$$

$c_j(t)$ — некоторые неизвестные функции, $r_1, \ldots, r_n$ — корни характеристического уравнения

$$\sum_{k=0}^{n} \varphi_{x^{(k)}}\, r^k = 0 \quad (x^{(0)} = x) \qquad (3)$$

(предполагается их некратность) и z^* — частные решения уравнения

$$\sum_{k=0}^{n} \varphi_{x^{(k)}}\, z^{(k)} = f(t) \quad (z^{(0)} = z). \qquad (4)$$

Функции $c_j = c_j(t)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ определяются из системы дифференциальных уравнений вида

$$\sum_{j=1}^{n} c_j'(t)\, r_j^k e^{r_j t} = f_k(t, x, x', \ldots, x^{(n)}, r_1, \ldots, r_n, r_1, \ldots, r_n, c_1, \ldots, c_n)$$
$$(k = 0, 1, \ldots, n-1), \qquad (5)$$

линейных относительно $c_1, \ldots, c_n$, получающихся из соотношений (2) путем дифференцирования их по t. Формулы (2) прилагаются к нахождению периодических решений нелинейных автономных систем. Рассматриваются также конкретные примеры.

Примечание референта. По-видимому, в левой части уравнения (1) должна отсутствовать переменная t, так как в противном случае непонятно, что понимать под правой частью $f(t)$ этого уравнения. Функции $c_j = c_j(t)$ в общем случае могут быть определены из системы (5) только тогда, когда известно решение $x = x(t)$ исходной системы (1). С этой точки зрения не ясно, в каком смысле автор называет соотношения (2) „общим решением“ системы (1).

Б. П. Демидович

2878. Решение матричного уравнения $\frac{dU}{dt} = pU$ с помощью бесконечного произведения матричных экспонент. Фер (Résolution de l'équation matricielle $\frac{dU}{dt} = pU$ par produit infini d'exponentielles matricielles. Fer F.), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1958, **44**, № 10, 818—829 (франц.)

Если p и U — квадратные матрицы, то искомое решение представляется в виде

$$U = e^{P} e^{P_1} \ldots e^{P_n} \ldots, \qquad (1)$$

где

$$P_n = \int_0^t p_n dt, \quad p_n = e^{-P_{n-1}}\, p_{n-1}\, e^{P_{n-1}} + \int_0^{-1} e^{tP_{n-1}}\, p_{n-1}\, e^{-tP_{n-1}}\, dt.$$

Указаны оценки области сходимости (1). Приведены вычисления для уравнений Матье и Хилла.

Р. Э. Виноград

2879. Линейная теория внутреннего трения. А. Теория периодических колебаний систем с одной степенью свободы. Часть I. Бабушка Иво (Babuška Ivo), Aplikace mat., 1959, **4**, № 3, 177—202 (русск.; рез. чешск., нем.)

Доказывается существование и единственность l-периодического решения уравнения

$$my'' + Ay = g. \qquad (1)$$

При этом A — оператор, определенный равенством $Ay = (Dy)'' + \varphi(y)$, где D — линейный, вполне непрерывный оператор, отображающий пространство непрерывных l-периодических функций C_l в себя, φ — линейный функционал в C_l, и требуется выполнение следующих условий: если

$Ay = 0$, то $y = 0$; $\int_0^l y'(Dy)''\, dt > 0$ для $y \in C_l$, $y \neq \text{const}$.

Все производные и условие (3) интерпретируются с точки зрения обобщенных функций; g предполагается в форме $g = f'' + C$, где $C = \text{const}$, $f \in C_l$, $\int_0^l f dt = 0$. Если y — деформация и Ay — соответствующее напряжение, то уравнение (1) описывает вынужденные колебания при наличии внутреннего трения, и предположения об операторе A охватывают широкий класс гипотез об операторе внутреннего трения.

Доказывается, что существует не более одного l-периодического решения уравнения (1) и что уравнение (1) эквивалентно уравнению

$$my(t) = -Dy - \frac{1}{2}\varphi y t^2 + f(t) + \frac{1}{2} Ct^2 + \frac{1}{2}\varphi y t l - \frac{1}{2} Clt + \frac{m}{l}\int_0^l y(\tau)\, d\tau. \qquad (2)$$

Доказательство существования l-периодического решения уравнения (2) сводится к применению альтернативы Фредгольма. При помощи метода суммирования Чезаро обосновывается метод расчета вынужденных колебаний.

J. Kurzweil

2880. О простых субгармониках. Сюй (On simple subharmonics. Hsu C. S.), Quart. Appl. Math., 1959, **17**, № 1, 102—105 (англ.)

Рассматривается уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x) = P_0 \sin \omega t. \qquad (1)$$

Решение этого уравнения называется простой субгармоникой порядка r, если оно имеет вид $x = x_0 \cos \frac{\omega t}{r}$, где r — целое число. В случае, если (1) имеет простую субгармонику порядка r, оно может быть переписано в виде

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \frac{1}{r^2}\xi + kT_r(\xi) = k \cos \tau, \qquad (2)$$

где $T_r(\xi)$ — полином Чебышева первого рода степени r. Уравнение (2) может быть получено из линейного уравнения

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} + (1 + k)\xi = k \cos \tau \qquad (3)$$

путем замены $\xi = T_r(\eta)$.

Таким образом автор показывает, что любое уравнение, имеющее простую субгармонику, может быть получено из линейного несложной заменой переменного.

В. А. Плисс

2881. Теоремы о монотонности и колеблемости решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Бихари (Oscillation and monotonity theorems concerning non-linear differential equations of the second order. Bihari I.), Acta math. Acad. scient. hung., 1958, **9**, № 1-2, 83—104 (англ.)

Изучаются свойства решений уравнения

$$y'' = f(x, y, y'). \qquad (1)$$

Наиболее существенными являются следующие теоремы:

Теорема I.

1) пусть $f(x, y, y') = \varphi(x) f(y) h(y')$, где $\varphi(x)$ — непрерывная, положительная, возрастающая ограниченная функция при $x \geqslant a$;

2) $f(y)$ — нечетная, неубывающая функция, $f(y) \in \mathrm{Lip}\,(1)$ при $|y| < b$;

3) $h(u)$ не убывающая для $u \leqslant 0$ и не возрастающая для $u \geqslant 0$ положительная функция, $h(u) \in \mathrm{Lip}\,(1)$ для всех u. Тогда уравнение (1) имеет единственное решение, удовлетворяющее начальным условиям: $y(a) = \eta$, $y'(a) = 0$ $(0 < |\eta| \leqslant b)$; это решение существует для всех $x \geqslant a$, имеет бесчисленное множество нулей; амплитуда его убывает, но не стремится к 0, производная y' ограничена. Эта теорема обобщается на случай нераспадающейся функции $f(x, y, y')$. Именно, доказана

Теорема II.

Пусть $f(x, y, u)$ определена для $x \geqslant a$ и произвольных y и u; пусть, далее,

1) $f(x, y, u)$ непрерывна и $\operatorname{sgn} f(x, y, u) = -\operatorname{sgn} y$;

2) $f_x(x, y, u)$, $f_y(x, y, u)$, $f_u(x, y, u)$ существуют и непрерывны;

3) $\operatorname{sgn} f_x = -\operatorname{sgn} y$;

4) $f_y(x, y, u) < 0$;

$$f_u(x, y, u) = \begin{cases} > 0, & \text{если } \operatorname{sgn} u = \operatorname{sgn} y \neq 0, \\ 0, & \text{если } y = 0, \\ < 0, & \text{если } \operatorname{sgn} u = -\operatorname{sgn} y \neq 0 \end{cases}$$

$(x \geqslant a)$;

5) существует положительная функция $\Phi(u)$ $(u \geqslant 0)$, удовлетворяющая условиям:

$$|f(x, y, u)| \leqslant \Phi(|u|), \quad \int_0^{\infty} \frac{u}{\Phi(u)}\, du = +\infty.$$

Тогда существует для $x \geqslant a$ единственное решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям $y(a) = \eta \neq 0$, $y'(a) = 0$, и имеющее бесчисленное множество нулей.

Теорема III.

Рассматриваются два уравнения

$$y'' + \varphi(x) f(y) h(y') = 0, \qquad (1)$$

$$\eta'' + \psi(x) f(\eta) h(\eta') = 0. \qquad (2)$$

Пусть

1) $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — положительные, непрерывные, возрастающие, ограниченные функции на $[a, b]$ и $\varphi(x) \geqslant \psi(x)$, но $\varphi(x) \not\equiv \psi(x)$ на каждом частичном интервале $\subset [a, b]$; $\varphi(x) - \psi(x) \geqslant O(x - a)$, $x \to a + 0$.

2) $f(u) \in \mathrm{Lip}\,(1)$, $f(u)$ — возрастающая функция, $\operatorname{sgn} f(u) = \operatorname{sgn} u$, $\frac{f(u)}{u} = O(1)$, $(u \to 0)$, $\frac{f(u)}{u}$ не возрастает при $u > 0$ и не убывает при $u < 0$ (например, $f(u) \equiv \operatorname{arctg} u$),

3) $h(u) > 0$ — четная не возрастающая функция для $u > 0$, не убывающая для $u < 0$ и $h(u) \in \mathrm{Lip}\,(1)$,

4) пусть $y(x)$ и $\eta(x)$ — колеблющиеся решения уравнений (1) и (2) соответственно и $y(a) \geqslant 0$, $\eta(a) \geqslant 0$, $y'(a) > 0$, $\eta'(a) > 0$, $y(b) = 0$,

$$\eta'(a)\, y(a) - y'(a)\, \eta(a) \geqslant 0.$$

Тогда $\frac{\eta(x)}{y(x)}$ возрастает на $(a, b]$ и в предположении $\eta(a) \geqslant y(a)$ мы имеем: $\eta'(x) > y'(x)$ $(a < x < x_{m_\eta} + \delta)$ и $x_{m_\eta} > x_{m_y}$, где δ — определенное положительное число, x_{m_η}, x_{m_y} — абсциссы точек максимумов $\eta(x)$ и $y(x)$; наконец, $\eta(x) > y(x)$ $(a < x \leqslant b)$. Р. С. Гусарова

2882. **О сходимости последовательных приближений в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, II. Люксембург** (On the convergence of successive approximations in the theory of ordinary differential equations, II. Luxemburg W. A. J.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wet., 1958, **A61**, № 5, 540—546; Indagationes math., 1958, **20**, № 5, 540—546 (англ.)

Ч. I см. РЖМат, 1959, 6867.

Рассматривается начальная задача

$$x'(t) = f(t, x(t)),\ x(t_0) = x_0, \qquad (1)$$

где t, x — действительные переменные, f — действительная функция, определенная и непрерывная в области $R\{|t - t_0| \leqslant a,\ |x - x_0| \leqslant b\}$ $(a, b > 0)$. Предполагается, что функция $f(t, x)$ в R удовлетворяет условиям:

1) $|t - t_0|\,|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leqslant k\,|x_1 - x_2|$, $k > 0$;

2) $|t - t_0|^{\beta}\,|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leqslant A\,|x_1 - x_2|^{\alpha}$, $A > 0$;

где $0 < \alpha < 1$, $\beta < \alpha$, $k(1 - \alpha) < 1 - \beta$. При $\beta = 0$ Красносельский и Крейн (РЖМат, 1956, 8778) доказали теорему единственности для задачи (1) и ее обобщения на банахово пространство; автор (РЖМат, 1959, 6867) дополнительно установил сходимость последовательных приближений Пикара к единственному решению задачи (1). В общем случае Куа (РЖМат, 1959, 9050) доказал единственность задачи (1) и равномерную сходимость последовательных приближений к ее решению. В настоящей работе автор распространяет результат Коя на операторное уравнение $Tx = x$, где T — сжимающий оператор в обобщенном полном метрическом пространстве, для любых точек x и y которого определено расстояние $0 \leqslant d(x, y) \leqslant +\infty$, не являющееся обязательно конечным. В случае дифференциального уравнения (1) полагается

$$T\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, \varphi(u))\, du$$

и

$$d(\varphi_1, \varphi_2) = \sup\,[\,|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|\,/\,|t - t_0|^{pk}],$$

$$|t - t_0| \leqslant \min\left(a, \frac{b}{M}\right), \text{ где } M = \max|f(t, x)| \text{ в } R,\ p > 1,$$

причем $pk(1 - \alpha) < 1 - \beta$. Устанавливается сходимость последовательных приближений $\{\varphi_n(t)\}$ не только равномерная, но и в смысле метрики d. На примере показывается, что при наличии противоположного неравенства $k(1 - \alpha) \geqslant 1 - \beta$ сходимость последовательных приближений для задачи (1) к ее единственному решению может отсутствовать. Б. П. Демидович

2883. **Об одном линейном дифференциальном уравнении с частными производными первого порядка счетного множества независимых переменных, содержащем счетное множество параметров. Жаутыков О. А.**, Тр. Сектора матем. и механ. АН КазССР, 1958, **1**, 25—40

Известная схема решения задачи Коши методом характеристик для одного линейного дифференциального уравнения с частными производными первого порядка (Смирнов В. И., Курс высшей математики, М., Гостехиздат, 1950, т. 4, гл. 3, § 1) переносится на случай уравнения вида

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t, x, \lambda)\, \frac{\partial z}{\partial x_k} = z f(t, x, \lambda) + g(t, x, \lambda), \qquad (1)$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots)$ $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$.

Для этой цели рассматривается система счетного множества уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = \omega_s(t, x, \lambda) \quad (s = 1, 2, \ldots). \qquad (2)$$

Предполагается, что:

1) Функции ω_s при постоянных λ_k из отрезка $|\lambda_k - \lambda_k^0| \leqslant \alpha$ равномерно ограничены в области $H(|t - t_0| \leqslant a, |x_k - x_k^0| \leqslant R, |\lambda_k - \lambda_k^0| \leqslant \alpha)$.

2) Для любой последовательности функций $u_n(t)$, непрерывных на отрезке $|t - t_0| \leqslant a$, функции $\omega_s(t, u(t), \lambda)$ при фиксированных λ_k из $|\lambda_k - \lambda_k^0| \leqslant \alpha$ измеримы на $|t - t_0| \leqslant a$.

3) В области H функции $\omega_s(t, x, \lambda)$ удовлетворяют условиям Коши—Липшица относительно x_k:

$$|\omega_s(t, x', \lambda) - \omega_s(t, x'', \lambda)| \leqslant$$
$$\leqslant A(t)\left\{\sum_{i=1}^{s} |\beta_{s+1-i}|\,|x_i' - x_i''| + \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_{i+1}|\,|x_{i+s}' - x_{i+s}''|\right\},$$

где ряд $\beta_1 + \sum_{i=2}^{\infty}(\alpha_i + \beta_i)$ сходится.

4) ω_s удовлетворяют в H условиям Коши—Липшица также относительно параметров λ_k.

5) ω_s имеют непрерывные, равномерно ограниченные в H частные производные первого порядка, такие, что при фиксированных значениях переменных x_k имеет место неравенство $\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\partial \omega_s}{\partial x_k}\right| \leqslant p(t) \quad (s = 1, 2, \ldots,)$, где $p(t)$ — непрерывная функция на отрезке $|t - t_0| \leqslant a$.

6) ω_s при постоянных λ_k из отрезка $|\lambda_k - \lambda_k^0| \leqslant \alpha$ удовлетворяют условиям

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\partial \omega_s}{\partial x_k'} - \frac{\partial \omega_s}{\partial x_k''}\right| \leqslant$$
$$\leqslant K_1 \cdot \delta_1 x\,|\omega_s(t, x_1, \ldots, x_{m-1}, x_m', x_{m+1}', \ldots, \lambda) -$$
$$- \omega_s(t, x_1, \ldots, x_{m-1}, x_m'', x_{m+1}'', \ldots, \lambda)| \leqslant K_m \delta_m x,$$

где $\delta_m x = \sup\{|x_{m+l}' - x_{m+k}''|\}$, $K_m \to 0$ при $m \to \infty$.

Продолжая Персидского (докл. АН СССР, 1950, **83**, № 3), автор известным методом (Сансоне Дж., Обыкновенные дифференциальные уравнения, М., Изд-во ин. лит., 1953, т. I, гл. 1, § 5; РЖМат, 1954, 4419 К) доказывает следующие утверждения:

Теорема 1. При условиях 1)—2), если ω_s удовлетворяют условиям Коши—Липшица, то система (2) имеет равностепенно непрерывное по λ решение

$$x_s = \varphi_s(t, t_0, x^0, \lambda), \qquad (3)$$

определенное в достаточно малом промежутке $[t_0, t_0 + h]$ и удовлетворяющее условиям

$$x_s^0 = \varphi_s(t_0, t_0, x^0, \lambda). \qquad (4)$$

Теорема 2. При условиях 1)—6), если функции ω_s удовлетворяют условию 6) относительно λ, то для каждой допустимой системы значений λ_k система (2) имеет решение (3), удовлетворяющее условиям (4) и допускающее в области существования непрерывные частные производные по всем переменным t, t_0, x_k^0, λ_k.

Для системы (2) при некоторых условиях доказывается также теорема существования и единственности Каратеодори (Сансоне Дж., Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., Изд-во ин. лит., 1953, т. I, гл. I, § 6; РЖМат, 1954, 4419 К).

На основании теорем 1 и 2 доказывается

Теорема 3. Пусть при фиксированных λ_s из $|\lambda_s - \lambda_s^0| \leqslant \alpha$ функции a_k, f, g непрерывны, равномерно ограничены, имеют непрерывные и равномерно ограниченные частные производные до второго порядка включительно, а $\omega(x, \lambda)$ есть дважды непрерывно дифференцируемая по x_k при $|\lambda_s - \lambda_s^0| \leqslant \alpha$. При этих условиях, если функция a_k, f, g, ω удовлетворяют условиям 1)—6), то при $|x_s - x_s^0| \leqslant \delta < R$ уравнение (1) имеет в области H решение $z = \psi(t, x, \lambda)$, удовлетворяющее условию $\psi(t_0, x, \lambda) = \omega(x, \lambda)$, причем решение единственно в классе функций, удовлетворяющих условию 6).

Примечание референта. В работе имеется ряд описок и неточностей: 1). В ходе доказательства теоремы 1 автор вместо того, чтобы ввести обозначение $z = \sup\{|\Delta x_i|/\delta_1 \lambda\}$, ошибочно через z обозначает $\sup\{|\Delta x_i|/|\Delta \lambda_i|\}$, что приводит к неравенству, из которого утверждение теоремы не следует. 2). В доказательстве теоремы 3 для полноты доказательства автору следовало бы показать, что построенное решение из характеристик удовлетворяет условию 6). 3). При доказательстве теоремы 3 автор пользуется теоремой 2. Но из условий теоремы 3 выполнимость условия 5) теоремы 2 не видна. 4) В ссылке на работу Персидского, опубликованную в Докл. АН СССР, 1950, **63**, № 3, указан том 13 и т. д. М. Л. Расулов

2884. Об интеграции двух важных нелинейных уравнений второго порядка. Бандич (Sur l'intégration de deux équations différentielles importantes non-linéaires de deuxième ordre. Banditch I.), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1958, **44**, № 8, 702—707 (франц.)

Вначале изучается уравнение $y'' + f(x)\,y' = \varphi(x)\,y^n$ с помощью понятия относительной производной n-го порядка $\Delta_n(u) = \frac{u^{(n)}}{u}$, где $u^{(n)}$ — обычная n-я производная. После небольших преобразований и замены $t = \int e^{-\int f(x)\,dx}\,dx$ исходное уравнение приводится к виду $\Delta_2(y)_t = (\varphi(x)\,e^{2\int f(x)\,dx})\,y^{n-1}$. Последнее уравнение при $\varphi(x) = ae^{-2\int f(x)\,dx}$ интегрируется в квадратурах с общим интегралом

$$\int (c_1 + y^{n+1})^{-1/2}\,dy = \left(\frac{2a}{n+1}\right)^{1/2}\left(c_2 + \int e^{-\int f(x)\,dx}\,dx\right).$$

Аналогично, после предварительной подстановки $y = \ln\theta$, изучается уравнение $y'' + f(x)\,y' = \varphi(x)\,e^y$, которое при $\varphi(x) = ae^{-2\int f\,dx}$ имеет общий интеграл

$$e^y = \theta = \frac{2c_1^2 E}{a(1 - E^2)}, \qquad E = c_2 \exp\{c_1 e^{-\int f\,dx}\,dx\}.$$

При использовании понятия относительной производной автор ссылается на работу Петровича (Petrovitch M., Un algorithme différentiel et ses applications (en serbe), Monographie de l'Académie Serbe des Sciences, vol. CXI, 1936, Beograd). Л. А. Беклемишева

2885. Вариация параметра и решение уравнения Бернулли. Венканная (Parameter variation and the solution of Bernoulli's equation. Venkannayah K.), Amer. Math. Monthly, 1959, **66**, № 5, 409—410 (англ.)

2886. О методе вариации параметров. Зейтлин (On the method of variation of parameters. Zeitlin David), Amer. Math. Monthly, 1959, **66**, № 4, 300—302 (англ.)

При отыскании решения неоднородного уравнения

$$y'' + P(x)\,y' + Q(x)\,y = R(x)$$

методом вариации постоянных, полагая $y = Au + Bv$, получаем для определения A и B систему

$$A'u + B'v = 0, \quad A'u' + B'v' = R.$$

Автор доказывает очевидный факт: вместо этой системы можно взять систему

$$A'u + B'v = f, \quad A'u' + B'v' = R - f' - Pf,$$

где $f = f(x, u, v)$ — произвольная функция класса C_1 по x. И. М. Соболь

2887. Фундаментальные системы решений некоторых дифференциальных уравнений третьего порядка. Светланов А. В., Тр. Дальневост. политехн. ин-та, 1958, 50, 36—44

Метод интегрирования линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка, основанный на применении обобщенного дифференциально-интегрального исчисления, применяется для интегрирования уравнения

$$(Ax^3 + a_3x^2 + b_3x + c_3)\,y''' + (a_2x^2 + b_2x + c_2)\,y'' + (b_1x + c_1)\,y' + c_0y = 0.$$

В качестве примера строится фундаментальная система решений гипергеометрического уравнения третьего порядка. Р. С. Гусарова

2888. Решение линейных дифференциальных уравнений методом полного дифференциала. Маурин Л. Н., Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., механ., астрон., физ., химии, 1958, № 2, 3—8

Решение обыкновенного линейного однородного дифференциального уравнения

$$L(y) = 0 \qquad (1)$$

ищется в виде интеграла $y(x) = \int_A^B \alpha(k)\, e^{F(k,x)}dk$.

Функция $F(k, x)$ выбирается так, чтобы существовала функция $\alpha(k)$, удовлетворяющая тождеству

$$\alpha(k)\,\Lambda\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) e^{F(k,x)} = \frac{\partial}{\partial k}\left[\alpha(k)\, e^{F(k,x)}\right],$$

где Λ — некоторый нелинейный дифференциальный оператор, порядок которого на единицу ниже порядка L. От сюда для функции $\frac{\partial F}{\partial x} = u(k, x)$ получается уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial k} - \frac{\partial(\Lambda(u))}{\partial x} = 0. \qquad (2)$$

Выбирая различные частные решения уравнения (2), можно получить различные интегральные представления решений уравнения (1).

Метод иллюстрируется на уравнениях Вебера и Матье, а также на уравнении $y'' - Ae^{ax}y = 0$, $A, a = \text{const}$. Р. С. Гусарова

2889. Интегрирование линейных дифференциальных уравнений второго порядка гипергеометрического типа. Светланов А. В., Тр. Дальневост. политехн. ин-та, 1958, 50, 19—35

К уравнению вида

$$(a_2x^2 + b_2x + c_2)\,y'' + (b_1x + c_1)\,y' + c_0y = 0 \qquad (1)$$

применен метод интегрирования, основанный на использовании аппарата обобщенного дифференциально-интегрального исчисления.

Решения уравнения (1) представлены в виде: $y_1(x) = D^{n-1}[(a_2x^2 + b_2x + c_2)^n e^{-\nu(x)}]$, $y_2(x) = D^{n-1}\left[(a_2x^2 + b_2x + c_2)^n e^{-\nu(x)} \int \frac{e^{\nu(x)}x^{n-1}dx}{(a_2x^2 + b_2x + c_2)^{n+1}}\right]$, где D^{n-1} — обобщенный дифференциально-интегральный оператор порядка $n-1$, $\nu(x) = \int \frac{b_1x + c_1}{a_2x^2 + b_2x + c_2}dx$.

Рассмотрены некоторые частные случаи уравнения (1). Р. С. Гусарова

2890. Одна задача о линейных дифференциальных уравнениях. Форт (A problem in linear differential equations. Fort Tomlinson), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, **10**, № 2, 300—303 (англ.)

Рассматривается решение $u_1(x)$ дифференциального уравнения $u'' + [1 + \lambda g(x)]\,u = 0$, $\int_0^\infty |g(x)|\,dx < \infty$, удовлетворяющее начальным условиям $u_1(0) = 0$, $u_1'(0) = 1$, λ — комплексный параметр, $g(x)$ — действительная функция. Как известно, $u_1(x) \sim r(\lambda)\sin[x + \theta(\lambda)]$. Исследуются аналитические продолжения функций $r(\lambda)$ и $\cos\theta(\lambda)$ на комплексную плоскость. Доказано, что функция $r^2(\lambda)$ целая, а функция $\cos\theta(\lambda)$ имеет особенности в точках, где $r(\lambda) = 0$ (это возможно лишь на мнимой оси). И. М. Соболь

2891. Задача Коши в классе операторно-аналитических функций. Василишин (Задача Коші в класі операторно-аналітичних функцій. Василишин С. А.), Доповіді АН УРСР, 1958, № 9, 924—928 (укр.; рез. русск., англ.)

Для уравнения

$$MF(u, x) = LF(u, x) \qquad (1)$$

с обыкновенными линейными дифференциальными операторами M и L порядков ν, соответственно n, по переменным u, соответственно x, с непрерывными коэффициентами $(c < u < d, \ a < x < b)$ решается задача Коши с начальными данными

$$F(u, x_0) = f_0(u), \ldots, \left.\frac{\partial^{n-1}F(u, x)}{\partial x^{n-1}}\right|_{x=x_0} = f_{n-1}(u) \qquad (2)$$

в том („не классическом") случае, когда $n < \nu$; $f_i(u)$ суть M-аналитические (в смысле, введенном рефе ентом, РЖМат, 1959, 4641) целые функции, порядок и тип которых определяется через коэффициенты их разложения в M-ряд.

Сформулированные автором результаты о зависимости существования и единстве ности решения задачи (1), (2) от порядка и типа функций (2) являются обобщением соответствующих тео ем Роте (Rothe E., Math. Z., 1928, 28), рассмотревшего простейшее уравнение этого вида с $M = d^\nu/du^\nu$, $L = d^n/dx^n$. М. К. Фаге

2892. О некотором типе глобальных решений дифференциальных уравнений в комплексной области. Кастро-Бжезицкий (Sobre un tipo de soluciones globales de ecuaciones diferenciales en el campo complejo. Castro Brzezicki A. de), Rev. mat. hisp.-amer., 1957, **17**, № 4-5, 201—208 (исп.)

Принципы статьи находятся в рамках концепции „логического интегрирования" Дэша (см. РЖМат, 1959, 11054К) для уравнений в частных производных (РЖМат, 1956, 5261К), состоящей в определении классов (или инвариантов) трансцендентностей решений дифференциальных уравнений, не связанных предельными (начальными) условиями (как, например, в проблеме Коши).

Изучаются те решения дифференциального уравнения

$$f(Y) \equiv f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

(x, y принадлежат комплексной плоскости, $y' = dy/dx$), которые обращают в целую функцию аргумента выбранное и фиксированное дифференциальное выражение

$$\varphi(Y) \equiv \varphi(x, y, y', \ldots, y^{(m)}) \quad (m < n). \qquad (2)$$

Произвол выбора (2) определяет широкое поле применения метода.

Различаются независимые и вполне независимые решения (1) в зависимости от того, дают ли они одинаковые значения (2) для конечного числа значений x или

соответственно никогда не дают одинаковых значений (2). Оказывается, что любая функция $w(x)$, независимая от каждой из двух взаимно вполне независимых функций $u(x)$ и $v(x)$, является интегралом дифференциального уравнения

$$\varphi(Y) = F(x) \equiv \varphi(U) + \lambda(x)[\varphi(V) - \varphi(U)], \qquad (3)$$

где $\lambda(x)$ — многочлен.

Особенно простой случай появляется, когда $\varphi(Y) \equiv g(x, C)$ — первый интеграл (1), в частности, когда при $n = 2$, $m = 1$ замена переменной $z = \varphi(Y)$ (z — новая независимая переменная) приводит (1) к виду $z' = \psi(x, z)$.

Например, пусть (1) имеет вид $y'' = f(x, y')$ и выбрана функция $\varphi(Y) \equiv y'$. Тогда два решения $u(x)$ и $v(x)$ будут вполне независимыми, если их производные не равны ни при каком значении x. Любое не зависимое от $u(x)$ и $v(x)$ решение имеет вид $w(x) = u(x) + \int \lambda(x)[v'(x) - u'(x)]\,dx$, а любое вполне независимое $w(x) = u(x) + \lambda[v(x) - u(x)] + C$. Если $f(x, y)$ — целая, то все решения вполне независимы.

Для уравнения $f(x, y, y', y'')$ (f — однородная функция) можно выбрать $\varphi(Y) \equiv y'/y$ (или $\equiv y/y'$). Тогда два решения $u(x)$ и $v(x)$ вполне независимы, если u'/u и v'/v никогда не принимают одинаковых значений. В этом случае любое независимое решение представляется в виде $w(x) = u(x)\exp\int \lambda(x)(v'/v - u'/u)\,dx$, а вполне независимое — в виде $w(x) = cu(x)[v(x)/u(x)]^{\lambda}$. Если в уравнении $y'' = f(x, y, y')$ функция $f(x, 1, z)$ целая, то в выше указанном смысле все решения вполне независимы.

Пусть (1) первого порядка и $\varphi(Y) \equiv y$. Тогда два решения $u(x)$ и $v(x)$ независимы, если они равны для конечного числа значений x. Если же они вполне независимы, то любое другое независимое от них целое решение представляется в виде $w(x) = u(x) + \lambda(x)[v(x) - u(x)]$, где $\lambda(x)$ — многочлен. Приводятся и другие примеры. Б. В. Широкорад

2893. Эквивалентность обыкновенных линейных дифференциальных операторов. Фаге М. К., Матем. просвещение, вып. 4, 1959, 236—239

2894. Об одном замечании, связанном с устойчивостью решений системы линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Голованъ В. М., Научн. зап. кафедр. матем., физ. и естествозн. Одесск. гос. пед. ин-т, 1958, **22**, № 2, 10—12

Пусть уравнение $y' = A(t)\,y$ заменой $y = Q(t)\,x$ переводится в $x' = B(t)\,x$. Указан такой вид $Q(t)$, просто выражаемый через $A(t)$, при котором все решения $x(t)$ ограничены. Р. Э. Виноград

2895. Некоторые варианты достаточного критерия устойчивости движения. Карачаров К. А., Научн. тр. Моск. лесотехн. ин-та, 1958, вып. 8, 63—89

Некоторые частные случаи отыскания квадратичной функции Ляпунова для линейных систем.

Р. Э. Виноград

2896. Две теоремы об ограниченности решений линейных дифференциальных уравнений. Власов И. М., Уч. зап. Удмуртск. гос. пед. ин-та, 1958, вып. 12, 60—61

Решения уравнений

$$y'' + P(x)\,y = 0, \qquad (1)$$

$$z'' + [P(x) + Q(x)]\,z = 0 \qquad (2)$$

связаны соотношением $z(x) = y(x) - \int_0^x K(x,t)Q(t)z(t)dt$, где $K(x, t)$ — функция Коши уравнения (1) (Степанов В. В., Курс дифференциальных уравнений, 1958, гл. 5, § 4, РЖМат, 1959, 1481К). Если произведение $K(x, t)\,Q(t)$ мало, то из ограниченности решений уравнения (1) следует ограниченность решений уравнения (2). Следствие из теоремы 2 ошибочно, так как решения уравнения $y'' + \lambda^2 y = 0$ не принадлежат $L_2(0, \infty)$.

И. М. Соболь

2897. Об устойчивости сверху наибольшего характеристического показателя системы линейных дифференциальных уравнений с почти периодическими коэффициентами. Былов Б. Ф., Матем. сб., 1959, **48**, № 1, 117—128

Пусть невозмущенная и возмущенная системы суть

$$x' = A(t)\,x, \qquad (1)$$

$$y' = A(t)\,y + F(t, y), \qquad (2)$$

причем $F(t, 0) = 0$ и $|F(t, y_2) - F(t, y_1)| < \delta\,|y_2 - y_1|$. Характеристическим показателем вектор-функции $z(t)$ называется $\lambda(z) = \overline{\lim_{t\to\infty}}\, t^{-1}\ln|z(t)|$. Если матрица $A(t)$ ограничена, то наибольший показатель решений (1) $\Lambda = \max\lambda(x)$, конечен. Он называется устойчивым сверху, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех решений (2) имеем $\lambda(y) < \Lambda + \varepsilon$. Пусть $X = X(t)X^{-1}(\tau)$, где $X(t)$ — фундаментальная матрица решений (1). Для устойчивости Λ сверху достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ было $|X| < Be^{(\Lambda+\varepsilon)(t-\tau)}$, где $B = B(\varepsilon)$. В работе доказано, что в случае непрерывной почти периодической матрицы $A(t)$ это условие является также необходимым. Приведен достаточный признак для матрицы $A(t)$, при котором оно выполняется, а следовательно, Λ устойчив сверху.

Р. Э. Виноград

2898. Метод малого параметра для канонических систем с периодическими коэффициентами. Якубович В. А., Прикл. матем. и механ., 1959, **23**, № 1, 15—34

Рассматривается система

$$\frac{dx}{dt} = [C + \varepsilon B(\Theta t, \varepsilon)]\,x, \qquad (1)$$

где x — вектор-решение, C — постоянная матрица, $\varepsilon B(\tau, \varepsilon) = \varepsilon B_1(\tau) + \varepsilon^2 B_2(\tau) + \ldots$, $B_j(\tau) \in L(0, 2\pi)$, $B_j(t + 2\pi) = B_j(t)$ почти всюду, $\int_0^{2\pi} \|B_j(\tau)\|\,d\tau \leqslant \beta_j$ и ряд $\varepsilon\beta_1 + \varepsilon^2\beta_2 + \ldots$ сходится при достаточно малом ε.

Системы подобного вида (и более общие) изучались в работах Н. Н. Боголюбова, Н. Г. Четаева, И. З. Штокало, Н. П. Еругина, И. Г. Малкина, Л. Чезари и др. Автор занимается изучением специфики того случая, когда система (1) является системой канонического вида. Попутно получен ряд новых результатов и для систем (1) общего вида.

Вначале доказываются некоторые вспомогательные предложения о функциях от матриц. Выяснено, в каких случаях $\ln Y(\varepsilon)$, где $Y(\varepsilon)$ — аналитическая матрица-функция, является аналитической функцией. Показано, как строить логарифм J-унитарной матрицы так, чтобы он был J-антиэрмитовой матрицей.

Случай, когда среди собственных значений λ_j матрицы C имеются такие, что $\lambda_j - \lambda_h = i\,m\Theta$, где m — целое число $\neq 0$, автор называет резонансным.

Резонансный случай всегда может быть сведен к нерезонансному. Если система (1) имела вещественные коэффициенты или была системой канонического вида, то это сведение можно осуществить с сохранением соответствующего свойства.

Матрицант $X(t, \varepsilon)$ уравнения (1) по теореме Ляпунова-Флоке представим в виде

$$X(t, \varepsilon) = P(t, \varepsilon)\,e^{K(\varepsilon)t}, \qquad (2)$$

где $P\left(t + \frac{2\pi}{\Theta}, \varepsilon\right) = P(t, \varepsilon)$. Показано, что в нерезо-

нансном случае представление (2) можно осуществить так, что $P(t, \varepsilon)$ и $K(\varepsilon)$ будут аналитическими функциями ε. В резонансном случае этого сделать вообще говоря, нельзя. В случае канонической системы можно дополнительно добиться, чтобы $P(t, \varepsilon)$ была J-унитарной и $K(\varepsilon)$ — J-антиэрмитовой матрицей (ε вещественно). Для коэффициентов разложений

$$P(t, \varepsilon) = E + \varepsilon P_1(t) + \varepsilon^2 P_2(t) + \ldots,$$
$$K(\varepsilon) = K_0 + \varepsilon K_1 + \varepsilon^2 K_2 + \ldots \quad (3)$$

получены (в общем случае) удобные расчетные формулы через коэффициенты Фурье матриц $B_j(\tau)$. Эти формулы позволяют посредством лишь одних алгебраических операций практически проинтегрировать систему (1), если параметр ε достаточно мал. Приведенные оценки позволяют оценить радиус сходимости рядов (3).

Отмечена следующая трудность, связанная со спецификой канонических систем (1). Характеристические числа матрицы $K(\varepsilon)$ в случае устойчивости могут быть для канонических систем лишь чисто мнимыми. Разлагая их в ряд по $\varepsilon^{1/p}$ и вычисляя последовательно коэффициенты разложений, будем получать чисто мнимые значения ($\varepsilon > 0$, различные значения корня учитываются коэффициентами; поэтому непременно $p = 1$ или $p = 2$). Может показаться, что, получив на конечном шаге вычислений чисто мнимые значения, никаких выводов об устойчивости сделать нельзя, ибо следующие, невычисленные слагаемые могут сдвинуть собственные значения в правую полуплоскость. Показано, что если дополнительно на некотором шаге вычислений получаются чисто мнимые и различные значения, то все остальные невычисленные коэффициенты будут также чисто мнимы, т. е. будет иметь место устойчивость.

Указано, что практически нет необходимости вычислять коэффициенты этих разложений, так как в пространстве параметров область устойчивости совпадает с областью апериодической устойчивости для уравнения $\det[K(\varepsilon) - \lambda E] = 0$ (содержащего лишь четные степени λ) относительно $\mu = \lambda^2$.

В заключение указанным приемом построена область неустойчивости комбинационного резонанса для некоторого уравнения, к которому приводит ряд задач динамической устойчивости пластин и плоской формы изгиба. Отмечено, что обычные приемы построения областей неустойчивости, основанные на отыскании $\frac{2\pi}{\theta}$- или $\frac{4\pi}{\theta}$-периодических решений, не годятся в случае комбинационного резонанса, ибо в этом случае подобных решений вообще нет. Этим существенно отличается случай системы со многими степенями свободы от случая системы с одной степенью свободы.

В. М. Старжинский

2899. О почти периодических решениях систем дифференциальных уравнений. Харасахал В. Х., КазССР Гылым Акад. хабарлары, Изв. АН КазССР. Сер. матем. и механ., 1959, вып. 7 (11), 72—76 (рез. каз.)

Приводятся простые замечания о почти периодических решениях автономной системы дифференциальных уравнений. Рассматривается линейная система дифференциальных уравнений

$$dx_s/dt = \sum_{j=1}^{n} p_{sj}(t)\, x_j + f_s(t) \quad (s = 1, \ldots, n), \quad (1)$$

где $p_{sj}(t)$ — непрерывные периодические функции с общим вещественным периодом ω и $f_s(t)$ — почти периодические функции в смысле Бора. Доказывается теорема: Любое ограниченное решение $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ системы (1) является совокупностью почти периодических функций.

Б. П. Демидович

2900. Короткое доказательство теорем ограниченности для линейных систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Хейл (A short proof of a boundedness theorem for linear differential systems with periodic coefficients. Hale J. K.), Arch. Ration. Mech. and Analysis, 1959, 2, № 5, 429—434 (англ.)

Рассматривается действительная система дифференциальных уравнений

$$dz/dt = Az + C(t, \lambda)\, z, \quad (1)$$

где $z = (z_1, \ldots, z_{2n+1})$; A — постоянная матрица типа $(2n+1) \times (2n+1)$; λ — параметр; $C(t, \lambda)$ — матрица типа $(2n+1) \times (2n+1)$, периодическая по t с периодом $T = 2\pi/\omega$, L — интегрируемая по t на $[0, T]$ и непрерывная по λ при $\lambda = 0$ для почти всех значений $t \in [0, T]$. Кроме того, $C(t, 0) = 0$ и $\| C(t, \lambda) \| < q(t)$ почти всюду при $0 \leqslant t \leqslant T$, $|\lambda| \leqslant \lambda_0$ ($\lambda_0 > 0$), где $q(t)$ — L — интегрируема на $[0, T]$. Предполагается, что матрица A имеет чисто мнимые и одно нулевое собственные значения: $\pm i\sigma_j$ и 0 ($\sigma_j > 0$, $j = 1, \ldots, n$), причем $\sigma_j \not\equiv 0 \pmod{\omega}$, $2\sigma_j \not\equiv 0 \pmod{\omega}$, $\sigma_j \pm \sigma_k \not\equiv 0 \pmod{\omega}$ при $j \neq k$. Доказывается, что если матрица $C(t, \lambda)$ обладает известными свойствами симметрии, то всякое абсолютно непрерывное решение $z = z(t, \lambda)$ системы (1) ограничено при $-\infty < t < +\infty$ $|\lambda| < \lambda_1$, где λ_1 — положительное число. Полученный результат, если отвлечься от условий гладкости, является развитием идей Ляпунова (РЖМат, 1958, 8821).

Б. П. Демидович

2901. Линейные дифференциальные уравнения с почти периодическими коэффициентами. Лилло (Linear differential equations with almost periodic coefficients. Lillo James C.), Amer. J. Math., 1959, **81**, № 1, 37—45 (англ.)

В 1-й части, в основном, рассматривается однородная линейная система

$$dx/dt = A(t)\, x, \quad (1)$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $A(t) = \| a_{ij}(t) \|$ — почти периодическая матрица типа $n \times n$.

Теорема 1. Пусть матрица $A(t)$ — треугольная ($a_{ij}(t) \equiv 0$ при $i < j$) и $\int_0^t a_{ii}(s)\, ds = m_i t + p_i(t)$, где $m_i \neq m_j$ при $i \neq j$ и $p_i(t)$ — почти периодические функции. Тогда для системы (1) существует фундаментальная система решений

$$x_h^j(t) = \exp(m_h t) \sum_{i=1}^{h} P_{jh}^i(t) \text{ при } j \leqslant h,$$
$$x_h^j(t) = 0 \text{ при } j > h;$$

где $P_{jh}^i(t)$ — почти периодические функции с модулем матрицы $A(t)$.

Теорема 1 является уточненным результатом Камерона (Cameron R., Acta math., 1938, 68, 21 — 56).

Теорема 2. Пусть частоты коэффициентов $a_{ij}(t)$ сохраняют постоянный знак и A_0 — матрица, составленная из свободных членов функций $a_{ij}(t)$. Тогда каждому решению системы

$$dx_0/dt = A_0 x_0 \quad (2)$$

вида $x_0 = \exp(\lambda_i t)\ [0, \ldots, t^m/m!, \ldots, 0]$ соответствует решение $x = (x^1, \ldots, x^n)$ системы (1) с компонентами

$$x^j = \exp(\lambda_i t) \sum_{l=0}^{m} t^l/l!\, p_{lj}(t),$$

где $p_{lj}(t)$ — почти периодические функции, с модулем, принадлежащим модулю $\{A(t), \operatorname{Im} \lambda_h\}$. Теорема 2 обоб-

щает результат Винтнера и Путнама (Wintner A., Putnam C., Amer. J. Math., 1951, **73**, 792—806).

Во второй части даются достаточные условия существования единственного почти периодического решения соответствующей (1) неоднородной линейной системы $dy/dt = A(t)\,y + B(t)$, где $B(t)$ — почти периодический вектор. Б. П. Демидович

2902. Об асимптотическом поведении решений систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка в окрестности иррегулярной особой точки. Костомаров Д. П., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. **4.** М., АН СССР, 1959, 27

2903. К теории общих дифференциальных систем с переменными коэффициентами. Гронец (Sur la théorie du système différentiel général à coefficients variables. Hronec J.), Acta Fac. rerum. natur. Univ. Comenianae Math., 1956, **1**, № 1, 3—20 (франц.; рез. словацк.; русск.)

Рассматривается линейная система дифференциальных равнений

$$dy_k/dx = \sum_{j=1}^{n} a_{jk}(x)\,y_j \quad (k = 1, \ldots, n), \qquad (1)$$

где $a_{jk}(x)$ — аналитические функции, имеющие лишь конечное число особых точек $a_1, \ldots, a_\sigma$ на комплексной плоскости ($a_j \neq \infty$, $j = 1, \ldots, n$), причем все эти точки — полюсы. Доказывается, что каждое решение $y_k = y_k(x)$ ($k = 1, \ldots, n$) системы (1) не имеет других особых точек, кроме полюсов (включая и бесконечно удаленную точку), тогда и только тогда, если

$$a_{jk}(x) = [(x - a_1) \ldots (x - a_\sigma)]^{-s_{jk}} G_{jk}(x), \qquad (2)$$

где s_{jk} — неотрицательные числа, причем $s_{jj} = 1$ и $G_{jk}(x)$ — целые рациональные функции, степени не выше $(\sigma + 1)\,s_{jk} - 2$. Б. П. Демидович

2904. О соотношении Фукса для линейного дифференциального уравнения с алгебраическими коэффициентами. Сайто (On Fuchs' relation for the linear differential equation with algebraic coefficients. Saito Tosiya), Kodai Math. Semin. Repts, 1958, **10**, № 3, 101—104 (англ.)

Рассматривается уравнение

$$v^{(n)} + p_1 v^{(n-1)} + \ldots + p_n v = 0, \qquad (1)$$

коэффициенты которого являются мероморфными функциями, однозначными на r-листной римановой поверхности F рода p алгебраической функции $y = \varphi(x)$, имеющей s точек ветвления $q_i = (\sigma_i, \beta_i)$. Пусть уравнение (1) имеет m особых точек $z_i = (a_i, b_i)$ типа Фукса. Тогда в окрестности a_i $p_1 = (x - a_i)^{-1}[A_{i0} + A_{i1}(x - a_i) + \ldots]$. Пусть далее q_i — точка ветвления порядка $m_i - 1$. Тогда в окрестности a_i $p_1 = (x - a_i)^{-1}[B_{i0} + B_{i1}(x - a_i) + \ldots]$, где $B_{i0} = \dfrac{-n(n-1)}{2}\left(\dfrac{1}{m_i} - 1\right)$. Наконец, исследуется поведение p_1 в окрестности каждой из r бесконечно удаленных точек (∞, γ_i) поверхности F, где $p_1 = x^{-1}[n(n-1) + C_{i1}x^{-1} + \ldots]$. Доказывается равенство

$$\sum_{i=1}^{m} A_{i0} + \sum_{i=1}^{s} m_i B_{i0} - rn(n-1) = 0,$$

причем по теореме Гурвица, $\sum_{i=1}^{s}(m_i - 1) = 2(r + p - 1)$,

откуда следует, что $\sum_{i=1}^{m} A_{i0} = -n(n-1)(p-1)$. Характеристические показатели λ_{ik} ($k = 1, 2, \ldots, n$), принадлежащие особой точке z_i, удовлетворяют уравнению

$$\lambda(\lambda - 1) \ldots (\lambda - n + 1) + A_{i0}\lambda(\lambda - 1) \ldots (\lambda - n + 2) + \ldots = 0,$$

откуда следует: $\sum_{k=1}^{n} \lambda_{ik} = \dfrac{n(n-1)}{2} - A_{i0}$. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \lambda_{ik} = n(n-1)\left(\frac{m}{2} + p - 1\right). \qquad (F_0)$$

Соотношение (F_0) является обобщением известного равенства Фукса $\sum_{i,k} \lambda_{ik} = n(n-1)\left(\dfrac{m}{2} - 1\right)$ для дифференциальных уравнений (1) с коэффициентами, однозначными на плоскости x. Ю. Л. Рабинович

2905. Об улучшении одной оценки. Власов И. М., Уч. зап. Удмуртск. гос. пед. ин-та, 1958, вып. 12, 56—59

Рассматривается вопрос о близости решений уравнений

$$y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} P_k(x)\,y^{(k)} = 0, \qquad (1)$$

$$z^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} Q_k(x)\,z^{(k)} = 0. \qquad (2)$$

Отрезок $[a, b]$ задания уравнений разбивается на m равных частей $[x_i, x_{i+1}]$ и для каждого i-го отрезка предлагается следующая оценка разности $z - y$:

$$\|z - y\|_i \leqslant \|z\|_i \frac{\|K\|_i\, n\dfrac{b-a}{m}}{1 - \|K\|_i\, n\dfrac{b-a}{m}},$$

где $K = K(x, s)$ — некоторая функция двух переменных, определяемая по коэффициентам уравнений (1) и (2). Результат ошибочен. Действительно, в пространстве C

$$\|z - y\|_i = \max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} |z(x) - y(x)|,$$

$$\|K\|_i = \max_{x,s \in [x_i, x_{i+1}]} |K(x, s)| \leqslant \max_{x,s \in [a,b]} |K(x, s)| = \|K\|.$$

Отсюда

$$\frac{\|K\|_i\, n\dfrac{b-a}{m}}{1 - \|K\|_i\, n\dfrac{b-a}{m}} \leqslant \frac{\|K\|\, n\dfrac{b-a}{m}}{1 - \|K\|\, n\dfrac{b-a}{m}} \to 0$$

при $m \to \infty$. Но $\lim\limits_{m\to\infty} \|z - y\|_i \neq 0$.

Н. В. Азбелев, З. Б. Цалюк

2906. О теоремах единственности и о числе линейно независимых решений. Микусинский (Sur les théorèmes d'unicité et le nombre de solutions linéairement indépendantes. Mikusiński J.), Studia math., 1957, **16**, № 2, 95—98 (франц.)

Рассматриваются два предложения:

1. Линейное дифференциальное уравнение n-го порядка имеет не более n линейно независимых решений.

2. Система из n линейных дифференциальных уравнений первого порядка имеет не более n линейно независимых решений.

Доказывается эквивалентность этих утверждений в самом общем случае, когда рассматривается произвольное линейное пространство и вместо оператора диф-

ференцирования рассматривается произвольный линейный оператор в этом пространстве. При тех же общих предположениях при помощи произвольной линейной операции каждому элементу x пространства относится число $x(\cdot)$ — „начальное значение" — и доказывается эквивалентность двух теорем об единственности решения при заданных начальных условиях, для линейного дифференциального уравнения n-го порядка и для системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Ф. Р. Гантмахер

2907. Линейные дифференциальные уравнения и функциональный анализ. I. Массера, Шеффер (Linear differential equations and functional analysis. I. Massera J. L., Schäffer J. J.), Ann. Math., 1958, **67**, № 3, 517—573 (англ.)

Рассматриваются дифференциальные уравнения

$$\dot{x} + A(t)\,x = 0, \tag{1}$$

$$\dot{x} + A(t)\,x = f(t), \tag{2}$$

$$\dot{x} + A(t)\,x = h(t, x) \tag{3}$$

($h(t, x)$ — нелинейная функция), определенные в банаховом пространстве $\{x\}$. Результаты обобщают и детализируют (в постановке проблем и расширении классов допустимых функций $f(t)$ и операторов h, $A(t)$ — измеримость и интегрируемость $A(t)$ по норме в каждом конечном интервале $t_1 < t < t_2$, $t_1 \geqslant 0$, например) известные ранее теоремы для конечномерного случая (Perron O., Math. Z., 1930, **32**, 465 — 473; 703—728; Персидский К. П., Матем. сб., 1933, **40**, 284—293; Майзель А. Д., РЖМат, 1955, 1207 и для банаховых пространства (Кейн М. Г., Успехи матем. наук, 1948, **3**, № 3, 166—169; Кучер Д. Л., Докл. АН СССР, 1949, **69**, 613—616 и др.). Основные теоремы статьи устанавливают при определенных условиях существование, по крайней мере, одного ограниченного решения (или семейства подобных решений или ограниченность всех решений) у уравнения (1), (2) или (3) при наличии таких решений у (2) или (1). Доказывается, в частности, при некоторых требованиях к $A(t)$, что существованию ограниченного (почти периодического при почти периодической оператор-функции $A(t)$ решения $x(t)$ уравнения (2) (в одной из типичных метрик функционального пространства $\{x(t)\}$, $0 \leqslant t < \infty$ или $-\infty < t < \infty$) для всех ограниченных (почти периодических) $f(t)$ из пространства B (метрика B находится в известных соотношениях с метрикой $\{A(t,)$ и $\{x(t)\}$), соответствует наличие определенной структуры решений однородного уравнения (1) и, в частности, — наличие семейства решений (1), убывающих экспоненциально до нуля с ростом $t \to \infty$. На основании этих теорем доказываются критерии условной устойчивости решений уравнений (1) и (3). Исследуется грубость изучаемых свойств, т. е. сохранение этих свойств при достаточно малых изменениях функций, входящих в уравнения (1) — (3), а также возможность построения гомеоморфизмов, семейства решений уравнений (1) или (2) на аналогичные семейства решений (3) при достаточно малых нелинейностях. Исследования опираются на теоремы функционального анализа. Для справедливости многих результатов существенна предполагаемая авторами возможность представления пространства $\{x\}$ в виде прямой суммы $\{x\}_0 + \{x\}_1$, где $\{x\}_0$ — замкнутое многообразие начальных данных, порождающих ограниченные решения уравнений (1). В соответствии с этим имеется определенное расслоение траекторий.

Основные результаты для почти периодических решений получены в предположении отсутствия „резонанса" между $f(t)$, $A(t)$, $h(t, x)$.

Н. Н. Красовский

2908. Линейные дифференциальные уравнения и функциональный анализ. II. Уравнения с периодическими коэффициентами. Массера, Шеффер (Linear differential equations and functional analysis. II. Equations with periodic coefficients. Massera J. L., Schäffer J. J.), Ann. Math., 1959, **69**, № 1, 88—104 (англ.)

Вторая часть работы авторов, посвященной исследованию линейных и квазилинейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве $\{x\}$ (реф. 2907). Здесь рассматриваются уравнения

$$\dot{x} + A(t)\,x = 0, \tag{1}$$

$$\dot{x} + A(t)\,x = f(t), \tag{2}$$

где операторная функция $A(t)$, функция $f(t)$ имеют период $\tau = 1$. Пусть $U(t)$ — операторная функция, определяющая общее решение (1) и удовлетворяющая уравнению $\dot{U} + A(t)\,U = 0$, тогда в соответствии с известными результатами $U(t) = U(t - [t])\,U_1^{[t]}$, где $U_1 = U(1)$ и $[t]$ — наибольшая целая часть t. Известное для конечномерного пространства $\{x\}$ разложение

$$U(t) = P(t)\,e^{-tB} \tag{3}$$

($B = \text{const}$, $P(t)$ — m-периодическая функция) в общем случае возможно лишь, если U_1^m имеет логарифм в $\{x\}$, и поэтому доказать разложение в общем случае нельзя. Приводится пример, подтверждающий это положение. Доказывается, однако, что для достаточно малых по норме операторов $A(t)$ разложение (3) существует. Исследуется проблема существования периодических решений уравнений (1) и (2); например, уравнение (1) не имеет нетривиального периодического решения тогда и только тогда, когда оператор $I - U_1$ взаимно однозначен, а уравнение (2) имеет тогда единственное периодическое решение для каждой функции $f(t)$ (периодической, измеримой, интегрируемой по норме на каждом конечном интервале); если для определенной функции $f(t)$ уравнение (2) имеет решение $x(t)$, такое, что замкнутая выпуклая оболочка множества $\{x(n),\ n = 0, 1, \ldots\}$ слабо компактна, то уравнение (2) имеет, по крайней мере, одно периодическое решение. Доказывается критерий существования периодического решения для квазилинейного периодического дифференциального уравнения $dx/dt + A(t)\,x = h(t, x)$, где нелинейная функция $h(t, x)$ имеет достаточно малый (в соответствующей метрике) множитель Липшица $\gamma(t)$ по x. Критерий основан на существовании периодического решения для уравнения (2) при любых $f(t)$. Исследуется проблема сохранения свойства существования периодических решений при малых изменениях коэффициентов уравнений (1) и (2). Н. Н. Красовский

2909. Линейные дифференциальные уравнения и функциональный анализ. III. Второй метод Ляпунова в случае условной устойчивости. Массера, Шеффер (Linear differential equations and functional analysis. III. Lyapunov's second-method in the case of conditional stability. Massera J. L., Schäffer J. J.), Ann. Math., 1959, **69**, № 3, 535—574 (англ.)

Статья составляет третью часть работы авторов, посвященной исследованию связей в поведении решений линейных (одно одных и неоднородных) и квазилинейных дифференциальных уравнений, определенных в банаховом пространстве $\{x\}$ (реф. 2907, 2908). Здесь проблема изучается с точки зрения второго метода Ляпунова. Показывается, что существование соответствующим образом обобщенных функций Ляпунова эквивалентно существованию ограниченных решений неоднородного урав-

нения или определенному характеру поведения решений однородных уравнений. Ограничиваясь в основном классическими методами, авторы отмечают, что результаты имеют здесь более узкий характер, чем в первой части работы. Даются обобщения функций Ляпунова (о. ф. Л.) для линейных уравнений

$$\frac{dx}{dt} + A(t)\,x = 0, \qquad (1)$$

определенных в действительном банаховом пространстве $\{x\}$ (решение $x(t)$ при известных предположениях авторов удовлетворяет уравнению (1) почти всюду). Помимо других естественных изменений в известных определениях свойств функций Ляпунова (вызванных перенесением их на $\{x\}$ и расширением класса оператор-функций $A(t)$), полная производная dV/dt в силу системы уравнений (1) заменяется здесь величиной (полной производной +)

$$V'^{+}(x,\,t) = \limsup_{h \to +0}\left(\frac{V(x-hA(t)\,x,\,t+h) - V(x,\,t)}{h}\right)$$

или другими аналогичными производными числами (V_+', V'^-, V_-'). При определенных условиях устанавливается возможность интегрирования неравенства $V'(x,\,t) \geqslant \alpha(x,\,t)$ (или $V' \leqslant \alpha$), что важно для второго метода Ляпунова. На основе о. ф. Л. указываются критерии условной асимптотической устойчивости (1). Например, в предположении существования бесконечно малого предела о. ф. Л. V и определенной отрицательности одной из производных V' доказывается, что множество $\{x\}_0$ начальных данных порождающих ограниченные решения (1), замкнуто и эти ограниченные решения убывают экспоненциально до нуля при $t \to \infty$, а неограниченные решения экспоненциально возрастают при $t \to \infty$. Если, напротив, пространство можно представить в виде прямой суммы замкнутых множеств $\{x\}_0$ и $\{x\}_1$, где начальные условия из $\{x\}_0$ порождают равномерно экспоненциально убывающие решения (1), а значения $x_0 \in \{x\}_1$ порождают равномерно экспоненциально возрастающие решения, и выполняются некоторые дополнительные условия, то существует о. ф. Л., каждая полная производная которой V' определенно отрицательная. Устанавливаются связи между существованием о. ф. Л. с определенно отрицательной производной и наличием ограниченных решений уравнения

$$\dot{x} + A(t)\,x = f(t) \qquad (2)$$

для каждой функции $f \in B$ (реф. 2907). Доказываются также критерии неасимптотической условной устойчивости и исследуется проблема обращения этих критериев. Формулировки некоторых критериев условной устойчивости, доказанные в статье, предполагают существование не одной, а двух функций Ляпунова V_1 и V_2.

Н. Н. Красовский

2910. Об отыскании характеристических показателей систем линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Шиманов С. Н., Прикл. матем. и механ., 1958, 22, № 3, 382—385

Рассматривается линейная система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\left[a_{sl} + \mu f_{sl}(t,\,\mu)\right] x_l \quad (s = 1,\,\ldots,\,n), \qquad (1)$$

где a_{sl} — постоянные, f_{sl} — непрерывные функции, периодические по t с периодом ω и аналитические по параметру μ в области $|\mu| \leqslant \mu^*$. Изучается вид характеристического показателя системы (1), отвечающего кратному корню λ_1 векового уравнения

$$|a_{sl} - \delta_{sl}\lambda| = 0 \qquad (2)$$

в предположении, что все корни уравнения (2) равные λ_1, а также отличающиеся от последнего на числа вида $\pm N\sqrt{-1}\,2\pi/\omega$ (N — целое число) имеют простые элементарные делители. Для этого критического случая дается способ нахождения характеристического показателя в форме степенного ряда относительно параметра μ или дробной степени его $\mu^{1/r}$, где r — некоторое натуральное число.

Б. П. Демидович

2911. О приводимости систем дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами. Гельман А. Е., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. 4. М., АН СССР, 1959, 17

2912. К вопросу об ограниченности решений системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Старжинский В. М., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. 4. М., АН СССР, 1959, 37—39

2913. Распространение некоторых исследований А. М. Ляпунова дифференциального уравнения второго порядка на канонические системы с периодическими коэффициентами. Якубович В. А., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. 4. М., АН СССР, 1959, 41—42

2914. Теоремы устойчивости для систем с запаздывающим аргументом. Халанай А. Rev. math. pures et appl. (RPR), 1958, 3, № 2, 207—215

Рассматриваются задачи устойчивости для систем с запаздывающим аргументом

$$\dot{x}(t) = f[t,\,x(t),\;x(t-\tau)] \qquad (i)$$

$$f[t,\,0,\,0] = 0,$$

причем существенно используются функционалы $V(t,\,\varphi)$ ($\varphi(\vartheta)$ — функции, определенные на интервале $\vartheta \in [-\tau,\,0]$), играющие роль функций Ляпунова. Доказывается, что в случае равномерной асимптотической устойчивости решение $x = 0$ системы (1) устойчиво при постоянно действующих возмущениях $|R(t,\,x(t),\,x(t-\tau))| < \eta$ правой части уравнений. Доказана лемма, дающая на основе свойств функционала $V[t,\,\varphi]$ достаточные условия равномерной асимптотической устойчивости и обобщающая на систему (1) известную теорему Ляпунова об асимптотической устойчивости. Если решение $x = 0$ системы (1) равномерно асимптотически устойчиво, то таким же будет и решение $y = 0$ системы

$$\dot{y}(t) = f[t,\,y(t),\,y(t-\tau)] + R[t,\,y(t),\,y(t-\tau)] \qquad (2)$$

при условии, что $R[t,\,x,\,y] \to 0$ равномерно по x и y ($\|x\| < H$, $\|y\| < H$). Доказываются критерии, которые позволяют при определенных условиях установить устойчивость решения $x = 0$, исходя из условной устойчивости относительно части координат фазового пространства. Например, если решения $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$ системы уравнений

$$\dot{x}(t) = X[t,\,x(t),\,x(t-\tau),\,y(t),\,y(t-\tau)]$$

$$\dot{y}(t) = Y[t,\,x(t),\,x(t-\tau),\,y(t),\,y(t-\tau)], \qquad (3)$$

$$X[t,\,0,\,\ldots,\,0] = Y[t,\,0,\,\ldots,\,0] = 0$$

удовлетворяют условиям: для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $\|x(t,\,t_0,\,\varphi,\,\psi)\| < \varepsilon$ при $\|\varphi\| < \delta$, $\|\psi\| < \delta$, $t \geqslant t_0$ и решение $z = 0$ системы

$$\dot{z}(t) = Y[t,\,0,\,0,\,z(t),\,z(t-\tau)]$$

равномерно асимптотически устойчиво, то решение $x = y = 0$ системы (3) равномерно устойчиво. Для системы

$$\dot{x}(t) = X[t, x(t), x(t-\tau), y(t), y(t-\tau)],$$
$$\dot{y}(t) = A(t)\,y(t) + B(t)\,y(t-\tau) + Y[t, x(t), x(t-\tau), y(t), y(t-\tau)], \quad (4)$$

где

$$|X[t, x, u, y, v]| \leqslant M(|y| + |v|)^{\beta}$$
$$|Y[t, x, u, y, v]| \leqslant M(|y| + |v|)^{1+\alpha}$$
$$\alpha > 0, \quad \frac{\beta}{\alpha} > 1.$$

Доказывается теорема, подобная известной теореме Ляпунова для особого случая критической системы с одним нулевым корнем: Если решение $z = 0$ системы

$$\dot{z}(t) = A(t)\,z(t) + B(t)\,z(t-\tau)$$

равномерно асимптотически устойчиво, то решение $x = y = 0$ системы (4) равномерно устойчиво и любые решения $x(t)$, $y(t)$ с достаточно малыми начальными данными удовлетворяет условию $y(t) \to 0$, $x(t) \to l$ при $t \to \infty$. Н. Н. Красовский

2915. Периодические решения квазилинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Эльсгольц Л. Э., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. **4.** М., АН СССР, 1959, 41

2916. Краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Ешуков Л. Н., Тр. 3-го Всес. матем., съезда, 1956. **4.** М., АН СССР, 1959, 21—22

2917. Об одном классе дифференциальных операторов четвертого порядка. Хилле (Über eine Klasse Differentialoperatoren vierter Ordnung. Hille Einar), Sitzungsber. Berliner Math. Ges., 1954—1955, 1955—1956, 39—44 (нем.)

Рассматривается вопрос о том, при каких условиях дифференциальный оператор $L_4[y] = -[b(x)\,y'']''$ в пространстве $L(-\infty, \infty)$ является производящим оператором сильно непрерывной полугруппы $T(t)$.

Автор отмечает, что если коэффициент $b(x)$ непрерывен и удовлетворяет неравенству

$$b(x) > M(1 + |x|)^{\nu+\alpha} \quad (\alpha > 1), \quad (1)$$

то спектр оператора L_4 дискретен и отрицателен и, опираясь на разложение $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} f_n \omega_n(x)$ по соответствующим собственным функциям, строит искомую полугруппу по формуле $T(t) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \omega_n(x) e^{\lambda_n t}$

Вкратце обсуждается также случай, когда $b(x)$ удовлетворяет неравенству вида (1) с $\alpha \leqslant 0$. Ю. И. Любич

2918. О первой краевой задаче для линейного уравнения четвертого порядка с малым параметром при старшей производной. Бриш Н. И., Уч. зап. Минск. гос. пед. ин-та, 1956, вып. 5, 3—13

Приводятся достаточные условия для того, чтобы решение $y_\varepsilon(x)$ задачи $\varepsilon y^{(4)} - A(x)\,y'' + B(x)\,y' + C(x)y = f(x)$ $(\varepsilon > 0)$, $y(a) = y(b) = y'(a) = y'(b) = 0$ при $\varepsilon \to 0$ стремилось на $[a, b]$ к решению $u(x)$ задачи $-A(x)\,u'' + B(x)\,u' + C(x)\,u = f(x)$, $u(a) = u(b) = 0$.

При этих условиях дается представление функции $y_\varepsilon(x)$ через $u(x)$ с точностью до слагаемого порядка малости $\sqrt{\varepsilon}$. Ю. Н. Валицкий

2919. Соотношение между методом полиномов и методом факторизации. Круликовская (Relations between the polynomial method and the factorization method. Królikowska Z.), Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1959, **7**, № 3, 157—168, XII (англ.; рез. русск.)

Показываются соотношения, имеющиеся между двумя методами решения задач на собственные значения, а именно между методом полиномов, данным в упрощенном виде Рубиновичем (Rubinowicz A., Proc. Phys., Soc., 1950, A **63**,766), и методом факторизации в виде, данном Инфельдом (Infeld, Hull, Revs Mod. Phys., 1951, **23**, 21) для случая конечного интервала.

Из резюме автора

2920. О росте спектральных функций дифференциальных систем второго порядка. Кац И. С., Изв. АН СССР. Сер. матем., 1959, **23**, № 2, 257—274

Подробно доказываются ранее сформулированные автором теоремы (РЖМат, 1957, 427). В. А. Марченко

2921. Матричные дифференциальные уравнения с параметром в краевых условиях и связанные с ними задачи о колебаниях. Адем (Matrix differential systems with a parameter in the boundary conditions and related vibration problems. Adem Julián), Quart. Appl. Math., 1959, **17**, № 2, 165—171 (англ.)

Как известно (РЖМат, 1955, 3218 К), задача о колебаниях нагружённой струны приводит к задаче о собственных значениях для дифференциального уравнения второго порядка, в которой краевые условия зависят от параметра λ. Автор ставит аналогичную задачу для системы $(Py')' + Qy' + \left(\frac{1}{2}Q' + R\right)y = \lambda W y$,

$(A + \lambda B)\,y(0) + Cy'(0) = 0$, $(D + \lambda E)\,y(1) + Fy'(1) = 0$,

где $y = y(x)$ — вектор; P, Q, R, W — матрицы, зависящие от x; A, B, C, D, E, F — постоянные матрицы. Сформулировано несколько простых теорем.

И. М. Соболь

2922. Собственные значения и собственные функции некоторых дифференциальных операторов четвертого порядка с малым параметром при старшей производной. Шишкин А. А., Докл. АН СССР, 1958, **123**, № 2, 249—251

Изучаются краевые задачи

$$L_\eta(u) = \lambda u, \quad u^{(\sigma)}(0) = u^{(\sigma)}(1) = 0 \ (\sigma = 0, 1, 2), \quad \text{(I)}$$
$$L_0(y) = \lambda y, \quad y(0) = y(1) = 0, \quad \text{(II)}$$

где $L_\eta \equiv -\eta^2 \frac{d^2}{dx^2}\left(p_2(x)\frac{d^2}{dx^2}\right) + L_0$,

$$L_0 \equiv -\frac{d}{dx}\left(p_1(x)\frac{d}{dx}\right).$$

Формулируется теорема:

Задача (I) имеет нетривиальные решения для

$$\eta_{\sigma,n} = \frac{\nu}{(3-\sigma)\,n\pi} \quad (\sigma = 1, 2; \quad n = 1, 2, \ldots)$$

и дополнительно для случая $\sigma = 1$ $\eta_{1,n} = \eta_n^*(n = 1, 2, \ldots)$, где $\nu = \int_0^1 \sqrt{\frac{p_1(x)}{p_2(x)}}\,dx$, η_n^* — корни трансцендентного уравнения $\operatorname{tg}\frac{\nu}{2\eta} = \int_0^1 \frac{dt}{p_1(t)} \Big/ \eta \sum_{i=0}^{1} \sqrt{\frac{p_2(i)}{p_1^3(i)}}$.

Вводится понятие области устойчивости R решения задачи (I).

Дается представление решения задачи

$L_\eta(z) = f(x)$, $z^{(\sigma)}(0) = z^{(\sigma)}(1) = 0$ $(\sigma = 0, 1, 2)$,

$f(x) \in C^2[0, 1]$, $f(0) = f(1) = 0$, в области R: $z(x, \eta) = v(x) + \eta^\sigma \omega(x, \eta) + \xi(x, \eta)$, где $v(x)$ — решение вырожденной задачи $L_0(v) = f(x)$, $v(0) = v(1) = 0$;

$|\omega(x, \eta)| < O(1)$; $|\omega'(x, \eta)| < \frac{1}{\eta} O(1)$. $\xi(x, \eta)$ — функция порядка η^{a+1} с первой производной порядка η^a.

Получены также представления для положительных собственных значений и соответствующих собственных функций задачи (I) через собственные значения и собственные функции вырожденной задачи (II).

Р. С. Гусарова

2923. Об одной задаче Штурма — Лиувилля. Перчинкова-Вычкова (За еден Sturm—Liouville-ob проблем. Перчинкова-В'чкова Даница), Годишен зб. Филос. фак. Ун-т Скопје. Природно-матем. одд., 1956 (1958), **9**, 33—36 (сербо-хорв.; рез. франц.)

Рассматривается краевая задача

$$y''' + \lambda y = 0, \qquad y^{(p)}(a) = y^{(q)}(a) = y^{(r)}(b) = 0, \tag{1}$$

p, q, r — целые положительные числа или нули, причем $y^{(0)} \equiv y$. Составлена таблица собственных значений и собственных функций задачи (1) для $(p, q, r) = (0, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(0, 1, 2)$, $(0, 2, 0)$, $(0, 2, 1)$, $(0, 2, 2)$, $(1, 2, 0)$, $(1, 2, 1)$, $(1, 2, 2)$.

Р. С. Гусарова

2924. О плотности собственных значений задач Штурма—Лиувилля у нижней границы спектра. Кордес (Über die Eigenwertdichte von Sturm—Liouville—Problemen am unteren Rand des Spektrums. Cordes Heinz Otto), Math. Nachr., 1958, **19**, № 1-6, 64—72 (нем.)

На отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ рассмотрим линейные дифференциальные операторы

$$L_1 u = -u'' + q_1(x)\, u, \quad u(a) = u(b) = 0,$$

и

$$L_2 u = u^{(4)} - (q_2(x)\, u')', \; u(a) = u'(a) = u(b) = u'(b) = 0.$$

Зададим произвольные $\varepsilon > 0$ и целое число N. Можно найти такие непрерывные на $[a, b]$ функции $q_1(x)$ и $q_2(x)$, что собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$ задачи $L\varphi = \lambda\varphi$ лежат в интервале $\lambda_1 \leqslant \lambda_i \leqslant \lambda_1 + \varepsilon$ (Оператор L — это L_1 или L_2 с соответствующими краевыми условиями; каждое λ_i считается столько раз, какова его кратность).

И. М. Соболь

2925. Обыкновенные дифференциальные системы с линейными условиями. Конти (Sistemi differenziali ordinari con condizioni lineari. Conti Roberto), Ann. mat. pura ed appl., 1958, **46**, 109—130 (итал.)

Рассматривается нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dx/dt = A(t, x)\, x + a(t, x), \tag{1}$$

где $\alpha < t < \beta$ ($-\infty \leqslant \alpha < \beta \leqslant +\infty$), $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $a(t, x)$ — действительные матрицы типа $n \times 1$ и $A(t, x)$ — вещественная матрица типа $n \times n$, причем предполагается, что в области $\alpha < t < \beta$, $\|x\| < +\infty$ выполнены условия Каратеодри, а $\|A(t, x)\|$, $\|a(t, x)\|$ — на любом отрезке $\Delta = [\gamma, \delta] \subset (\alpha, \beta)$ мажорируются суммируемыми функциями от t. Ставится задача: найти абсолютно-непрерывное на Δ решение $x(t)$ уравнения (1), удовлетворяющее условию:

$$\int_\gamma^\delta dF(t)\, x(t) = 0, \tag{2}$$

где $dF(t) = [dF_{ij}(t)]$ — известная матрица типа $n \times n$ с ограниченной вариацией на Δ, $c = (c_1, \ldots, c_n)$ — заданная матрица типа $n \times 1$, а интеграл понимается в смысле интеграла Римана-Стилтьеса. Выбирая в качестве $F_{ij}(t)$ соответствующие кусочно-постоянные функции, получим, как частный случай, n-точечную краевую задачу

$$x_i(s_i) = c_i \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{2'}$$

где $\gamma \leqslant s_1 \leqslant s_2 \leqslant \ldots \leqslant s_n \leqslant \delta$, обобщающую задачу Коши. Доказывается, что достаточным условием существования, по меньшей мере одного, решения задачи (1), (2) является выполнение неравенства:

$$\inf \left| \det \int_\gamma^\delta dF(t)\, R(t, \gamma; x(u)) \right| > 0, \tag{3}$$

где $u \in \Delta$ и

$$R(t, \tau; x) = E + \int_\tau^t A(t_1, x)\, dt_1 + \int_\tau^t \int_\tau^{t_1} A(t_1, x)\, A(t_2, x)\, dt_1\, dt_2 + \ldots$$

— „сбобщенный матрицант". В частности, если система (1) линейная и $A(t, x) = A(t)$, то условие (3) имеет вид

$$\det \int_\gamma^\delta dF(t)\, Y(t)\, Y^{-1}(\gamma) \neq 0,$$

где $Y(t)$ — фундаментальная матрица решений соответствующей однородной линейной системы.

Б. П. Демидович

2926. К проблемам различения Фроммера. Куклес И. С., ЎзССР Фанлар Акад. ахбороти. Физ.-матем. фанлари сер., Изв. АН УзССР. Сер. физ-матем. н., 1959, № 1, 91—104 (рез. узб.)

Рассматривается уравнение

$$r \frac{d\varphi}{dr} = \frac{F(\varphi) + f(r, \varphi)}{G(\varphi) + g(r, \varphi)}, \tag{1}$$

где r, φ — полярные координаты точки на плоскости, $F(\varphi)$ и $G(\varphi)$ — однородные многочлены от $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ степени $n \geqslant 2$, $f(r, \varphi)$, $g(r, \varphi)$ — периодические по φ с периодом 2π, непрерывны при малых $r > 0$ и всех φ, удовлетворяют условию Липшица по φ и исчезают вместе с r. Пусть $F(\varphi) = 0$, $G(\varphi) \neq 0$. Тогда $\varphi = 0$ есть исключительное направление в особой точке $r = 0$. Если функция $K(\varphi) \equiv \frac{F(\varphi)}{G(\varphi)}$ убывает в точке $\varphi = 0$, то по этому направлению к точке $r = 0$ может примыкать: а) одна интегральная кривая уравнения (1), б) бесконечно много интегральных кривых (первая проблема различения в теории Фроммера). Если $K(\varphi)$ имеет в точке $\varphi = 0$ экстремум, то по направлению $\varphi = 0$ к точке $r = 0$ может примыкать а) бесконечно много, б) ни одной интегральной кривой (вторая проблема различения). Если $K(\varphi) \equiv 0$, то опять могут встретиться две возможности: а) к точке $r = 0$ по любому направлению $\varphi = \varphi_0$ (за возможным исключением конечного числа таких направлений) примыкает одна и только одна интегральная кривая, б) расположение интегральных кривых будет иным (третья, по терминологии автора, проблема различения Фроммера). Автор ставит своей задачей выяснить, какой минимальной степени малости (при $r \to 0$) функций $f(r, \varphi)$ и $g(r, \varphi)$ в каждой из трех проблем достаточно для наличия расположения интегральных кривых типа a).

Сначала рассматриваются первая и вторая проблемы различения. Пусть

$$\frac{F(\varphi)}{G(\varphi)} = A_0 \varphi^k + A_1 \varphi^{k+1} + \ldots, \quad A_0 \neq 0, \; k > 1,$$

$$\alpha(r, u) \equiv f(r, u\, |\ln r|^{-\frac{1}{k-1}})\, |\ln r|^{\frac{k}{k-1}}.$$

Теорема 1. Если при любом фиксированном u $\lim_{r \to 0} \alpha(r, u) = 0$, то как в первой, так и во второй

проблеме различения для характеристик уравнения (1) имеет место расположение а).

Теорема 2. Пусть при любом фиксированном u существует конечный ($\neq 0$) или бесконечный $\lim\limits_{r\to 0}\alpha(r, u) = \alpha(0, u)$. В первой проблеме различения характеристики уравнения (1) будут иметь расположение б), если функция $\alpha(r, u)$ при малых r (когда $\alpha(0, u) = \infty$) или функция

$$Q(u) = -\frac{1}{k-1}u + A_0u^k + \alpha(0, u)$$

(когда $\alpha(0, u) \neq \infty$) при возрастании u меняет знак с минуса на плюс. Во второй проблеме различения характеристики будут иметь расположение а), если функция $\alpha(r, u)$ при малых r (когда $\alpha(0, u) = \infty$) или функция $Q(u)$ (когда $\alpha(0, u) \neq \infty$) сохраняет знак величины A_0.

Затем рассматривается третья проблема различения. Пусть E означает замкнутую область на декартовой плоскости $r\varphi$, которая получается из прямоугольника $0 \leqslant r \leqslant r_0$, $\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2$ изъятием конечного числа ($m \geqslant 0$) точек $(0, \varphi^{(i)})$, $i = 1, 2, \ldots, m$, вместе с их окрестностями малого радиуса δ.

Теорема 3. Пусть $f(r, \varphi) = \eta(r)\alpha(r, \varphi)$, где $\eta(r)$ монотонно стремится к нулю вместе с r. Если интеграл

$$\int_0 \frac{\eta(r)}{r}\,dr \qquad (2)$$

сходится и существует область E, в которой функция $|\alpha(r, \varphi)|$ ограничена сверху, то для всякого φ_0, $\varphi_1 \leqslant \varphi_0 \leqslant \varphi_2$, за исключением разве лишь значений $\varphi^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, имеется одна и только одна характеристика уравнения (1), которая пересекает ось $r = 0$ или касается ее в точке $(0, \varphi_0)$. Если интеграл (2) расходится и существует область E, в которой функция $|\alpha(r, u)|$ ограничена снизу, то характеристики могут пересекать ось $r = 0$ или касаться ее только в точках $(0, \varphi^{(i)})$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Имеется серия примеров. А. Ф. Андреев

2927. Методика построения областей устойчивости. **Виноградов Н. Н.**, Научн. докл. высш. школы. Физ.-матем. н., 1958, № 3, 36—39

Рассматривается система

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = f(x, y), \qquad (1)$$

где функции F и f удовлетворяют условию Липшица в любой ограниченной области плоскости x, y. Предполагается, что $f(0, 0) = F(0, 0) = 0$ и что нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво по Ляпунову.

При различных предположениях о характере кривых $F(x, y) = 0$ и $f(x, y) = 0$ и о поведении функции $F(x, y)/f(x, y)$ указываются способы приближенного нахождения траекторий, ограничивающих область устойчивости нулевого решения системы (1). В. А. Плисс

2928. Качественное исследование одной системы двух дифференциальных уравнений. **Железнов Е. И.**, Тр. Уральского политехн. ин-та, 1958, сб. 74, 180—188

Рассматривается система

$$\frac{dx}{dt} = y - F(x), \quad \frac{dy}{dt} = -g(x). \qquad (1)$$

Предполагается, что функции f и g удовлетворяют обобщенным условиям Гурвица

$$xF(x) > 0, \quad xg(x) > 0. \qquad (2)$$

Кроме того, предполагается, что выполнено хотя бы одно из условий

$$\varlimsup_{x\to\infty}\left[-F(x) - \int_0^x g(x)\,dx\right] \neq -\infty \qquad (3)$$

и

$$\varlimsup_{x\to-\infty}\left[F(x) - \int_0^x g(x)\,dx\right] \neq -\infty. \qquad (4)$$

Известно, что в этом случае нулевое решение системы (1) не является устойчивым в целом. Автор исследует характер расположения траекторий, ограничивающих область устойчивости, в зависимости от поведения функций $F(x)$ и $g(x)$. Например, доказывается, что если выполнено условие

$$\varlimsup_{x\to-\infty}\left[F(x) + \int_0^x \frac{g(x)\,dx}{y_0 - F(x)}\right] = \infty$$

при всех достаточно больших $y_0 > 0$, то область устойчивости ограничена одной траекторией, дважды пересекающей ось Oy. В работе имеется ряд неточностей и опечаток, например, условие (11) в теореме 1.1 следует заменить условием

$$\int_0^x \frac{g(x)}{F(x)}\,dx \geqslant -m \text{ при } x < 0.$$

В. А. Плисс

2929. Об одном критерии устойчивости. **Халанай** (Un criteriu de stabilitate. Halanay A.), Comun. Acad. RPR, 1959, **9**, № 3, 209—214 (рум.; рез. русск., франц.)

Доказывается теорема: Пусть дана система второго порядка

$$dy/dt = Y(y, t), \qquad (1)$$

где $y = \{u, v\}$ и $Y(y, t)$ — непрерывная (?) вектор-функция, аналитическая по y и ограниченная по t при $0 \leqslant t < +\infty$. Положим, что $\varphi(t, h)$ — семейство ограниченных при $t \geqslant 0$ решений системы (1), аналитическое относительно параметра h и такое, что производные $\partial^k\varphi(t, 0)/\partial h^k$ ($k = 1, 2, \ldots$) также ограничены при $t \geqslant 0$. Тогда, если

$$\|\varphi_h'(t, 0)\| \geqslant \gamma > 0$$

и

$$\int_{t_0}^t S_p\frac{\partial Y}{\partial y}[\varphi(t, 0), t]\,dt \leqslant -\gamma(t - t_0) + \chi(t),$$

где $\chi(t)$ — ограниченная функция, то решение $y = \varphi(t, 0)$ равномерно устойчиво. Для автономной системы (1) семейством ограниченных решений является $\varphi(t + h)$, где $\varphi(t)$ — ограниченное решение системы. Б. П. Демидович

2930. О существовании периодических решений дифференциального уравнения второго порядка. **Опяль** (Sur l'existence des solutions périodiques de l'équation différentielle du second ordre. Opial Z.), Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci, math., astron. et phys., 1959, **7**, № 2, 71—75 (франц.)

Изучаются периодические решения уравнения

$$u'' = f(t, u, u'). \qquad (1)$$

Относительно функции f делается следующее предположение (H); функция $f(t, u, v)$ непрерывна во всем пространстве (t, u, v) и периодична по t с периодом 1. Для каждой тройки чисел (t_0, u_0, v_0) существует одно и только одно решение $u(t)$ уравнения (1) такое, что $u(t_0) = u_0$ и $u'(t_0) = v_0$.

Теорема 1. Пусть $f(t, u, v)$ есть функция, возрастающая (в широком смысле) относительно u и удовлетворяющая предположению (H).

При этих условиях, если уравнение (1) допускает решение, ограниченное вместе со своей производной для всех $t \geqslant 0$, то оно допускает также по крайней мере одно периодическое решение с периодом 1.

Теорема 2. В предположениях теоремы 1, каждое решение, ограниченное в интервале $(-\infty, +\infty)$, есть

периодическое с периодом 1, и отличается самое большее на постоянную от каждого другого периодического решения уравнения (1).

Для каждого решения $v(t)$ уравнения (1), ограниченного для $t \geqslant 0$, существует периодическое решение этого уравнения $u(t)$ такое, что $\lim_{t\to+\infty}(v(t)-u(t))=0$. В то же время имеется решение, ограниченное для $t \leqslant 0$. Если функция $f(t, u, v)$ строго возрастает, то уравнение (1) допускает одно и только одно периодическое решение. Эти теоремы усиливают один из результатов Массера (Massera J., Duke Math. J., 1950, 17, 457—475).

Примечание референта. В условиях теоремы 2 справедливо также равенство $\lim_{t\to+\infty}(v'(t)-u'(t))=0$.

Ю. А. Клоков

2931. Заметка о периодических решениях дифференциального уравнения второго порядка без трения. Зейферт (A note on periodic solutions of second order differential equations without damping. Seifert George), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, **10**, № 3, 396-398 (англ.)

Изучается уравнение

$$\ddot{x}+g(x)=p(t). \qquad (1)$$

На функции $g(x)$ и $p(t)$, кроме требований, обеспечивающих существование и единственность решений уравнения (1) при любых начальных данных и любых (x, t), наложены условия: 1) существуют положительные константы τ и k, обеспечивающие при всех t: $p(t+\tau)\equiv p(t)$; $|p(t)|<k$, 2) $g(x)$ — определенная при всех x непрерывная неубывающая функция, $g(0)=0$ и для $|x|$ достаточно больших $|g(x)|>k$. Вводятся величины a и b из условий: $g(a)=-k$; $g(b)=k$, рассматривается кривая:

$$y=G(x)=\int_0^x g(v)\,dv \qquad (2)$$

и абсциссы ее точек пересечения: r_2 и r_3 с прямой $y=kx+C_1$ и r_1 и r_4 — с прямой $y=-kx+C_2$. Константы C_1 и C_2 подбираются так, чтобы $r_1<r_2<a<b<r_3<r_4$.

Подсчитываются числа: $M=|2(G(a)+ka-C_2)|^{1/2}$; $m=|2(G(a)-ka-C_1)|^{1/2}$; $d=a-r_2$ и

$$K=\max_{r_1\leqslant x\leqslant 0}(-g(x)+k)$$

Доказывается: Если $\tau<\min\left({}^{d}/_{M},\ {}^{m}/_{K}\right)$, то уравнение (1) имеет периодическое решение периода τ.

М. И. Ельшин

2932. О влиянии внешнего и внутреннего трения на динамическую устойчивость стержней. Коваленко К. Р., Прикл. матем. и механ., 1959, **23**, № 2, 239—248

Изучаются некоторые свойства характеристической функции

$$A(\lambda)=\frac{1}{2}\{\varphi(\pi,\lambda)+\psi'(\pi,\lambda)\}, \qquad (1)$$

где $\varphi(t,\lambda)$ и $\psi(t,\lambda)$ являются решениями уравнения

$$y''+\lambda p(t)\,y=0 \quad (p(t+\pi)\equiv p(t)) \qquad (2)$$

с начальными условиями $\varphi(0,\lambda)=1$; $\varphi'(0,\lambda)=0$; $\psi(0,\lambda)=0$; $\psi'(0,\lambda)=1$, которая использовалась А. М. Ляпуновым для определения зон устойчивости решений уравнения (2) (важно взаимное расположение корней уравнений $A(\lambda)-1=0$ и $A(\lambda)+1=0$). Выясняется порядок возрастания последовательности корней (1), даются оценки абсолютной величины (1) и действительных частей характеристических показателей решений уравнения (2) для достаточно больших λ. Далее рассматривается демпфированное уравнение

$$y''+2\mu\nu y'+\mu^2 q(t)\,y=0, \qquad (3)$$

где $\nu>0$, $\mu>0$, $g(t)\geqslant 0$ — вещественная периодическая функция периода π, непрерывная на $(0,\pi)$ и доказывается, что если $q(t)$ не равна нулю тождественно, то для каждого ν и всех достаточно больших μ все решения (3) асимптотически устойчивы. Эти результаты применяются к рассмотрению парадоксальных выводов, получающихся при решении ряда задач на параметрический резонанс без учета трения. В качестве примера возникновения такого парадокса рассматривается задача о динамической устойчивости призматического стержня, шарнирно опертого на концах. М. И. Ельшин

2933. О первой и второй проблемах различения Фроммера. Куклес И. С., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1959, № 2, 101—117

Рассматривается уравнение

$$xy'=Ay^kP(y)+f(x,y), \qquad (1)$$

где $A\neq 0$ — постоянное число, k — целое положительное число, функция $P(y)$ удовлетворяет при малых y условию Липшица, $P(0)=1$, функция $f(x,y)$ непрерывна в некоторой окрестности $(0,0)$, удовлетворяет условию Липшица по y и исчезает вместе с x. Если $A<0$ и k нечетное, то k $(0,0)$ из правой полуплоскости примыкает одна (расположение а)) или бесконечно много (расположение б)) характеристик уравнения (1). Если k четное, то из правой полуплоскости k $(0,0)$ примыкает либо а) бесконечно много характеристик, либо б) ни одной характеристики. Задачи о различении расположений а) и б) в этих двух случаях и составляют соответственно первую и вторую проблемы различения Фроммера для уравнения (1). Проблемами различения Фроммера ранее занимались многие математики. Автор, отправляясь от работ Лона, ставит своей целью решить обе проблемы при возможно более общих предположениях относительно функции $f(x,y)$.

В случае второй проблемы различения без ограничения общности можно считать $A=\frac{1}{k-1}$. Тогда подстановка

$$y=u|\ln x|^{\frac{1}{1-k}} \qquad (2)$$

приводит уравнение (1) к виду $x|\ln x|\frac{du}{dx}=\frac{1}{k-1}\times$ $\times(u^k-u)+\omega(x,u)+\varepsilon(x,u)$, где $\omega(x,u)=f(x,y)\times$ $\times|\ln x|^{\frac{k}{k-1}}$, $\varepsilon(x,u)=\frac{u^k}{k-1}\left\{P\left[u\,|\ln x|^{\frac{1}{1-k}}\right]-1\right\}$.

Теорема 1. Если существуют положительные числа u_0 и h такие, что

$$r(x,u)\equiv\frac{1}{k-1}(u^k-u)+\omega(x,u)>hu^k \quad \text{при} \quad |u|>u_0,$$

$$r(x,u)>h \quad \text{при} \quad -\infty<u<+\infty,$$

то характеристики уравнения (1) имеют расположение б). Если же в интервале $|u|<\varepsilon$ (где ε — сколь угодно мало) 1) $r(x,u)\leqslant 0$ или 2) $r(x,u)\geqslant 0$, но существуют значения u (вне этого интервала), при которых $r(x,u)<0$, то характеристики уравнения (1) имеют расположение а).

В случае первой проблемы различения, считая $k>1$, можно положить $A=-\frac{1}{k-1}$. Допустим сначала, что

$$\lim_{x\to+0} f(x,0)\,|\ln x|^{\frac{k}{k-1}}=0.$$

Подстановка (2) приводит уравнение (1) к виду

$$x|\ln x|\frac{du}{dx}=-\frac{1}{k-1}(u^k+u)+\omega(x,u)-\varepsilon(x,u).$$

Пусть, далее, $\alpha(x,u)=\dfrac{\omega(x,u)-\omega(x,0)}{u}$, $u\neq 0$, $\alpha(x,0)=\lim\limits_{u\to 0}\sup\alpha(x,u)$.

Теорема 2. Если существуют положительные числа u_0 и h такие, что $q(x,u)\equiv\frac{1}{k-1}(u^{k-1}+1)-\alpha(x,u)>hu^{k-1}$ при $|u|>u_0$, $q(x,u)>h$ при $-\infty<u<+\infty$, то характеристики уравнения (1) имеют расположение а). Если же существует число $\varepsilon>0$ такое, что в интервале $|u|<\varepsilon$ 1) $q(x,u)<0$ или 2) $q(x,u)>0$, но существует значение u (вне этого интервала), при котором $q(x,u)<0$, то имеет место расположение б).

Примечание. Функции $r(x,u)$ и $q(x,u)$ рассматриваются лишь для достаточно малых $x>0$.

Допустим, теперь, что

$$\lim_{x\to+0} f(x,0)\,|\ln x|^{\frac{k}{k-1}}=\gamma\neq 0,$$

где γ — конечное число или бесконечность. В этом случае также даются весьма общие достаточные условия наличия расположений а) и б) (теорема 3). Следствием этой теоремы является следующий результат. Пусть

$$\psi(x,y)=\frac{f(x,y)-f(x,0)}{y},\quad \lambda(x)=[f(x,0)]^{\frac{1}{k}},$$

$$g(x,v)=\frac{1}{k\lambda^{k-1}(x)}\left[(k-1)\psi(x,\lambda(x)v)+\frac{1}{\ln x}\right].$$

Если при всех значениях v и достаточно малых положительных x функция $g(x,v)$ сохраняет знак и удовлетворяет неравенству $g(x,v)<1-\alpha$, $\alpha>0$, то имеет место расположение а). Если же при всех v и малых $x>0$ $g(x,v)>1+\alpha$, то имеет место расположение б).

Во всех случаях анализируется вопрос о возможности ослабления указанных достаточных условий.

А. Ф. Андреев

2934. Об особых точках обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. V. Мацуда (урожд. Като) (Sur les points singuliers des équations différentielles ordinaires du premier ordre, V. Matuda Tizúko, née Kato), Отяномидзу дзёси дайгаку сидзэн кагаку хококу, Natur. Sci. Rept Ochanomizu Univ., 1957, 8, № 1, 1—6 (франц.)

В первом параграфе автор рассматривает уравнение $x\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, где $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ — несократимые полиномы от y с непрерывными коэффициентами. С помощью подстановки $x=e^t$ уравнение принимает вид:

$$\frac{dy}{dt}=\frac{P(e^t,y)}{yQ(e^t,y)}\qquad(1)$$

Наряду с уравнением (1), автор рассматривает вспомогательное уравнение:

$$\frac{dy}{ds}=\frac{P_0(y)}{Q_0(y)},\qquad(2)$$

где $P_0(y)=P(0,y)$ и $Q_0(y)=Q(0,y)$. Рассматривая решение уравнений (1) и (2) в комплексной области, автор предполагает, что существует ветвь $\bar\varphi(s)$ решения $\varphi(s)$ уравнения (2), имеющая действительный период ω при $0\leqslant I(s)<r$ (здесь $I(s)$ — коэффициент при мнимой части s и r — некоторое положительное число, причем $\bar\varphi(0)=0$ и $P_0(\bar\varphi)$, $Q_0(\bar\varphi)\neq 0$ при $0\leqslant I(s)<r$.

Автор доказывает, что существует решение уравнения (1) в виде ряда:

$$y(t)=\bar\varphi(t-\tau)+\sum_{j=0}^{\infty}p_j(t-\tau)e^{jt}\qquad(3)$$

равномерно сходящегося при $+0<I(t-\tau)<r-0$ и $R(t)\to-\infty$ (здесь $R(t)$ — действительная часть t, а функции p_i являются ω-периодическими). Автор доказывает, что всякое решение уравнения (1), исчезающее при $t=m\omega$ $(m=0,1,\ldots)$ при $R(t)<<0$ и при $0\leqslant I(t-\tau)<<r-0$ представимо в виде ряда (3). Доказывается следующая теорема: Пусть $\psi(t,\tau_0)$ — решение уравнения (1), исчезающее при $t=\tau_0$. Если $R(\tau_0)<<0$, то существует преобразование $\varkappa(t)=s$ такое, что $\bar\psi(\varsigma_0-m\omega,\tau_0)=0$ при всяком $m=0,1,2,\ldots$, где $\varsigma_0=\varkappa(\tau_0)$ и $\bar\psi(s,\tau_0)=\psi[\varkappa^{-1}(s),\tau_0]$; функция $\varkappa(t)$ разлагается в ряд $\varkappa(t)=t+\sum_{j=1}^{\infty}q_je^{jt}$, сходящийся при достаточно малом $|e^t|$.

Автор рассматривает множество начальных значений τ решения $y(t)$ уравнения (1), соответствующих фиксированному $x=x_0$ и таких, которые при $R(t)\to-\infty$ стремятся к периодическому решению $\bar\varphi(t)$ уравнения (2), и доказывает, что это множество будет замкнутым или незамкнутым, в зависимости от того, будет ли $I\varkappa(t)>0$, или $I\varkappa(t)<0$.

Во втором параграфе автор рассматривает уравнение

$$\frac{dy}{dt}=\frac{P(e^t,y)}{y[y-\beta(e^t)]Q(e^t,y)},\qquad(1)$$

где P и Q имеют тот же смысл, что и раньше, а $\beta(e^t)$ — непрерывная функция, не исчезающая при $e^t=0$. Автор получает для уравнения (1) результаты, аналогичные приведенным выше.

И. С. Куклес

2935. Структура явного решения уравнения интегральных кривых автономной системы в случае фокуса. Еругин А. Н., Докл. АН БССР, 1958, 2, № 11, 441—449

Автор рассматривает дифференциальное уравнение

$$\frac{dr}{d\theta}=gr^m+\sum_{n=1}^{\infty}R_n(\theta)r^{n+m}\qquad(1),$$

где r и θ — полярные координаты, $m\geqslant 3$ — нечетное целое число, g — постоянное отличное от нуля, а $R_n(\theta)$ — тригонометрические полиномы степени n.

Начало координат, очевидно, является фокусом, к которому характеристики приближаются по часовой стрелке, если $g<0$, и против часовой стрелки, если $g>0$. Предполагая, что $g<0$, автор показывает, что существует решение уравнения (1), имеющее следующую структуру:

$$r=\frac{1}{\theta_1}\left[1+\gamma(\theta_1)+o\left(\frac{1}{\theta_1^{k(m-1)+x}}\right)\right],\qquad(2)$$

где $\theta_1=\rho[\theta_1]^{\frac{1}{m-1}}$; $\rho=(m-1)\,|\,g\,|^{\frac{1}{m-1}}$; k — любое целое положительное число, x — целое, $0\leqslant x\leqslant m-2$, а $\gamma(\theta_1)$ с точностью до малых величин порядка не ниже, чем $\dfrac{1}{\theta_1^{k(m-1)+x}}$, имеет вид:

$$\gamma(\theta_1)=\sum_{r=0}^{k}\sum_{l=r(m-1)}^{k-1+x}h_{r,l}\frac{\ln^r\theta_1}{\theta_1^l}+$$

$$+\sum_{r=0}^{k-1}\sum_{l=m+r(m-1)}^{k(m-1)+x}H_{r,l}(\theta)\frac{\ln^r\theta_1}{\theta_1^l},$$

где $h_{r,l}$ — постоянные, а $H_{r,l}(\theta)$ — тригонометрические полиномы, причем для $h_{r,l}$ и $H_{r,l}(\theta)$ автор выводит рекуррентные формулы, позволяющие последовательно их определять. Радиус-вектор r, определяемый по формуле (2), стремится к нулю при $\theta \to +\infty$.

И. С. Куклес

2936. Качественное исследование системы двух дифференциальных уравнений методом «двух изоклин». Маркосян С. А., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1959, № 1(8), 114—128

Работа посвящена качественному изучению системы двух уравнений

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y); \qquad \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \tag{1}$$

с помощью изоклин нуля и бесконечности, пересекающихся в начале. Вводятся следующие определения:

1. Плоскость xOy делится на 4 области, ограниченные изоклинами нуля $Q(x, y) = 0$ и бесконечности $P(x, y) = 0$, причем эти области I, II, III и IV отсчитываются против часовой стрелки, начиная нумерацию с области, включающей положительную ось OX.

2. Особая точка называется обобщенным узлом, если она является узлом, или фокусом. Точка называется седлом, если к ней примыкает 4 гиперболических области и, кроме того, возможно, параболические области. (В последнем случае особую точку нужно было бы назвать как нибудь иначе, например, обобщенным седлом. *Реф.*).

3. Предполагается, что в каждом координатном углу имеется не более одной ветви изоклины бесконечности, а также не более одной ветви изоклины нуля и что эти изоклины пересекаются в начале.

В первом параграфе рассматривается случай, когда изоклины нуля расположены во втором и четвертом квадрантах, а изоклины бесконечности — в первом и третьем квадрантах. Сначала предполагается, что расположение знаком правых частей системы (1) (соответственно, в областях I, II, III и IV) имеет вид: (— +), (+ +), (+ —), (— —) или (+ —), (— —), (— +), (+ +) (в каждой скобке левый знак относится к функции $P(x, y)$, а правый знак — к функции $Q(x, y)$. Доказывается, что в этом случае начало для системы (1) является седлом.

Далее автор рассматривает случай, когда при том же расположении изоклин, распределение знаков правых частей системы (1) имеет вид: (— —), (+ —), (+ +), (— +), или (+ +), (— +), (— —), (+ —), причем точки изоклины бесконечности расположены ближе к оси OY, чем соответствующие (т. е. точки с теми же ординатами) точки изоклины нуля. При этих условиях автор доказывает, что начало для системы (1) есть обобщенный узел.

Далее автор рассматривает частный вид системы (1), а именно, систему:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= [f(x) + y]\,\Phi(x, y); \\ \frac{dy}{dt} &= [-x + \varphi(y)]\,F(x, y), \end{aligned} \tag{2}$$

где $|f(z)|$, $|\varphi(z)| \to \infty$ при $|z| \to \infty$ и

$$x\,\frac{F(x, -|y|)}{\Phi(x, -|y|)} \leqslant x\,\frac{F(x, y)}{\Phi(x, y)}, \tag{3}$$

причем изоклины нуля и бесконечности имеют то же расположение, что и раньше, а функции $\Phi(x, y)$ и $F(x, y)$ положительны. В этом случае начало для системы (2), как доказывает автор, является обобщенным узлом.

Далее в этом же параграфе автор рассматривает случай, когда изоклины нуля и бесконечности расположены в одном и том же квадранте; здесь рассматривается два подслучая: 1) в первом и третьем квадранте расположены по две изоклины и 2) аналогичное расположение изоклин имеется во втором и четвертом квадранте. Причем оказывается, что во всех случаях (кроме двух исключительных) в зависимости от расположения изоклин и распределения знаков правых частей системы (2) можно установить, что начало для этой системы является седлом, или обобщенным узлом.

Во втором параграфе автор рассматривает систему

$$\frac{dx}{dt} = [f(x) - y]\,\Phi(x, y); \quad \frac{dy}{dt} = [x - \varphi(y)]\,F(x, y), \tag{4}$$

где функции $\Phi(x, y)$ и $F(x, y)$ положительны. Предполагая, что в окрестности начала удовлетворяется неравенство (3) и изоклины нуля и бесконечности расположены соответственно во 2-м и 4-м и в 1-м и 3-м квадрантах, автор, исходя только из свойств изоклин (в частности, исследуя число точек пересечения этих изоклин с осями OX и OY), находит достаточные условия существования n предельных циклов (для системы (4), окружающих начало.

И. С. Куклес

2937. Характеристика негрубых особых точек динамической системы на плоскости при помощи грубых особых точек близких систем. Губарь Н. А., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. 4. М., АН СССР, 1959, 18

2938. О методе Фроммера исследования особой точки. Куклес И. С., Докл. АН СССР, 1957, **117**, № 3, 367—370

Изучается окрестность точки $x = y = 0$ уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y_n(x, y) + Y(x, y)}{X_n(x, y) + X(x, y)}, \tag{1}$$

где X_n и Y_n — однородные многочлены степени n, X и Y — аналитические функции, содержащие члены порядка выше n. Автор, развивая метод Фроммера, дает серию теорем, позволяющих судить о том, существуют ли у уравнения (1) интегральные кривые, входящие в начало координат с определенной касательной, конечно или бесконечно множество таких кривых. Кроме того, в заметке выясняются некоторые их геометрические свойства.

Д. М. Гробман

2939. О кратных предельных циклах. Цинь Юаньсюнь (Chin Yuan-Shun), Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1955, 5, № 2, 243—252 (кит.; рез. франц.)

2940. Поведение траекторий системы конечноразностных уравнений в окрестности особой точки. Панов А. М., Уч. зап. Уральского ун-та, 1956, вып. 19, 89—99

В заметке рассматриваются уравнения в итерациях

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= P(x_n, y_n) \\ x_{n+1} &= Q(x_n, y_n). \end{aligned} \tag{1}$$

Автор дает классификацию особых (неподвижных) точек системы (1) и по аналогии с теорией дифференциальных уравнений показывает способ определения типа особой точки по системе линейного приближения.

Далее с системой дифференциальных уравнений связывается, путем замены производных отношением конечных разностей, близкая к ней система уравнений в конечных разностях. Так как систему уравнений в конечных разностях можно рассматривать как итерационную систему, то ранее данная классификация особых точек имеет место и в данном случае.

Показано, что тип особой точки при переходе от дифференциальных уравнений к разностным сохраняется, если шаг системы в конечных разностях достаточно мал.

Е. А. Барбашин

2941. Предельные циклы четной кратности. Цинь Юань-сюнь (Chin Yuan-Shun), Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1955, 5, № 2, 269—282 (кит.; рез. англ.)

2942. Простой маятник с периодическим возмущением. Джефрис (The simple pendulum under periodic disturbance. Jeffreys Harold), Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1959, **12**, № 1, 124—128 (англ.)

Изучается маятник, находящийся под действием горизонтальной периодической силы

$$\ddot{x} + c^2 \sin x = \varepsilon \cos x \sin t, \qquad (1)$$

где ε — малый параметр и $c^2 \gg 1$. Доказывается существование периодического решения (1) и на основе изучения зависимости амплитуды этого решения от параметра $\nu = (c^2 - 1)\,\varepsilon^{-2/3}$ делаются выводы об его устойчивости или неустойчивости. Работа продолжает исследования Брауна в случае $c^2 = 1$, опубликованные в 1932 и 1933 гг. В статье имеются ссылки на эти работы. М. И. Ельшин

2943. Периодическое решение второго рода обобщенного уравнения маятника. Сансоне (Soluzioni periodiche di seconda specie dell'equazione del pendolo generalizzata. Sansone Giovanni), Atti Accad. naz. Lincei. Mem. Cl. sci. fis., mat. e natur., Sez. 1, 1959, 5, № 4, p. 59—79) (итал.)

Изучается уравнение

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + f(\theta, \alpha)\frac{d\theta}{dt} = g(\theta) \qquad (1)$$

в предположениях: 1) $f(\theta, \alpha)$ определена при $\alpha > 0$ и всех действительных θ; при фиксированном α непрерывна по θ и при фиксированном θ является возрастающей (в строгом смысле) функцией α; $f(\theta, \alpha) > 0$; $f(\theta + 2\pi) \equiv f(\theta)$. 2) $g(\theta)$ удовлетворяет условию Липшица и $g(\theta + 2\pi) \equiv g(\theta)$. 3) $\int_0^{2\pi} g(\theta)\,d\theta > 0$. С помощью преобразования Лиенара доказывается существование и единственность решения (1), соответствующего произвольным начальным условиям, а также существование критического значения α_0 такого, что при $\alpha < \alpha_0$ существует единственное периодическое решение второго рода (в цилиндрическом пространстве (θ, θ') — цикл, охватывающий цилиндр). α_0 может быть нулем, положительным или бесконечным. В последнем случае при каждом положительном α существует единственное периодическое решение второго рода (осуществляется, например, если $g(\theta) > 0$ при всех θ). При $\alpha_0 = 0$ ни при каком положительном α уравнение (1) не имеет такого решения. В последней части работы рассуждения проводятся при дополнительных предположениях непрерывности $f'_\theta(\theta, \alpha)$ и $g(\theta)$ и наличия на отрезке $[0, 2\pi]$ только конечного числа простых корней $g(\theta)$. Из равномерного относительно $\theta \in [0, 2\pi]$ стремления к пределу

$$\lim_{\alpha \to 0} f(\theta, \alpha) = 0 \qquad (2)$$

вытекает существование $\alpha_0 > 0$ (оно может быть бесконечным). Если кроме (2) имеет место

$$\lim_{\alpha \to \infty} f(\theta, \alpha) = \infty \qquad (3)$$

равномерно относительно θ на интервале, где $g(\theta) < 0$, то α_0 не может быть бесконечным. Изложенное в статье охватывает известные результаты Америо и Зельферта (имеются соответствующие ссылки). В № 11 имеется опечатка. Вместо условия (2) в формулировке основной теоремы стоит: $\lim_{\alpha \to \infty} f(\theta, \alpha) = 0$, противоречащее строгому возрастанию $f(\theta, \alpha) > 0$ относительно α при фиксированном θ. Однако при доказательстве используются „достаточно малые" значения α, соответствующие (2).

М. И. Ельшин

2944. Некоторые замечания о движении осциллятора переменной массы. Шевело В. Н., Укр. матем. ж., 1959, **11**, № 1, 105—108

Изучается уравнение

$$m(t)\dot{u} = F + \dot{m}(v - u), \qquad (1)$$

где $m(t)$ — переменная масса осциллятора, а v—абсолютная скорость отделяющихся частиц. Рассматриваются частные случаи, когда $F = k\varphi$ и $m(t)$ меняется монотонно. Исследуется связь возрастания или убывания амплитуды решения уравнения (1) с монотонным возрастанием или убыванием массы как в случаях $u - v = 0$ и $u - v \neq 0$, так и в случае малых колебаний маятника с монотонно меняющейся массой. В статье содержится утверждение, что в случае $u = v$, когда уравнение (1) принимает вид

$$m(t)\ddot{\varphi} + k\varphi = 0 \qquad (2)$$

при медленном и монотонном изменении массы решение (2)

$$\varphi = A\sqrt[4]{\frac{m(t)}{m(0)}}\sin\left[\int_0^t \sqrt{\frac{k}{m(t)}}\,dt + \beta\right] \qquad (3)$$

можно считать практически точным. При этом не делается оговорки, что A и β являются неизвестными функциями t, стремящимися к определенным пределам при $t \to \infty$, вообще сильно отличающимся от значений этих функций при $t = 0$. М. И. Ельшин

2945. О некоторых периодических решениях нелинейных дифференциальных уравнений. Фор (Sur certaines solutions périodiques d'équations différentielles non linéaires. Faure Robert), Actes IX Congr. internat. mécan. appl. T. 7. Bruxelles, Univ. Bruxelles, 1957, 206—214 (франц.)

Рассматривается дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' + K_1 y' + K_2 y = f(y, y', t), \qquad (1)$$

где K_1 и K_2 — действительные ненулевые постоянные и $f(y, y', t)$ — действительная функция аналитическая по переменным y, y', t и периодическая с периодом T по переменной t. Полагается $f(y, y', t) = a_{00}(t) + a_{10}(t)\,y + a_{01}(t)\,y' + \sum_{p+q>2} a_{pq}(t) y^p y'^q$, где функции $a_{pq}(t)$ периодические с периодом T, причем $\int_0^T a_{pq}(t)\,dt = 0$ при $p + q \leqslant 1$. Коэффициенты $a_{pq}(t)$ допускают разложения в абсолютно сходящиеся ряды Фурье $a_{pq}(t) = \sum_n a_{pq,n} e^{in\omega t}$, где $\omega = 2\pi/T$. Вводится норма $A_{pq} = \| a_{pq}(t) \| = \sum_n |a_{pq,n}|$, причем предполагается, что $A_{00} \neq 0$ и двойной ряд $\sum_{p,q} A_{pq} y^p y'^q$ сходится в области $D\{|y| \leqslant Y, |y'| \leqslant Y'\}$, где Y, Y' — положительные постоянные. Периодическое решение $y = y(t)$ уравнения (1) ищется в виде предела последовательных приближений

$$y = \lim_{n \to \infty} u_n(t), \qquad (2)$$

где $u_n = u_n(t)$ — периодические функции с конечной нормой, рекуррентно определяемые из линейных дифференциальных уравнений

$$u_n'' + K_1 u_n' + K_2 u_n = f(u_{n-1}, u_{n-1}', t) \qquad (3)$$

$(u_{n-1}, u'_{n-1} \in D)$. Исследуются условия существования и сходимости последовательности $\{u_n(t)\}$.
Б. П. Демидович

2946. О зонах устойчивости для вынужденных колебаний некоторых нелинейных систем. Иванов Е. Г., Научн. докл. высш. школы. Физ.-матем. н., 1958, № 2, 41—47

Изучается устойчивость периодического решения уравнения

$$\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + F(x) = R\cos\nu t. \qquad (1)$$

Для этого пишется система уравнений в вариациях, устойчивость которой исследуется с помощью функции Ляпунова. Полученные достаточные условия устойчивости применяются к уравнению

$$\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \lambda x - \frac{1}{3}\eta x^3 = R\cos\nu t. \qquad (2)$$

Примечание референта. В статье исследуемое периодическое решение уравнения (2) записывается в виде $x = a^*\cos(\theta - \psi^*)$, где $\theta = \nu t$, $a^* = a^*(t)$, $\psi^* = \psi^*(t)$, затем выражения, содержащие a^* и ψ^*, интегрируются по θ (стр. 44—45) так, как если бы a^* и ψ^* были постоянными. Из-за этой неточности все результаты, полученные на стр. 45—46, нельзя считать строго доказанными.
А. Ф. Филиппов

2947. Отыскание периодических решений нелинейных дифференциальных уравнений, коэффициенты которых — зубцеобразные функции. Вала (Détermination des solutions périodiques des équations différentielles non linéaires, dont les coefficients varient suivant une fonction créneau. Valat Jean), C. r. Acad. sci., 1958, **247**, № 22, 1961—1964 (франц.)

Рассматривается уравнение

$$y'' + a(t)\,y + \varepsilon(t)\,y^3 = 0, \qquad (1)$$

где $a(t) = a_1 + a_2 S(t)$, $\varepsilon(t) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 S(t)$, $S(t)$ — разрывная функция периода T, равная 1 на одной половине периода и равная -1 на другой. Чтобы получить достаточные условия существования решения периода T, автор заменяет в уравнении (1) коэффициенты на постоянные, полагая один раз $S(t) = 1$, а другой раз $S(t) = -1$, и строит для полученных двух уравнений траектории на фазовой плоскости. Из кусков этих траекторий составляется решение уравнения (1). Приведен числовой пример.
А. Ф. Филиппов

2948. Колебания механических систем с одной степенью свободы и обобщенными силами, не зависящими явно от времени. Земба (Vibrations of mechanical systems with one degree of freedom and generalized forces not depending in an explicit manner on time. Ziemba Stefan), Arch. mech. stosowanej, 1958, **10**, № 5, 649—669 (англ.; рез. польск., русск.)

Рассматривается уравнение

$$\ddot{q} + \varphi(q, \dot{q}) + \psi(q) = 0, \qquad (1)$$

где функция ψ нечетная, а $\varphi(q, \dot{q})$ четная по q и нечетная по $\dot{q}$, $q\varphi(q, \dot{q}) > 0$ для $q \neq 0$, $\partial\varphi/\partial q \geqslant 0$. Траектории уравнения (1) на фазовой плоскости исследуются путем сравнения их с траекториями уравнения $\ddot{q} + \psi(q) = 0$ или некоторого линейного уравнения. Излагается известный графический дельта-метод построения траекторий уравнения (1). Статья носит методический характер.
А. Ф. Филиппов

2949. О существовании периодических решений дифференциального уравнения второго порядка, зависящего от параметра. Миколайская (Sur l'existence de solutions périodiques de l'équation différentielle du second ordre dépendant d'un paramètre. Mikołajska Z.), Ann. polon. math., 1959, **6**, № 1, 51—68 (франц.)

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$x'' = g(t, x, x', \lambda), \qquad (1)$$

где $g, g_x, g_{x'}, g_\lambda \in C(R_4)$, (R_4) — евклидово пространство переменных (t, x, x', λ) и функция g периодична по t с периодом T $(T > 0)$.

Теорема. Пусть $\psi_0 = \psi_0(t)$ — периодическое решение уравнения (1), периода T такое, что

$$|g_x(t, \psi_0, \psi_0', 0)|, \quad |g_{x'}(t, \varphi_0, \psi_0', 0)|,$$

$$|g_\lambda(t, \psi_0, \psi_0', 0)| < M$$

при $-\infty < t < +\infty$,

где M — положительная постоянная. Если выполнено неравенство $\left|\int_0^T g_x(t, \psi_0, \psi_0', 0)\,dt\right| > M^2T^2\left(3T + \frac{7}{2}\right)$, то существует $L > 0$ такое, что при $|\lambda| \leqslant L$ уравнение (1) имеет, по меньшей мере, одно периодическое решение $x = \psi(t; \lambda)$, непрерывно зависящее от параметра λ.
Б. П. Демидович

2950. Об устойчивости интегралов уравнения Хилла. Патнам (On the stability integrals of the Hill equation. Putnam C. R.), J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1959, **7**, № 1, 101—106 (англ.)

Рассматривается уравнение

$$x'' + (\lambda + f(t))\,x = 0, \qquad (1)$$

где λ — действительный параметр, $f(t)$ — действительная непрерывная функция, определенная при всех действительных t и имеющая период P. Изучаются оценки для λ типа:

$$\lambda^+ \geqq \left(\frac{n\pi}{P}\right)^2\left[1 - \frac{P}{4n^2}\int_0^P f^+(t)\,dt\right], \qquad (2)$$

где $\lambda^+ = \max(0, \lambda)$ и $f^+ = \max(0, f)$, при выполнении которых на $[0, P]$ решения уравнения (1) имеют не менее $n+1$ нулей. Равенство имеет место лишь в случае, когда $\lambda^+ = \lambda$ и $f(t) \equiv 0$. Отсюда при $f(t) \geqslant 0$ получаются условия

$$\frac{\pi^2(n-1)^2}{P^2} < \lambda < \frac{\pi^2 n^2}{P^2} - \frac{\pi^2}{4P}\int_0^P f(t)\,dt \qquad (3)$$

для n-го интервала устойчивости, обобщающие теорему А. М. Ляпунова. Эти результаты сравниваются с результатами Хартмана, Хартмана — Винтнера, Крейна и др. Библ. 17 назв.
М. И. Ельшин

2951. Об отношении $f[t + cf^{-\alpha}(t)]\,f(t)$. Хартман (On the ratio $f(t+cf^{-\alpha}(t))/f(t)$ Hartman Philip), Boll. Unione mat. ital., 1959, **14**, № 1, 57—61 (англ.)

В исследованиях об асимптотическом поведении решений уравнения $x'' \pm f(t)\,x = 0$ при $t \to \infty$ встречается требование

$$\sup_{u \leqslant v < \infty} \frac{|\ln[f(u)/f(v)]|}{1 + \int_u^v f^\alpha(t)\,dt} \to 0 \quad \text{при } u \to \infty,$$

характеризующее „регулярность роста" функции $f(t) > 0$. Впервые аналогичное условие введено автором (Trans. Amer. Math. Soc., 1948, **63**, 560—580). В реферируемой статье доказано, что это требование эквивалентно совокупности двух условий:

$$\int^\infty f^\alpha(t)\,dt = \infty \text{ и } f[t + cf^{-\alpha}(t)]/f(t) \to 1$$

равномерно относительно любого ограниченного множества c.

Примечание референта. В резюме допущена опечатка, извращающая смысл теоремы. Должно быть: (1) и $\int^{\infty} f^2(t)\,dt = \infty$ эквивалентны (3).

И. М. Соболь

2952. О неравенстве Ляпунова. Винтнер (On an inequality of Liapounoff. Wintner Aurel), Quart. Appl. Math., 1958, **16**, № 2, 175—178 (англ.)

Рассматривается уравнение

$$x''(t) + p(t)\,x(t) = 0, \qquad (1)$$

где $p(t)$ — непрерывная неотрицательная функция для всех рассматриваемых значений t.

Вводятся понятия примитивного и вполне примитивного (complete primitive) интервалов решения $x(t)$ уравнения (1).

Замкнутый интервал $[c, d]$ называется примитивным интервалом $x(t)$, если ни $x(t)$, ни $x'(t)$ не имеют нулей внутри интервала (c, d); замкнутый интервал $[c, d]$ называется вполне примитивным интервалом $x(t)$, если ни для одного $\varepsilon > 0$ замкнутый интервал $[c-\varepsilon, d+\varepsilon]$ не является примитивным интервалом $x(t)$.

Доказывается теорема: если $p(t)$ — непрерывная и неотрицательная функция на $[a, b]$ и если $[a, b]$ содержит точно n примитивных интервалов некоторого решения $x(t)$ уравнения (1), то

$$\int_a^b p(t)\,dt > \frac{n^2}{b-a}.$$

Следствия:

1) Если обозначить $P = \left\{(b-a)\int_a^b p(t)\,dt\right\}^{1/2}$, то решение $x(t)$ уравнения (1) не может иметь на $[a, b]$ более чем $[P]$ интервалов, на которых $x(t)$ и $x'(t)$ строго монотонны, $[P]$ — целая часть P.

2) Если уравнение (1) имеет решение $x(t)$, для которого $x(t)$ и $x'(t)$ имеют вместе не более 1 нуля на (a, b), то

$$\int_a^b p(t)\,dt > \frac{4}{b-a}$$

Примечание референта. Теорема в такой формулировке не верна. Пример: $x'' + \frac{x}{4} = 0$, $x(t) = \sin\frac{t}{2}$. Отрезок $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ содержит 1 примитивный интервал, однако $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}\,dt < \frac{2}{\pi}$. Теорема верна лишь для отрезка $[a, b]$, содержащего n вполне примитивных интервалов.

Доказательство автора проходит только для этого случая. Р. С. Гусарова

2953. Об одной «точной оценке» мультипликаторов дифференциальных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами. Карасева Т. М., Докл. АН СССР, 1958, **121**, № 1, 34—36

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y'' + p(x)\,y = 0 \quad (-\infty < x < +\infty), \qquad p(x+T) = p(x). \qquad (1)$$

Мультипликаторами уравнения (1) называются корни уравнения $\rho^2 - 2A\rho + 1 = 0$, где A — постоянная Ляпунова.

В работе получена оценка абсолютной величины мультипликатора, которая в ряде случаев является более удобной, чем оценка В. А. Якубовича (Докл. АН СССР, 1952, **87**, 345; РЖМат, 1955, 5020) и В. И. Бурдиной (РЖМат, 1954, 3315). Р. С. Гусарова

2954. О первом интервале устойчивости уравнения Хилла. Патнам (On the first stability interval of the Hill equation. Putnam C. R.), Quart. Appl. Math., 1959, **16** № 4, 421—422 (англ.)

Рассматривается уравнение

$$x'' + (\lambda + f(t))\,x = 0, \qquad (1)$$

где $f(t)$—непрерывная периодическая функция периода 1. Доказано, что для правого конца λ_1 первого интервала устойчивости (λ_0, λ_1) уравнения (1) при выполнении условия $\int_0^1 f^+ dt \leqslant 4$, где $f^+(t) = \max[0, f(t)]$, имеет место оценка

$$\lambda_1 \geqslant \pi^2\left(1 - \frac{1}{4}\int_0^1 f^+ dt\right), \qquad (2)$$

где равенство имеет место лишь при $f \equiv 0$. Оценка (2) улучшает известную оценку $\lambda_1 \geqslant 4\left(1 - \frac{1}{4}\int_0^1 f^+ dt\right)$.

Р. С. Гусарова

2955. Заметка о линейных дифференциальных уравнениях второго порядка. Черкасов А. Н., Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., механ., астрон., физ., химии, 1958, № 3, 13—17

Доказана теорема: Если в уравнении $y'' + p(x)y' + q(x)\,y = 0$ коэффициенты таковы, что при $x \geqslant x_0$ выполнены условия теоремы существования и единственности и, кроме того, $m \leqslant p(x) \leqslant M$, $\mu \leqslant q(x) \leqslant \mathfrak{M} < 0$, то через каждую точку полуплоскости $x \geqslant x_0$ проходит одна интегральная кривая $y = \varphi(x)$, для которой $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = 0$.

Метод доказательства — исследование соответствующего уравнения Риккати. Нетрудно доказать, что для справедливости теоремы достаточно требовать, чтобы было $p(x) \geqslant m$ и $q(x) \leqslant \mathfrak{M} < 0$. И. М. Соболь

2956. Качественная теория линейного дифференциального уравнения второго порядка. Ельшин М. И., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. Т. 4. М., АН СССР, 1959, 20—21

2957. О свойстве заменительности дисперсий и решений дифференциального уравнения $\sqrt{|X'|}\left(\frac{1}{\sqrt{|X'|}}\right)'' + q(X)\,X'^2 = Q(t)$. Барвинек (Barvínek Frich), Spisy vyd. přírodověd. fak. Masarykovy univ., 1958, № 4, 141—155 (рез. чешск., нем.)

Рассматриваются три дифференциальных уравнения:

$$y'' = q(t)\,y, \qquad (q)$$

$$Y'' = Q(t)\,Y, \qquad (Q)$$

$$\sqrt{|X'|}\left(\frac{1}{\sqrt{|X'|}}\right)'' + q(X)\,X'^2 = Q(t), \qquad (q, Q)$$

причем интегралы (q) и (Q) колеблются неограниченно как при $t \to +\infty$, так и при $t \to -\infty$. По терминологии О. Борувка (РЖМат, 1956, 406), каждый интеграл (q, q) называется дисперсией уравнения (q). Множество этих интегралов образует группу. Центральной дисперсией $\varphi_{\pm n}(t)$ называется расстояние до n-го следующего справа (+) или соответственно предшествующего слева (—) нуля интеграла (q), обращающегося в нуль при t. Аналогично определяются дисперсии уравнения (Q). В работе выясняются необходимые и достаточные условия для того, чтобы $Z \in (Q, Q)$ при данных $X \in (q, Q)$ и

$\zeta \in (q, q)$ удовлетворяли функциональному уравнению

$$X[Z(t)] = \zeta[X(t)] \qquad (1)$$

в интервале $(-\infty, +\infty)$. Вводятся отображения групп (Q, Q), (q, q) и (q, Q) на группу L — унимодулярных матриц второго порядка (деформации). Вводятся понятия конгруэнтности дисперсий и их подобия. Доказывается, что уравнение (1) имеет решение тогда и только тогда, когда Z подобно ζ. В результате доказывается теорема 3: Уравнение (1) справедливо для всех $X \in (q, Q)$ тогда и только тогда, когда $Z(t) \equiv \zeta(t) \equiv t$. Оно справедливо для всех возрастающих $X \in (q, Q)$ тогда и только тогда, когда $Z = \Phi_n$ и $\zeta = \varphi_n$. Оно справедливо для всех убывающих $X \in (q, Q)$ тогда и только тогда, когда $Z = \Phi_n$ и $\zeta = \varphi_{-n}$. Φ_n и φ_n — соответственно центральные дисперсии уравнений (Q) и (q).

М. И. Ельшин

2958. Теоремы о существовании интегральных и критических прямых однородной системы n дифференциальных уравнений ($n \geqslant 3$). Шестаков А. А., Успехи матем. наук, 1959, **14**, № 1, 245—248

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s^m, \quad s = 1, \ldots, n, \; m \geqslant 2, \; n \geqslant 3, \qquad (1)$$

правые части которой являются формами степени m. Вводятся определения: 1. Если для решения $x_s = x_s(t)$ системы (1) некоторая прямая $x_s = x_s^0 + g_s\tau$ (τ — параметр), является асимптотой при $t \to \infty$ (все $x_s(t) \to \infty$), то будем говорить, что интегральная кривая входит в ∞-точку в направлении $g = (g_1, \ldots, g_n)$. 2. Прямые, по которым в особую точку $(0, \ldots, 0)$ или в ∞-точку могут входить интегральные кривые системы (1), назовем критическими прямыми. Доказываются теоремы: 1. Система (1) при нечетном n имеет по крайней мере одну интегральную прямую. 2. Если m четное, то система (1) имеет по крайней мере одну интегральную прямую. 3. Направляющими коэффициентами критических прямых системы (1) являются числа g_s, где $g = (g_1, \ldots, g_n)$ — вещественное решение уравнений $x_1 : X_1^m = \ldots = x_n : X_n^{(m)}$, определяющих интегральные прямые.

Примечания референта. Утверждение теоремы 1 содержится в работе референта (РЖМат, 1956, 8034). В теореме 2 слово „нечетное“ следует заменить словом „четное“.

Л. Э. Рейзинь

2959. Некоторый класс интегральных кривых в трехмерном пространстве. Колман (A certain class of integral curves in 3-space. Coleman Courtney), Ann. Math., 1959, **69**, № 3, 678—685 (англ.)

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \qquad (1)$$

где $f(x)$ — действительная векторная функция, компонентами которой являются однородные многочлены степени $m \geqslant 1$ от компонент вектора x в n-мерном пространстве. Если $x(t)$ — решение системы (1), то коническая поверхность $S(x)$, определенная $x = kx(t)$, $k > 0$, является интегральной поверхностью системы (1). Поверхность $S(x)$ пересекается с единичной сферой $|x| = 1$ по интегральным кривым $y(t)$ системы

$$\frac{dy}{dt} = f(y) - (y, f(y))\, y, \qquad (2)$$

где $y = x/|x|$. Для $n = 3$ проводится классификация поверхностей $S(y)$ по ω- и α-предельным множествам соответствующих интегральных кривых $y(t)$ и в каждом случае выясняется возможное расположение интегральных кривых системы (1) на $S(y)$, кроме случая, когда ω- или α-предельное множество $y(t)$ состоит из конечного числа особых точек и интегральных кривых системы (2).

Л. Э. Рейзинь

2960. О топологической эквивалентности некоторых состояний равновесия системы трех дифференциальных уравнений. Минц Р. М., Научн. докл. высш. школы, Физ.—матем. н., 1958, № 1, 19—24

Два состояния равновесия динамических систем

$$dx_i/dt = X(x_1, \ldots, x_n) \qquad (1)$$

и

$$dy_i/dt = Y_i(y_1, \ldots, y_n), \quad (i = 1, \ldots, n), \qquad (1')$$

где $X_i, Y_i \in C^1$, называются топологически эквивалентными, если существует топологическое отображение, переводящее некоторую окрестность одного из них в окрестность другого, при котором траектории отображаются в траектории. Доказывается, что для случая $n = 3$: 1) простые узлы и фокусы и 2) простые седла и седла-фокусы систем (1) и (1′), топологически эквивалентны.

Б. П. Демидович

2961. Представление решений систем дифференциальных уравнений в окрестности особых начальных данных. Зубов В. И., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. Т. **4**, М., АН СССР, 1959, 22—23

2962. К вопросу об оценке числа нулей решений уравнения $y''' + p(x)y' + q(x)y = 0$. Азбелев Н. В., Научн. докл. высш. школы. Физ.-матем. н., 1958, № 3, 5—7

Сформулирован ряд признаков неосцилляции решений уравнения третьего порядка. Все признаки носят характер теорем сравнения. Например, теорема 3: Пусть $2q(x) - p'(x) \geqslant 0$ при $x \in (a, c)$. Для того чтобы промежуток (a, c) был промежутком неосцилляции для уравнения $L_1[y] \equiv y''' + p(x)y' + q(x)y = 0$, необходимо и достаточно существование такой трижды непрерывно дифференцируемой на $[a, c]$ функции $w(x)$, что $w(x) > 0$, $L_1[w] \leqslant 0$, $w(a) = w'(a) = 0$, $w''(a) = 1$.

И. М. Соболь

2963. Метод качественного анализа сильно нелинейных дискретных колебательных систем в фазовом пространстве. Сковронский (A method of qualitative analysis of vibrating discrete systems with strong non-linearity in the phase space. Skowroński Janisław), Arch. mech. stosowanej, 1958, **10**, № 5, 715—726 (англ.; рез. польск., русск.)

Рассматриваются нелинейные неавтономные системы, описываемые уравнениями

$$m_i \ddot{q}_i + f_i(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t) \quad (i = 1, \ldots, n), \qquad (1)$$

и — соответствующие им динамические системы

$$\frac{dx_i}{d\tau} = f_i(x_1, \ldots, x_{2n}, t), \quad \frac{dt}{d\tau} = 1 \quad (i = 1, \ldots, 2n), \qquad (2)$$

решения которых ограничены и продолжимы при $\tau \in [t_0, \infty]$. Обсуждается связь ограниченности решений с вопросами существования функции Ляпунова H, в качестве которой рассматривается, в частности, полная энергия системы. Описываются некоторые методы качественного анализа траекторий (2). Для этих методов существенно представление функций f^i в виде $f^i = \Phi^i(x^1, \ldots, x^{2n}) + \Psi^i(x^1, \ldots, x^n) + e^i(t)$, где функции Φ^i, Ψ^i и $e^i(t)$, описывающие диссипативные, потенциальные и возмущающие силы, имеют вид, характерный для колебательных систем. Автор считает целесообразным во избежание трудностей, связанных с неавтономностью системы, описывать траектории (2) итерациями $x^i(t_j)$ $(t_j = t_{j-1} + \Delta t)$. Рассматриваются проекции траекторий на двумерные подпространства $\{x^i, x^{i+n}\}$. Описываемый метод анализа опирается на изучение вектора $\{\delta^i\}$, $\delta^i = f^{n+i}(x^1, \ldots, x^{2n}, t) - x^i$, годограф которого

при итерациях характеризует свойства траекторий. Изучение годографа $\{\delta^i\}$ связано с рассмотрением тензора второго ранга $\{\partial\delta^i/\partial x^j\}$, описывающего производную $\{\delta^i\}$. Рассматриваются случаи, соответствующие определенным физическим характеристикам системы ($(\partial f^i/\partial x^i)\,x^i > f^i$ — жесткая, $(\partial f^i/\partial x^i)\,x^i < f^i$ — мягкая, $(\partial f^i/\partial x^i)\,x^i = f^i$ — линейная характеристика). Приложение метода иллюстрируется на колебательной системе с двумя степенями свободы. Н. Н. Красовский

2964. **Примечание к осцилаторическим свойствам решений уравнения третьего порядка. Грегуш** (Poznámka k oscilátorickým vlastnostiam riešení lineárnej diferenciálnej rovnice tretieho rádu. Greguš M.), Acta Fac. rerum natur. Univ. Comenianae Math., 1958, 3, № 1, 23—28 (словацк.; рез. русск., нем.)

Изучается линейное дифференциальное уравнение третьего порядка

$$y''' + 2A(x)\,y' + [A'(x) + b(x)]\,y = 0 \qquad (1)$$

в предположении, что при всех $x \in (-\infty, \infty)$ $A'(x)$, $b(x)$ непрерывны, $A(x) > 0$, $b(x) > 0$ и не существует интервала, где $b(x) \equiv 0$. Выделяя из фундаментальной системы решений (1) пару решений (y_1, y_2) и рассматривая все решения семейства

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2\,, \qquad (2)$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные, автор доказывает, что каждое решение (2) удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{y'}{\omega}\right)' + \left(\frac{2A}{\omega} + \frac{\omega''}{\omega^2}\right) y = 0\,, \qquad (3)$$

где $\omega = y_1 y_2' - y_2 y_1'$. Если решения y_1 и y_2 колеблющиеся на всей числовой оси x, то $\omega(x) \neq 0$ и нули решений (2) разделяются. Далее доказывается, что $\omega(x_1) = \omega(x_2) = \omega'(x_2)$ является критерием для нарушения разделения нулей решений (2) уравнения (1) на интервале (x_1, x_2). М. И. Ельшин

2965. **Об устойчивости в динамических системах. Шандор Векслер** (Sur la stabilité dans les systèmes dynamiques. Sandor St., Wexler D.), Rev. math. pures et appl. (RPR), 1958, 3, № 2, 325—328 (франц.)

Для траекторий $f(p, t)$ ($(-\infty < t < \infty)$) абстрактной динамической системы, определенной в метрическом пространстве R, изучаются свойства устойчивости по отношению к некоторым подмножествам R. Изучаемые понятия устойчивости известным образом обобщают свойство условной устойчивости решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Пусть A, B, C — подмножества R и ρ — расстояние в R. Множество B называется A-устойчивым относительно C, если выполняются условия: существует число $r_0 > 0$, причем для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\eta > 0$ такое, что при $t \geqslant 0$, $p \in C$, $\rho(p, A) < \eta$, $\rho(f(p, \tau), A) < r_0$ ($\tau \in [0, t]$) имеет место неравенство $\rho(f(p, t), A_{r_0}) < \varepsilon$, где $A_{r_0} = \{p \mid p \in B, \rho(p, A) < r_0\}$. Если $A = B$ и $r_0 = \infty$, то A называется устойчивым относительно C. Если A устойчиво относительно C и $\rho(f(p, t), A) \to 0$ при $t \to \infty$ для $p \in C$, то A называется асимптотически устойчивым при $t \to \infty$. Определяется равномерная асимптотическая устойчивость и указываются достаточные условия (компактность и инвариантность C при $t \to \infty$, т. е. $f([0, \infty], C) \subset C$) для равномерности асимптотической устойчивости B относительно C. Доказывается основная теорема, дающая достаточные условия устойчивости множества A относительно C. Эти условия заключаются в A-устойчивости вспомогательного множества B относительно C, включают требования инвариантности A при $t \to \infty$ и асимптотической устойчивости относительно $B \cap S(A, r_1) = A_{r_1}(r_1 > 0)$, а также условие компактности множества

$$\overline{D}_{r_2} = \overline{A \cup [S(A, r_2) \cap f(C, (0, \infty))]} \cup [S(A, r_2) \cap B]$$
$$(r_2 > 0).$$

Отмечается возможность перенесения результатов на случаи, когда траектории системы $f(p, t)$ определены при $t \in [0, \infty)$. Указываются следствия основной теоремы и дается иллюстрация общей теории на примере динамической системы $f(p, t)$, определенной траекториями $x(t) = \{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}$ системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = F(x)\,, \quad F(0) = 0 \qquad (1)$$

(Здесь может быть, например, C — гиперсфера, A — точка $x_1 = \ldots = x_n = 0$, B — гиперплоскость $x_1 = 0$. В частности, для системы (1) дается критерий устойчивости, основанный на существовании монотонно не возрастающей вдоль траекторий (1) функции Ляпунова V, определенной в окрестности точки $x = 0$ всюду, кроме некоторого многообразия N, относительно которого $x = 0$ асимптотически устойчиво. Н. Н. Красовский

2966. **Об ограниченности решений одного дифференциального уравнения третьего порядка. Эзейло** (On the boundedness of solutions of a certain differential equation of the third order. Ezeilo J. O. C.), Proc. London Math. Soc., 1959, 9, № 33, 74—114 (англ.)

Рассматривается уравнение

$$\dddot{x} + \ddot{a}\ddot{x} + b\dot{x} + f(x) = p(t)\,. \qquad (1)$$

Изучается вопрос об ограниченности решений этого уравнения. Доказываются следующие утверждения:

Теорема 1. Пусть

1) $a > 0$, $b > 0$,

2) $|f(x)| \leqslant A_1$ при $|x| \leqslant 1$; $f(x)\operatorname{sign} x > 0$ при $|x| \geqslant 1$,

3) $|f(x)| \to \infty$ при $x \to \infty$,

4) существует и непрерывна при всех x производная $f'(x)$, $f'(x) \leqslant c$, $0 < c < ab$ при $|x| \geqslant 1$, $f'(x) \leqslant c_1$, $ab < c_1 < \infty$ при $|x| \leqslant 1$,

5) $|p(t)| \leqslant A_2$, $\left|\int_0^t p(\tau)\,d\tau\right| \leqslant A_2$ при всех t.

Тогда существует такое D, зависящее от a, b, c, c_1, A_1, A_2 и характера стремления $|f(x)|$ к бесконечности, что для каждого решения уравнения (1) имеют место неравенства

$$|x(t)| \leqslant D, \quad |\dot{x}(t)| \leqslant D, \quad |\ddot{x}(t)| \leqslant D \qquad (2)$$

при всех достаточно больших t.

Теорема 2. Если

1) $a > 0$, $b > 0$,

2) $|f(x)| \leqslant M < +\infty$, $f(x)\operatorname{sign} x \geqslant m > 0$ при $|x| \geqslant 1$,

3) $|p(t)| < A_2$, $\left|\int_0^t p(\tau)\,d\tau\right| \leqslant A_2$ при всех t, то

существует такое D, зависящее только от a, b, A_2 и M, что выполняются соотношения (2). В. А. Плисс

2967. **Об одном применении условий разрешимости задачи Чаплыгина к вопросам ограниченности и устойчивости решений дифференциальных уравнений. Рахматуллина Л. Ф.**, Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1959, № 2, 198—201

Ограниченность или устойчивость решений векторно-матричного уравнения выводится из таких же свойств некоторого „мажорирующего" скалярного интегрального уравнения. Следствия не новы. Р. Э. Виноград

2968. **Периодические дифференциальные уравнения. Асимптотика решений. Данжуа** (Les équations différentielles périodiques. Allure asymptotique des intégrales. Denjoy Arnaud), C. r. Acad. sci., 1959, 248, № 3, 325—330 (франц.)

В пространстве $E_3=(x, y, z)$ рассматривается периодическая система

$$dX/dz=F(z, X)\ [X=(x, y)], \qquad (1)$$

где F — непрерывная вектор-функция, периодическая с периодом 1 относительно каждой из переменных x, y и z. Пусть $N_n(x_n, y_n, n)$ $(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ — последовательность точек траектории системы (1), выходящей из начальной точки $N_0(x_0, y_0, 0)$. Изучается предельное поведение вектора $\overrightarrow{N_0N_n}/n$ при $n\to+\infty$ и $n\to-\infty$.

Б. П. Демидович

2969. Об устойчивости и асимптотическом равновесии. Аткинсон (On stability and asymptotic equilibrium. Atkinson F. V.), Ann. Math., 1958, 68, № 3, 690—708 (англ.)

В основном рассматривается система дифференциальных уравнений

$$dx/dt=Ax+f(t, x)\quad (t\geqslant t_0), \qquad (1)$$

где $x=(x_1, \ldots, x_n)$, A — действительная $n\times n$-матрица с характеристическими корнями $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ такими, что $\mathrm{Re}\lambda_r>0$ при $r=1, \ldots, k$ и $\mathrm{Re}\lambda_r<0$ при $r=k+1, \ldots, n$ $(0\leqslant k\leqslant n)$, и вектор-функция $f(t, x)\in \mathrm{Lip}_x\ (t\geqslant t_0, \|x\|<C')$; причем $\|f(t, x)\|$, вообще говоря, не является бесконечно малой при $\|x\|=\max_{1\leqslant r\leqslant n}|x_r|\to 0$.

Теорема. Для каждого $C\in(0, C')$ существуют положительные постоянные ε_1 и ε_2, зависящие только от A и C, такие, что если

$$\left\|\int_{t_1}^{t_2}\exp(it\,\mathrm{Im}\,\lambda_r)\,f(t, x)\,dt\right\|<\varepsilon_1(t_1-t_2)+\varepsilon_2$$

$$(r=1, \ldots, n)$$

при $t_0\leqslant t_1<t_2<+\infty$ и любом решении $x(t)$ системы (1), для которого $\|x(t)\|\leqslant C$ при $t_1\leqslant t\leqslant t_2$, то тогда для системы (1) имеется $(n-k)$-параметрическое семейство ограниченных решений, удовлетворяющих условию: $\|x(t)\|\leqslant C$ для $t\geqslant t_0$. Для случая $k=n$ гарантируется существование по меньшей мере одного ограниченного решения системы (1).

Теорема обобщает результаты Перрона (Perron O., Math. Z., 1929, 29, 129—160), Беллмана (Bellman R., Trans. Amer. Math. Soc, 1948, 46, 345—388), Хартмана и Винтнера (РЖМат, 1956, 8798). Аналогичная теорема устанавливается для более общей системы $dx/dt=Ax+f(t, x, z)$, $dz/dt=j(t, x, z)$ (x, z — векторы). Приводятся достаточные условия существования $(n-k)$-параметрического семейства решений системы (1), асимптотически устойчивых при $t\to+\infty$. Рассматриваются колебания возмущенного гармонического осциллятора с одной степенью свободы.

Б. П. Демидович

2970. О системах дифференциальных уравнений, все решения которых ограничены. Шмидт (Sur les systèmes d'équations différentielles dont toutes les solutions sont bornées. Szmydt Z.), Ann. polon. math., 1955, 2, № 2, 234—236 (франц.)

В работе референта (РЖМат, 1953, 227) было показано, что все решения системы $x'=A(t)x+f(t, x)$ ограничены, если $|Y(t)Y^{-1}(\tau)|<\mathrm{const}$ при $\tau\leqslant t$ ($Y(t)$ — фундаментальная матрица для $y'=A(t)y$), а $f(t, 0)=0$ и

$$|f(t, x_1)-f(t, x_2)|<g(t)\,|x_1-x_2|, \qquad (1)$$

где $\int^{\infty}g\,dt<+\infty$. В реферируемой заметке доказано, что в случае непрерывности $f(t, x)$ условие Липшица (1) можно заменить более слабым $|f(t, x)|<g(t)\,|x|$.

Р. Э. Виноград

2971. О равномерной асимптотической устойчивости в целом. Табаровский А. М., Научн. докл. высш. школы. Машиностр. и приборостр., 1958, № 1, 210—217

Рассматривается система, описываемая дифференциальными уравнениями

$$\frac{dy_i}{dt}=Y_i(t, y_1, \ldots, y_n)\ (i=1, \ldots, n). \qquad (1)$$

Доказывается критерий асимптотической устойчивости в целом установившегося режима $y_i=a_i$ системы (1). Автор использует терминологию из статьи: РЖМат, 1955, 728.

Пусть

$$\frac{dx_i}{dt}=X_i(t, x_1, \ldots, x_n),$$
$$(X_i(t, x)=Y_i(t, y)-Y_i(t, a),\quad x=y-a) \qquad (2)$$

система уравнений возмущенного движения, где функции X_i непрерывны и имеют непрерывные частные производные первого порядка по x_i и t при $x_i\in(-\infty, \infty)$, $(i=1, \ldots, n)$.

Теорема 1. Если для дифференциальных уравнений (2) существует определенно-положительная бесконечно большая функция $V(t, x_1, \ldots, x_n)$, обладающая тем свойством, что для любых двух чисел $\varepsilon>0$ и $B>0$ можно указать такое $T(\varepsilon, B)$, что неравенство $V>B$ будет выполняться при $\sum_1^n x_i^2\geqslant\varepsilon^2$ для всех $t\geqslant T(\varepsilon, B)$, а производная этой функции по времени, составленная в силу дифференциальных уравнений (1), т. е. выражение

$$\frac{dV}{dt}=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_s}X_s+\frac{\partial V}{\partial t}$$

есть функция постоянно-отрицательная или тождественно равна нулю, то решение $x_i=0$ системы (1) равномерно асимптотически устойчиво в целом.

Следствие. Если существует функция V такая, что функция $V(t, x)=\theta(t)W(x)$ $(\theta(t_0)=1)$ определенно-положительна при определенно-положительной и бесконечно большой функции W и при монотонно возрастающей до бесконечности $\theta(t)$ при $t\to\infty$, полная производная dV/dt является функцией постоянно-отрицательной, то решение $x_i=0$ равномерно асимптотически устойчиво в целом.

Критерий является распространением на случай устойчивости в целом одного признака асимптотической устойчивости, указанного Н. Г. Четаевым (РЖМат, 1956, 8807К).

Доказывается, что теорема 1 допускает обращение, и, следовательно, критерии указывают необходимые и достаточные условия устойчивости в целом. В статье есть опечатки.

Н. Н. Красовский

2972. О t_∞-подобии матриц асимптотически эквивалентных систем линейных дифференциальных уравнений. Конти (Sulla t_∞-similitudine tra matrici e l'equivalenza asintotica dei sistemi differenziali lineari. Conti Roberto), Riv. mat. Univ. Parma, 1957, 8, № 1-3. 43—47 (итал.; рез. англ.)

Рассматриваются линейные системы

$$\dot{x}=A(t)x,\quad \dot{y}=B(t)y, \qquad (1)$$

где x, y — матрицы типа $n\times 1$ и $A(t)$, $B(t)$ — матрицы типа $n\times n$, измеримые и суммируемые на каждом конечном интервале $(a, b)\subset[t_0, +\infty)$. Системы (1) (или соответственно матрицы $A(t)$, $B(t)$) называются t_∞-подобными, если существует абсолютно непрерывная на каждом конечном интервале из $t_0\leqslant t$ матрица $T(t)$, ограниченная на $[t_0, +\infty)$, вместе со своей обратной матрицей $T^{-1}(t)$ и такая, что

$$\int_{t_0}^{+\infty} \| \dot{T}(t) + T(t) A(t) - B(t) T(t) \| dt < +\infty \quad (2)$$

(под нормой матрицы понимается сумма модулей элементов ее) (ср. РЖМат, 1956, 7341). Системы (1) называются асимптотическими эквивалентными, если для каждого решения $x(t)$ существует решение $y(t)$ такое, что $\lim_{t\to+\infty} \| y(t) - x(t) \| = 0$.

Основная теорема. Пусть $A(t) = A$ постоянна и система с матрицей A асимптотически устойчива, причем системы (1) t_∞-подобны в смысле (2), и, сверх того, матрица $T(t)$ такова, что $\lim_{t\to+\infty} T(t) = T(\infty)$ и $\det T(+\infty) \neq 0$. Тогда системы (1) асимптотически эквивалентны. Доказательство основывается на теореме Вейля (H. Weyl). Приводятся также некоторые обобщения основной теоремы на случай переменной матрицы $A(t)$.

Б. П. Демидович

2973. Об устойчивости в целом решений одной нелинейной системы трех уравнений. Железнов Е. И., Тр. Уральского политехн. ин-та, 1958, сб. 74, 41—45

Рассматривается система

$$\left.\begin{aligned} dx/dt &= -Sx + ny, \\ dy/dt &= -ax - cy - f(z), \\ dz/dt &= x, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

где S, n, a, c — постоянные, а $f(z)$ — дифференцируемая функция. Для этой системы строится функция Ляпунова

$$2v = [(c+S)c + an]x^2 + 2cnxy + n^2y^2 + 2nxf(z) + 2n(c+S)\int_0^z f dz.$$

Доказывается, что если $n > 0$, $Sc + an > 0$, $(c+S) \times (cS + an) - n\frac{df}{dz} > 0$, $\frac{f(z)}{z} > 0$ и $\lim v = \infty$ при $x^2 + y^2 + z^2 \to \infty$, то нулевое решение системы (1) устойчиво в целом. Наряду с системой (1), рассматривается система

$$\frac{dx}{dt} = z - ax, \quad \frac{dy}{dt} = -cx, \quad \frac{dz}{dt} = y - F(x). \quad (2)$$

Доказывается, что если $a > 0$, $a\frac{F(x)}{x} - c > 0$, $\frac{F(x)}{x} > 0$, $\lim\left[\int_0^x F(x)\,dx - xy + \frac{a}{2c}y^2\right] = \infty$ при $x^2 + y^2 \to \infty$, то нулевое решение системы (2) устойчиво в целом.

Отметим, что результаты этой работы пересекаются с результатами опубликованной примерно в то же время работы А. П. Тузова (РЖМат, 1958, 8815).

В. А. Плисс

2974. Интегральная устойчивость. Вркоч Иво, Чехосл. матем. ж., 1959, **9**, № 1, 71—129

Вводятся и исследуются некоторые новые определения устойчивости нулевого решения системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x) \quad (1)$$

($x = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — n-мерный вектор, $X(t, 0) = 0$, $t \geqslant 0$), являющиеся обобщением понятия устойчивости по Ляпунову и, в частности, включающие устойчивость при постоянно действующих возмущениях (Малкин И. Г., Теория устойчивости движения, Гостехиздат, М. — Л., 1952). Система (1) рассматривается при двух предположениях: а) вектор-функция $X(t, x)$ измерима по t при $x = \text{const}$, $X(t, x)$ непрерывна по x при $t = \text{const}$; для всех $a > 0$, $b > 0$ при $\| x \| < a$, $0 \leqslant t \leqslant b$ существует интегрируемая по Лебегу функция $m_{a,b}(t)$, удовлетворяющая условию $\| X(t, x) \| \leqslant m_{a,b}(t)$, b) вектор-функция $X(t, x)$ непрерывна. Пусть функции $X(t, x)$ и $\eta(t, x)$ удовлетворяют условиям а), причем

$$\int_{t_0}^{\infty} \sup_{\| x \| \leqslant B} \| \eta(t, x) \| dt < \delta$$

$$(B(\delta) > 0 \cdot \text{const}). \quad (2)$$

Решение $x = 0$ системы (1) интегрально устойчиво, если для произвольного $\delta > 0$ существует $B(\delta) > 0$ такое, что $\lim B(\delta) = 0$ при $\delta \to 0$ и каждое решение $x(t)$ системы

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x) + \eta(t, x)$$

с начальными условиями $\| x(t_0) \| < \delta$ удовлетворяет неравенству $\| x(t) \| \leqslant B(\delta)$ при $t \geqslant t_0$. Если при этом решения $x(t)$ стремятся равномерно к нулю с ростом t (при соответствующих оценках интеграла (2)), то решение $x = 0$ асимптотически интегрально устойчиво; если для любой функции $y(t)$ с ограниченным изменением, удовлетворяющей условиям $y(0) = 0$; $\operatorname{var}_{(0,T)}(y(t) - \int_0^t X(\tau, y(\tau))d\tau) < \delta$, $0 \leqslant t \leqslant T < \infty$, выполняется условие $\| y \| \leqslant B(\delta)$, то решение $x = 0$ системы (1) вариационно устойчиво. Рассматривается также при условиях b) сильная устойчивость (соответствующая принятому в советской литературе понятию равномерной асимптотической устойчивости) и устойчивость при постоянно действующих возмущениях. Показывается, что устойчивость того или иного типа связана с существованием функции Ляпунова $V(t, x)$ с определенными свойствами, аналогично тому, как это имеет место в случае задач устойчивости по Ляпунову. Выясняется гладкость функций Ляпунова, существование которых можно установить при наличии устойчивости соответствующего типа и при определенных предположениях а), b) о гладкости $X(t, x)$. Весьма полно исследован вопрос о взаимосвязи (и, в частности, об эквивалентностях) между различными типами устойчивости, рассматриваемыми автором и изучавшимися в других работах (РЖМат, 1957, 1397, 7872). Доказаны, например, эквивалентность интегральной и вариационной устойчивости, показано на примере, что сильная и асимптотическая интегральная устойчивость не эквивалентны. Приведены также результаты, выясняющие связь свойств функций Ляпунова и соответствующих видов устойчивости в автономном случае и в случаях лишь устойчивости локального типа.

Н. Н. Красовский

2975. Условия отсутствия равномерной и асимптотической устойчивости. Блинчевский В. С., Успехи матем. наук, 1959, **14**, № 1, 141—146

Рассматривается система уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(t, x_1, \ldots, x_n), \quad (1)$$

где функции X_i непрерывно дифференцируемы в области $I(h)$ ($I(r)$ — здесь и ниже — цилиндр $\sum x_i^2 \leqslant r^2$, $h > 0$). Указываются условия, при выполнении которых решение $x_i = 0$ ($i = 1, \ldots, n$) системы (1) не является: 1) равномерно устойчивым по Ляпунову (теорема 1), 2) асимптотически устойчивым (теорема 2), 3) равномерно асимптотически устойчивым (теорема 3). Критерии основаны на идеях метода функций Ляпунова и подобны теореме Н. Г. Четаева о неустойчивости (РЖМат, 1956, 8807К).

Условия теоремы 1 включают следующие требования к функции $V(x, t)$: a) определенно-положительная производная dV/dt в силу системы (1) в области $G(V)$ ($G(V)$ — область, где $V > 0$); b) ограниченность V в $G(V)$, c) $G(V) \cap I(\delta)$ — не пусто при $\delta > 0$. В теореме 2 требование a) заменяется условием $dV/dt \geqslant 0$ в $G(V)$, условие b) — требованием бесконечно малого предела V в $G(V)$ и условие c) — $G(V) \cap I(\delta) \neq 0$ при $t = t_0$. Требования теоремы 3 отличаются от условий теоремы 2 лишь тем, что в условии c) снимается ограничение „при $t = t_0$“. Доказано, что условия теоремы 1 являются не только достаточными, но и необходимыми условиями отсутствия равномерной устойчивости. Н. Н. Красовский

2976. О теоремах устойчивости для систем стационарных дифференциальных уравнений. Векслер Д., Rev. math. pures et appl. (RPR), 1958, 3, № 1, 131—138

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_l}{dt} = X_l(x_1, \ldots, x_n) \quad (l = 1, \ldots, n), \qquad (1)$$

правые части которой определены в некоторой области $D \in E^n$, $0 \in D$. Предполагается, что в окрестности каждой точки $p \in D$ функции X_l удовлетворяют условиям Липшица. Доказываются новые критерии устойчивости, асимптотической устойчивости и устойчивости в целом, основанные на идеях второго метода Ляпунова. В этих критериях ослабляются требования к функции Ляпунова V по сравнению с требованиями других известных критериев, однако вводятся дополнительные предположения о наличии инвариантного множества N, являющегося носителем $O^{\pm}$ кривых.

Теорема 1. Пусть дан шар S_h и N—замкнутое инвариантное множество, относительно которого решение $x = 0$ асимптотически устойчиво, $V(p)$ — непрерывная функция, $V(0) = 0$, $V(p) \neq 0$ при $p \in S_h \setminus N$. Решение $x = 0$ устойчиво, если для любой точки $p_0 \in S_h \setminus N$ (при условии, что в моменты времени t_1, t_2 ($t_1 < t_2$) точки $f(p_0, t_1)$, $f(p_0, t_2)$ лежат в области, где функция V определена) выполняются неравенства

A) если $V[f(p_0, t_1)] > 0$, то $V[f(p_0, t_2)] \leqslant V[f(p_0, t_1)]$,

B) если $V[f(p_0, t_1)] < 0$, то $V[f(p_0, t_2)] \geqslant V[f(p_0, t_1)]$.

Теорема 2. Если выполняются условия теоремы 1 и ни одна из поверхностей $V(p) = c$ не содержит целых положительных полутраекторий $f(p, t)$, то решение $x = 0$ асимптотически устойчиво. Если $S_h = E^n$ и условия теоремы 2 выполняются во всем пространстве, причем $|V(p)| \to \infty$ при $p \in E^n \setminus N$, $p \to \infty$, то решение $x = 0$ устойчиво в целом. Доказательство опирается на свойство траекторий, лежащих в N, увлекать вследствие интегральной непрерывности достаточно близкие к ним траектории из $S_h \setminus N$ в малую окрестность точки $x = 0$ и на монотонный характер изменения V на $S_h \setminus N$.

Общие критерии, доказанные в статье, прилагаются к задаче исследования устойчивости решения системы трех уравнений

$$\frac{dx}{dt} = X, \quad \frac{dy}{dt} = Y, \quad \frac{dz}{dt} = Z, \qquad (2)$$

где X, Y, Z — однородные функции степени m.

Н. Н. Красовский

2977. Обзор второго метода Ляпунова. Антосевич (A survey of Lyapunov's second method. Antosiewicz H. A.), Ann. Math. Studies, 1958, 4, № 41, 141—168 (англ.)

Обзорная статья, посвященная основным понятиям, проблемам и результатам, относящимся к методу функций Ляпунова в теории устойчивости решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x). \qquad (1)$$

Результаты сформулированы в статье для уравнений в n-мерном пространстве, однако отмечается возможность развития теории на более общие случаи банаховых прост анств. Статья состоит из четырех разделов:

1) Определения. Даются определения различных типов устойчивости в классификации и терминологии, подобных тем, которые приняты в советской литературе; обсуждаются соотношения, связывающие различные типы устойчивости; даются определения свойств функций Ляпунова.

2) Устойчивость. Даны формулировки и некоторые доказательства прямых и обратных теорем второго метода Ляпунова в случае устойчивости решения $x = 0$ системы (1).

3) Асимптотическая устойчивость. В этом разделе, наибольшем по объему, исследуются различные типы асимптотической устойчивости решения $x = 0$ системы (1), подробно выясняется связь свойств равномерной устойчивости со свойствами функций Ляпунова, причем, в частности, уделяется большое внимание связи свойств гладкости функции $v(t, x)$ и вектор-функции $f(t, x)$.

4) Ограниченность (решений) и асимптотическая устойчивость в большом. В примечании в конце статьи дана краткая сводка некоторых результатов теории устойчивости, полученных после подготовки статьи к печати. Обзор базируется в значительной части на результатах советских авторов, а также на работах зарубежных исследователей (Курцвейль Я., Массера Х. Л., Иосидзава Т., авторы), причем в ряде случаев формулировки и доказательства дополнены и модифицированы автором. Библ. 53 назв. Н. Н. Красовский

2978. Предельный цикл в трехмерном пространстве с одним характеристическим показателем, отличным от нуля. Минц Р. М., Докл. АН СССР, 1959, 125, № 1, 38—41

Рассматривается система трех дифференциальных уравнений с аналитическими правыми частями

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y, z), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y, z), \quad \frac{dz}{dt} = R(x, y, z). \qquad (1)$$

Предполагается, что система (1) имеет периодическое решение с одним характеристическим показателем, отличным от нуля.

Выясняется характер расположения траекторий системы (1) в окрестности этого решения в зависимости от правых частей.

Характер расположения траекторий определяется с помощью знака величины $\int_0^\tau (P'_x + Q'_y + R'_z)\,dt$ в окрестности периодического решения, а также некоторой величины Δm, определяемой с помощью изучения точечного преобразования, осуществляемого траекториями системы (1) в окрестности периодического решения.

В. А. Плисс

2979. Обобщение одного предложения Ляпунова о существовании периодических решений. Шиманов С. Н., Прикл. матем. и механ., 1959, 23, № 2, 409—411

Рассматривается автономная система дифференциальных уравнений

$$dx_s/dt = \sum_{j=1}^{n} a_{sj}x_j + X_s(x_1, \ldots, x_n) \quad (s = 1, \ldots, n), \qquad (1)$$

где a_{sj} — постоянные и X_s — аналитические функции такие, что $X_s(0, \ldots, 0) = \dfrac{\partial X_s}{\partial x_j}(0, \ldots, 0) = 0$. Предполагается, что уравнение

$$|a_{sj} - \delta_{sj}\lambda| = 0 \qquad (2)$$

допускает m ($m \geqslant 2$) корней вида $N\lambda i$, где N — целое число с простыми элементарными делителями, причем

среди этих корней имеется по крайней мере одна пара чисто мнимых корней $\pm\lambda i$ ($\lambda > 0$). Остальные корни уравнения (2) обладают отрицательными вещественными частями. Обобщая известную теорему Ляпунова, автор доказывает, что если система (1) имеет $m-1$ независимых первых голоморфных интегралов специального типа, то для этой системы существует семейство периодических решений, зависящее от $m-1$ существенных параметров. При этом тривиальное решение $x_s = 0$ ($s = 1, \ldots, n$) устойчиво в смысле Ляпунова и всякое решение, начинающееся в достаточно малой окрестности тривиального решения, при $t \to +\infty$ стремится к одному из периодических решений семейства.

Б. П. Демидович

2980. Существование и устойчивость периодических решений некоторой системы n дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами; случай, где $p \leqslant n$ присоединенных функций тождественно нулевые. **Фор** (Existence et stabilité des solutions périodiques de certains systèmes de n équations différentielles à coefficients périodiques; cas où $p \leqslant n$ fonctions associées sont identiquement nulles. Faure Robert), C. r. Acad. sci., 1959, 248, № 4, 520—523 (франц.)

Изучается нелинейная система дифференциальных уравнений

$$dX_i/dt = \lambda f_i(X_k, t) \quad (i, k = 1, \ldots, n), \qquad (1)$$

где λ — параметр, f_i — действительные непрерывные функции, периодические по t с общим периодом T и непрерывно дифференцируемые по X_k в некоторой области D. Предполагается, что присоединенные функции

$$F_i(X_k) = T^{-1} \int_0^T f_i(X_k, t)\, dt \equiv 0$$

при $1 \leqslant i \leqslant p \leqslant n$. Путем замены переменных $X_i = \alpha_i + x_i$, где $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in D$ система (1) приводится к виду

$$dx_i/dt = \lambda \left[\sum\nolimits_j p_{ij}(t)\, x_j + f_i(\alpha_k, t) + Q_i(x_k, t\,\right] \quad (i, k = 1, \ldots, n),$$

где $p_{ij}(t) = \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\alpha_k, t)$. Периодическое решение периода T ищется в форме ряда

$$x_i = x_{i0}(t) + \lambda x_{i1}(t) + \lambda^2 x_{i2}(t) + \ldots \quad (i = 1, \ldots, n), \qquad (2)$$

где $x_{im}(t)$ — периодические функции периода T, рекуррентно определяемые из линейных дифференциальных систем

$$dx_{im}/dt = \lambda \left[\sum\nolimits_j p_{ij}(t)\, x_{jm} + f_i(\alpha_k, t) + Q_i(x_{k,m-1}, t)\right] \quad (i, k = 1, \ldots, n; \quad m = 1, 2, \ldots).$$

Выводятся уравнения, определяющие точку $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, которые сводятся к условиям Хаага (Haag, Bull. sci. math., 1946, 70). Рассматриваются вопросы существования и устойчивости периодического решения (2).

Б. П. Демидович

2981. О почти периодических решениях некоторого класса дифференциальных уравнений. **Мейстерс** (On almost periodic solutions of a class of differential equations. Meisters G. H.), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, **10**, № 1, 113—119 (англ.)

Рассматривается векторное нелинейное дифференциальное уравнение

$$dx/dt = F(t, x) \quad (-\infty < t < +\infty), \qquad (1)$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E_n$, $F(x, t)$ — вектор-функция, почти периодическая по t при любом $x \in D \subset E_n$ и удовлетворяющая условию Липшица по x (D — связное открытое множество). Доказывается теорема: Пусть

$$x = \Phi(t) \qquad (-\infty < t < +\infty) \qquad (2)$$

решение уравнения (1), замыкание которого содержится в D. Движение (2) есть почти периодическое тогда и только тогда, если последовательность точек $\Phi(k)$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) является почти периодической.

Б. П. Демидович

2982. Периодические дифференциальные системы. **Данжуа** (Les systèmes d'équations différentielles périodiques. Denjoy Arnaud), C. r. Acad. sci., 1958, **247**, № 20, 1691—1696 (франц.)

Рассматривается нелинейная система дифференциальных уравнений

$$d\Theta^{r-1}/d\varphi = F(\varphi, \Theta^{r-1}), \qquad (1)$$

где $\Theta^{r-1} = (\theta_1, \ldots, \theta_{r-1})$ и F — вектор-функция, непрерывная и периодическая с периодом 1 по каждому из переменных $\varphi, \theta_1, \ldots, \theta_{r-1}$, причем предполагаются выполненными условия единственности решений. Траекторию $M^r = f(M_0^r, \varphi)$, где $M^r = (\varphi, \Theta^{r-1})$ и $M_0^r = (\varphi_0, \Theta_0^{r-1})$ можно рассматривать как множество точек r-мерного тора S_r в евклидовом пространстве E_{r+1}. Приводятся некоторые замечания об асимптотическом поведении траекторий системы (1) при $\varphi = \varphi_0 + n$ и $n \to \pm\infty$ (n — целое). В частности, анализируется топологическое преобразование $M_n^r = f(M_0^r, \varphi_0 + n)$. Более подробно рассмотрен случай $r = 3$. Работа является обобщением результатов автора для случая $r = 2$ (РЖМат, 1960, 331).

Б. П. Демидович

2983. Проблемы различения в трехмерном пространстве. Рейзинь Л. Э., Научн. докл. высш. школы. Физ.-матем. н., 1958, № 3, 99—103

В настоящей работе даются некоторые аналоги первой проблемы различения Фроммера для трехмерного пространства.

Рассматривается система вида:

$$\frac{dx_i}{d\tau} = P_i(x_1, x_2, x_3) + p_i(x_1, x_2, x_3), \quad i = 1, 2, 3 \qquad (1),$$

где $P_i(x_1, x_2, x_3)$ — однородные многочлены степени m относительно x_1, x_2, x_3, имеющие только один общий нуль в начале координат, а $p_i(x_1, x_2, x_3)$ — функции, имеющие непрерывные частные производные до $m+1$-го порядка включительно, причем производные до m-го порядка включительно исчезают в начале координат. Исследование характеристических направлений системы (1) сводится к изучению особых точек и периодических решений системы:

$$\frac{dy_i}{dt} = -Q_i(y_1, y_2), \quad i = 1, 2,$$

где

$$Q_i(y_1, y_2) = P_i(y_1, y_2, 1) - y_i p_i(y_1, y_2, 1).$$

Р. С. Минц

2984. Проблема колебаний неавтономных систем с сильной нелинейностью. Сковронский, Земба (The problem of vibrations of nonautonomic systems with strong nonlinearity. Skowroński J., Ziemba S.), Arch. mech. stosowanej, 1958, **10**, № 4, 517—523 (англ.; рез. польск., русск.)

Рассматривается нелинейная действительная система дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = F_i(x_1, \ldots, x_{2s}, t) \quad (i = 1, \ldots, 2s), \qquad (1)$$

где функции F_i — периодические по t с общим периодом L, обеспечивающие существование и единственность решения $x(t) = \{x_1(t), \ldots, x_{2s}(t)\}$ системы (1), удовлетворяющего любым заданным начальным условиям

$x_j(t_0) = x_j^{(0)}$ $(j = 1, \ldots, 2s)$. Пусть T — точечное преобразование евклидова пространства E^{2s}, переводящее точку $x(t_0)$ в точку $x(t_0 + L)$. Следуя Левинсону (Levinson N., Ann. math., 1944, 45), говорят, что система (1) принадлежит D-классу (диссипативна), если существует положительное число R такое, что для каждого ее решения $x(t)$ выполнено неравенство

$$\lim_{t \to +\infty} \sup \left\{ \sum_{j=1}^{2s} x_j^2(t) \right\} < R^2.$$

Теорема. Каждая система (1) класса D имеет замкнутую максимальную область I, инвариантную относительно преобразования T. Если $x(t_0) \subset CI$, то последовательность итераций $T^n x(t_0) = x(t_0 + nL)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ стремится к I при $n \to \infty$. Кроме того, в области I существует по меньшей мере одна неподвижная точка относительно преобразования T, которой соответствует периодическое решение системы (1) периода L.

Существование неподвижной точки вытекает из теоремы Брауэра. Приводятся некоторые замечания, касающиеся исследования устойчивости периодического решения. Библ. 12 назв. Б. П. Демидович

2985. Об уравнении бесконечного порядка с полиномиальными коэффициентами. Коробейник Ю. Ф., Докл. АН СССР, 1958, 122, № 3, 339—342

Рассматривается уравнение

$$L(y) \equiv y + \sum_{k=1}^{\infty} P_k(x)\, y^{(k)} = f(x),$$

$$P_k(x) = \sum_{s=0}^{k-1} a_k^s\, x^s, \qquad (1)$$

где $f(x)$ — целая функция. Пусть A_k и A_k^s $(s = 0, 1, \ldots, k-1;\ k = 1, 2, \ldots)$ — положительные числа, удовлетворяющие условиям: $|a_k^s| \leqslant A_k^s$ и

$$\overline{\lim_{k \to \infty}} \frac{1}{A_k} \sum_{m=1}^{k-1} m! A_m \sum_{s=0}^{m} \frac{A_{k-m+s}^s}{(m-s)!} < 1,$$

$$\overline{\lim_{k \to \infty}} \frac{\sum_{m=0}^{k-1} A_m}{A_k} < \infty, \quad \overline{\lim_{k \to \infty}} \frac{A_k^0}{A_k} < \infty$$

(утверждается, что такие числа существуют). Пусть K_A — класс целых функций $y(x)$, для которых $\sum_{k=0}^{\infty} |y^{(k)}(0)| A_k < \infty$. Утверждается (все результаты приведены без доказательства), что при любой правой части $f(x)$ из K_A уравнение (1) имеет единственное решение в классе K_A, причем

$$\sum_{k=0}^{\infty} |y^{[k]}(0)| A_k \leqslant D \sum_{k=0}^{\infty} |f^{(k)}(0)| A_k$$

(постоянная D не зависит от $y(x)$ и $f(x)$). Если $y_n(x)$ — полиномиальное решение урезанного уравнения

$$y + P_1(x) y' + \ldots + P_n(x)\, y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k,$$

то $y_n(x) \to y(x)$ равномерно в любой ограниченной области, указана степень приближения $y_n(x)$ к $y(x)$. Имеет место представление

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z_k(x),$$

где $z_k(x)$ — полиномиальное решение уравнения $L(y) = x^k$. Рассматриваются некоторые частные случаи. Далее отмечается, что если степени некоторых полиномов $P_k(x)$ в уравнении $\sum_{k=0}^{\infty} P_k(x)\, y^{(k)} = f(x)$ превосходят $k - 1$, то решение этого уравнения имеется не при всякой правой части $f(x)$, нарушается и свойство единственности. Приводятся результаты для случая, когда $P_k(x)$ — многочлены первой степени.

А. Ф. Леонтьев

2986. Линейные системы дифференциальных уравнений первого и второго порядков с периодическими коэффициентами. Хейл (Linear systems of first and second order differential equations with periodic coefficients. Hale J. K.), Illinois J. Math., 1958, 2, № 4A, 586—592 (англ.)

Рассматривается система линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} d^2u_j/dt^2 + A_j(\lambda)\, u_j = \lambda f_j(u_1, u_2, w, u_1', u_2', t, \lambda) \\ \qquad\qquad (j = 1, 2), \\ dw/dt = \lambda f_3(u_1, u_2, w, u_1', u_2', t, \lambda), \end{cases} \qquad (1)$$

где λ — действительный параметр, $u_1 = (y_1, \ldots, y_\nu)$,

$$u_2 = (y_{\nu+1}, \ldots, y_\mu),\ w = (y_{\mu+1}, \ldots, y_n),$$

$$A_1(\lambda) = \operatorname{diag}[\sigma_1^2(\lambda), \ldots, \sigma_\nu^2(\lambda)],$$

$$A_2(\lambda) = \operatorname{diag}[\sigma_{\nu+1}^2(\lambda), \ldots, \sigma_\mu^2(\lambda)],$$

и вектор-функции f_1, f_2, f_3 — линейные относительно аргументов u_1, u_2, w, u_1', u_2', причем коэффициенты этих функций периодические по t с общим периодом $T = 2\pi/\omega$, L — интегрируемые по t на $[0, T]$ и аналитические по λ. Предполагается, что: 1) средние значения коэффициентов правых частей системы (1) равны нулю; 2) при $\lambda = 0$ имеет место нерезонансный случай:

$$\sigma_j(0) \pm \sigma_h(0) \not\equiv 0 \pmod{\omega}; \quad \sigma_h(0) \not\equiv 0 \pmod{\omega}.$$

Теорема. Если

$$f_j(u_1, -u_2, w, -u_1', u_2', -t, \lambda) = \varepsilon_j f_j(u_1, u_2, w, u_1', u_2', t, \lambda) \quad (j = 1, 2, 3;\ \varepsilon_1 = 1,\ \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -1),$$

то для $|\lambda|$ достаточно малого всякое абсолютно непрерывное решение системы (1) будет ограничено при $-\infty < t < +\infty$. Для доказательства применен несколько видоизмененный метод последовательных приближений Чезари. Теорема обобщает некоторые результаты Чезари, Гамбилл и автора. Б. П. Демидович

2987. Условие устойчивости на конечном интервале времени. Определение длины интервала. Зубов В. И., Bul. Inst. politehn. Iaşi, 1958, 4, № 1-2, 69—74 (русск.; рез. нем., рум.)

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{l=1}^{n} p_{sl}(t)\, x_l + X_s(x_1, \ldots, x_n, t), \qquad (1)$$

$$s = 1, 2, \ldots n,$$

где X_s разлагаются в ряды, начинающиеся членами не ниже второго порядка

$$X_s = \sum_{m_1 + \ldots + m_n = 2}^{\infty} a_s^{(m_1, \ldots, m_n)}\, x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n}.$$

Нулевое решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ системы (1) называется устойчивым на интервале времени τ по отношению к определенно-положительной функции

$$V = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k, \quad a_{ik} = \text{const}., \qquad (2)$$

если

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_i(t, x_0, t_0)\,x_k(t, x_0, t_0) < A \qquad (3)$$

для $t \in [t_0, t_0+\tau]$, если только начальные значения x_i^0 функций $x_i(t, x_0, t_0)$, $i = 1, \ldots, n$, $x_i^0 = x_i(t_0, x_0, t_0)$ удовлетворяют условию $\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_i^0 x_k^0 \leqslant A$, где A — достаточно малое положительное число.

Теорема 1. Для того чтобы нулевое решение системы (1) было устойчивым на конечном интервале времени $\tau = \tau(a_1^{(m_1,\ldots,m_n)}, a_2^{(m_1,\ldots,m_n)}, \ldots, a_n^{(m_1,\ldots,m_n)})$ по отношению к некоторой форме $V(x, \ldots, x_n)$ при любых функциях $X_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, X_n(x_1, \ldots, x_n)$, достаточно, чтобы все корни $\lambda_1(t_0), \ldots, \lambda_n(t_0)$ уравнения

$$|P(t_0) - \lambda E| = 0. \qquad (4)$$

где $\{P(t_0)\}_{ik} = p_{ik}(t_0)$, имели отрицательные действительные части.

Теорема 2. Если среди корней уравнения (4) есть корни с положительной или нулевой действительной частью, то не существует положительно-определенной формы $V(x_1, \ldots, x_n)$, по отношению к которой нулевое решение системы (1) устойчиво на конечном интервале времени, при любых функциях $X_s(x_1, \ldots, x_n, t)$.

Кроме этого, в статье дается способ вычисления длины интервала устойчивости. Г. А. Каменский

2988. Устойчивость в несжимаемых системах. Хелмс, Патнам (Stability in incompressible systems. Helms L. L., Putnam C. R.), J. Math. and Mech., 1958, 7, № 6, 901—903 (англ.)

Рассматривается нелинейная автономная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dx/dt = f(x), \qquad (1)$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $f(x) \in C^1$ и $\operatorname{div} f = 0$.

Исходя из эргодических теорем Хинчина и Неймана, двумя способами доказывается, что всякое ограниченное, устойчивое по Ляпунову при $t \to \pm\infty$ решение $x(t)$ системы (1) есть почти периодическое в смысле Бора.

Заметим, что для общих динамических систем А. А. Марков доказал почти периодичность ограниченного решения при условии, что оно обладает равномерной устойчивостью по Ляпунову при $t \to +\infty$ или при $t \to -\infty$ (Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 1949, изд. 2, гл. V, теорема 38). Б. П. Демидович

2989. К вопросу об устойчивости по первому приближению. Иванов Е. Г., Научн. докл. высш. школы. Физ.-матем. н., 1958, № 4, 39—42

Рассматривается система уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + \varphi_s(t, x_1, \ldots, x_n), \qquad (1)$$

где $p_{si}(t)$ — ограниченные и непрерывные функции времени при $t \geqslant 0$, а функции $\varphi_s(t, x_1, \ldots, x_n)$ удовлетворяют неравенствам $|\varphi_s| < A(|x_1| + \ldots + |x_n|)$ $(A = \text{const})$ в области $\|x\| < H$, $t \geqslant 0$. Описывается метод построения функции Ляпунова вида

$$v(t, x) = \sum_{i=1}^{n} A_i(t)x_i^2 \qquad (2)$$

для уравнений линейного приближения к системе (1). Коэффициенты $A_i(t)$ подбираются из условий определенной положительности функции v и из условий определенной отрицательности dv/dt, которая выбирается в виде

$$\frac{dv}{dt} = -\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i,s=1}^{n} B_{si}x_i x_s. \qquad (3)$$

Для выполнения равенств (2) и (3) достаточно, чтобы выполнялись условия $dA_i/dt + 2A_i p_{ii}(t) = -1$, $2(A_i p_{si} + A_s p_{si}) = -B_{si}$, которые и определяют коэффициенты A_i и B_{si}. Условия знакоопределенности v и dv/dt, записанные в виде неравенств Сильвестра для B_{si}, A_i, определяют достаточные условия асимптотической устойчивости системы (1) при малом $A > 0$. В заметке приводится также анализ условий, при которых возможно построение функций $A_i(t)$, удовлетворяющих неравенству

$$A_i(t) \geqslant \bar{A} > 0 \qquad (\bar{A} = \text{const}). \qquad (4)$$

Примечание референта. Анализ возможности выполнения для $v(t, x)$ условий теоремы Ляпунова и в частности — выполнения условий (4) дан в статье неполно и не вполне корректно. Методы построения функций Ляпунова — квадратичных форм для линейных нестационарных систем предлагались многими авторами в форме более общей, чем в реферируемой статье, однако ссылок на такие работы статья не содержит. Н. Н. Красовский

2990. Новые точки зрения в теории устойчивости гамильтоновых систем. Мозер (New aspects in the theory of stability of Hamiltonian systems. Moser Jürgen), Communs Pure and Appl. Math., 1958, 11, № 1, 81—114 (англ.)

Отмечается важность изучения гамильтоновых систем дифференциальных уравнений, обычно получающихся на основании вариационных принципов и физически соответствующих процессам, протекающим без трения. По мнению автора, классическая концепция устойчивости по Ляпунову для таких систем не всегда приемлема с физической точки зрения. Исходя из этого, вводится несколько различных определений понятия устойчивости. В первую очередь рассматривается линейная гамильтонова система

$$\dot{x}_\nu = H_{x_{\nu+n}},\quad \dot{x}_{\nu+n} = -H_{x_\nu} \quad (\nu = 1, \ldots, n), \qquad (1)$$

где $H = H(x, t)$ — однородная квадратичная форма относительно совокупности переменных $x = (x_1, \ldots, x_n)$ с непрерывными по t периодическими коэффициентами периода 2π. Пусть $x = x(t)$ — решение системы (1), определяемое начальным условием: $x(0) = x_0 \neq 0$ и W — неособенная матрица такая, что $x(2\pi) = Wx(0)$. Как известно, поведение решений системы (1) зависит от собственных значений $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_n$ матрицы W. Изучаются следующие модификации устойчивости: а) Обычная устойчивость системы (1) — ограниченность всех ее решений при $-\infty < t < +\infty$. Достаточное условие устойчивости:

$$|\lambda_\nu| = 1, \quad \lambda_\nu \neq \bar{\lambda}_\mu \quad (\nu, \mu = 1, \ldots, n), \qquad (2)$$

где пары корней λ_ν, $\bar{\lambda}_\nu$ невырождены и упорядочены соответствующим образом на единичной окружности, причем собственные значения могут быть и кратными; б) параметрическая устойчивость, когда устойчива каждая возмущенная гамильтонова система $\dot{x}_\nu = H^*_{x_{\nu+n}}$, $\dot{x}_{\nu+n} = -H^*_{x_\nu}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ такая, что коэффициенты полинома $H^* - H$ достаточно малы для всех t. Выполнение условий (2) необходимо и достаточно для параметрической устойчивости системы (1). Полученные результаты частично содержатся в работах Крейна (Докл. АН СССР, 1950, 73, 445—448) и Гельфанда и Лидского (РЖМат, 1956, 2190). Далее изучается нелинейная гамильтонова система

$$\dot{x}_\nu = H_{y_\nu}(x, y, t),\quad \dot{y}_\nu = -H_{x_\nu}(x, y, t) \quad (\nu = 1, \ldots, n), \qquad (3)$$

где $H(x, y, t)$ — аналитическая функция от $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$ в окрестности точки $x = y = 0$, удовлетворяющая условию периодичности $H(x, y, t + 2\pi) = H(x, y, t)$ и такая, что $H(0, 0, t) \equiv 0$. Предполагается, что справедливо разложение $H(x, y, t) = H^2(x, y, t) + H^3(x, y, t) + \ldots$, где $H^{(m)}(x, y, t)$ $(m = 2, 3, \ldots)$ — однородные полиномы степени m относительно x и y с периодическими по t коэффициентами. Для тривиального решения $x = y = 0$ системы (3) изучаются условия: а) устойчивости в смысле Ляпунова; б) почти устойчивости. Под последней понимается существование формального первого интеграла $G(x, y, t) = C$ в форме степенного ряда, возможно расходящегося, имеющего период 2π по t и являющегося положительно определенным в окрестности точки $x = y = 0$. Для почти устойчивости нелинейной системы (3) достаточно, чтобы упорядоченные собственные значения λ_ν, $\overline{\lambda_\nu}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ квадратичной линейной гамильтоновой системы с функцией $H^{(2)}(x, y, t)$ для всех целых $g_\nu \geqslant 0$ таких, что $\sum_{\nu=1}^{\kappa} g_\nu > 0$, удовлетворяли условию:

$$\prod_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu^{g_\nu} \neq 1.$$

В заключение рассматриваются нелинейные гамильтоновы системы (3) с функцией $H = H(x, y)$, не зависящей от времени t. Б. П. Демидович

2991. О применении метода Ляпунова к задачам устойчивости. Разумихин Б. С., Прикл. матем. и механ., 1958, 22, № 3, 338—349

В основном изучается линейная система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(t)\, x_j \quad (i = 1, \ldots, n), \qquad (1)$$

где $p_{ij}(t)$ —известные непрерывные ограниченные функции времени при $t > t_0$. Совокупность n^2 чисел p_{ij} $(i, j = 1, \ldots, n)$ рассматривается как точка n^2-мерного пространства; $p_{ij} = p_{ij}(t)$ представляет линию в этом пространстве. Пусть $V = V(t; x_1, \ldots, x_n)$ — знакоопределенная функция. Под областью $L(V)$ понимается множество точек n^2-мерного пространства коэффициентов P, в каждой из которых производная dV/dt в силу системы (1), для всякого $t > t_0$, является знакопостоянной функцией противоположного с V знака. Для функции Ляпунова V в виде квадратичной формы с постоянными коэффициентами даются условия, определяющие область $L(V)$, и устанавливаются уравнение и свойства поверхности, ограничивающей эту область. Полученные результаты детализируются для линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка. Показывается также применение этих результатов для исследования устойчивости нелинейных систем. Б. П. Демидович

2992. О применении метода Ляпунова к разностным уравнениям. Хан (Über die Anwendung der Methode von Jjapunov auf Differenzengleichungen. Hahn Wolfgang). Math. Ann., 1958, **136**, № 5, 430—441 (нем.)

Исследуется устойчивость решений разностных уравнений при помощи некоторого перенесения на эти уравнения метода функций Ляпунова.

Рассматривается система разностных уравнений

$$x(t + 1) = f(x(t), t), \qquad (1)$$

где аргумент t может изменяться скачком на целочисленные величины, вектор-функция $f = (f_1, \ldots, f_n)$ предполагается непрерывной по аргументам x_i. На систему уравнений (1) естественным образом переносятся известные определения устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости в смысле Ляпунова решения $x = 0$ системы обыкновенных дифференциальных уравнений возмущенного движения. Доказываются теоремы, аналогичные теоремам метода функций Ляпунова, причем полная производная dV/dt в силу дифференциальных уравнений возмущенного движения заменяется первой разностью функции V, вычисленной в силу системы (1). Для линейной системы

$$x(t + 1) = Ax(t) \quad (A = \text{const}) \qquad (2)$$

по аналогии с известной теоремой Ляпунова указываются условия существования однородной формы $g(x)$, удовлетворяющей условию $g(Ax) - g(x) = h(x)$, где $h(x)$ — наперед заданная форма степени k. Приводятся теоремы, связывающие известным образом свойства устойчивости решения (2) со свойствами собственных значений матрицы A. Вводится понятие экспоненциальной устойчивости

$$\sum x_i^2(t_0 + k, x_0, t_0) \leqslant a \sum x_i^2(t_0) \exp -\alpha k$$

$$(a, \alpha > 0 — \text{const})$$

и доказывается существование „функции Ляпунова" — однородной определенно-положительной формы $V(x, t)$, удовлетворяющей в силу системы уравнений

$$x(t + 1) = A(t)\, x(t) \qquad (3)$$

условию $V(A(t)x(t)) - V(x(t)) = h(x(t), t)$, где $h(x, t)$ — заданная определенно-отрицательная квадратичная форма, если только решения системы (3) экспоненциально устойчивы. Существование функций Ляпунова используется для доказательства теорем устойчивости и неустойчивости решений квазилинейных систем $x(t+1) = A(t)x(t) + g(x, t)$ по первому приближению. Выясняется связь свойства экспоненциальной устойчивости с выполнением условий критерия устойчивости О. Перрона (ограниченность решений $x(t + 1) = A(t)\, x(t) + f(t)$ при любой ограниченной функции $f(t)$). Обсуждается приложение результатов статьи к задаче устойчивости решений периодических систем дифференциальных уравнений и переход от системы разностных уравнений с малым шагом к системе дифференциальных уравнений. Библ. 7 назв. В частности, отмечаются работы, результаты которых пересекаются с некоторыми результатами автора (РЖМат., 1956, 3812). Н. Н. Красовский

2993. Решение вопроса об устойчивости первым методом А. М. Ляпунова. Зубов В. И., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956, 4, М., АН СССР, 1959, 23

2994. О применении методов функционального анализа к задачам о нелинейных колебаниях. Красносельский М. А., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956, 3, М., АН СССР, 1958, 261—268

По мнению автора, вопросы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, связанные с существованием, единственностью, устойчивостью и некоторыми другими свойствами периодических решений, удобно исследовать методами нелинейного функционального анализа. Для данной системы дифференциальных уравнений периодические решения периода T рассматриваются как решения соответствующего операторного уравнения

$$\varphi = A(\varphi, T), \qquad (1)$$

где A — вполне непрерывный оператор, действующий в определенном пространстве вектор-функций. Для исследования операторного уравнения (1) используются соответствующие топологические принципы, теоремы о точках бифуркации, вариационные соображения и т. п. Формулируются полученные общие результаты, перефразированные для системы дифференциальных уравнений

$$\ddot{x}_i + g_i(t, x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n) = 0 \quad (i = 1, \ldots, n),$$

как неавтономных (g_i периодичны по t с периодом 2π), так и автономных. Б. П. Демидович

2995. Метод точечных преобразований в теории нелинейных колебаний. I, II, III. Неймарк Ю. И., Изв. высш. учебн. заведений. Радиофизика, 1958, № 1, 41—66, № 2, 95—117; № 5—6, 146—165

Три части работы Ю. А. Неймарка представляют собой систематическое изложение математических основ метода точечных преобразований. Этот метод применялся ранее А. А. Андроновым, Е. А. Леонтович, А. Г. Майером, Н. Н. Баутиным и другими математиками к нахождению периодических решений нелинейных задач и исследованию устойчивости этих решений. Хотя по существу работы автора не содержат новых математических результатов или не излагают новых математических методов, однако они дают ту сумму формул и методов, которые позволят в применении к конкретным уравнениям получить нужные для практики результаты. Автор рассматривает вопрос в общем случае автономной и неавтономной системы с любым числом степеней свободы.

В третьей части приводятся некоторые рассуждения, показывающие возможность применения метода точечных преобразований для того случая, когда правые части определены несколькими функциями, причем переход от системы уравнений с данными правыми частями к системам уравнений, определенным другими правыми частями, происходит в те моменты времени, в которые решения выходят на некоторые заранеее заданные поверхности. В работе не упоминается, что подобные системы принято в математической литературе называть «бушующими системами». Главное внимание уделяется теории бифуркации, причем эта теория для периодических решений сводится к теории бифуркации положения равновесия некоторых точечных преобразований. Аналитические формулы, приведенные в работе, кажутся новыми. Во всех разбираемых вопросах приведены окончательные формулы. Вывод этих формул основан на классической идее, что в окрестности данной точки решения нелинейной системы в случаях достаточной гладкости сводятся к решению линейной системы, или эквивалентной ей идее, что если решение разыскивается в виде степенных рядов, то линейные члены рядов определяют решения приближенных линейных систем. В статье приводится обширная библиография — 85 названий. Однако в ней полностью отсутствуют математические работы, касающиеся теории дифференциальных уравнений, описывающих бушующие системы, хотя таких работ уже достаточно много.

В. В. Немыцкий

2996. Об устойчивости периодических движений. Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р., Прикладная матем. и механ., 1958, **22**, № 6, 750—758

Исследуется устойчивость периодического решения $z = z^0(t)$ с периодом τ системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dz}{dt} = f(z, t) \quad (f(z, t+\tau) \equiv f(z, t)), \tag{1}$$

где z — n-мерный вектор. Предполагается, что функции f могут иметь разрывы на поверхностях

$$F_\alpha(z, t) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \ldots), \tag{2}$$

являющихся гладкими сечениями в окрестности решения $z = z^0(t)$. Для случая разрывных функций $f(z, t)$ авторами был ранее (РЖМат, 1959, 362) указан метод построения системы первого приближения и матрицы U, определяющей характеристичное уравнение

$$|U - \lambda E|_1^n = 0 \tag{3}$$

и на этой основе доказана теорема, обобщающая в неособых случаях известную теорему А. М. Ляпунова (Устойчивость движения, Гостехиздат, 1950, 313 стр.). В реферируемой статье эти результаты излагаются с точки зрения теории точечных преобразований, причем отмечается, что исходным пунктом для рассуждений авторов послужила статья Ю. И. Неймарка (реф. 2995). Помимо неособенных случаев, в статье рассмотрен случай одного корня уравнения (3) с модулем, равным единице, и в разрывном случае доказана теорема, аналогичная теореме А. А. Андронова — А. А. Витта (РЖМат, 1957, 2801 К). Приведем этот результат.

Теорема 2. Пусть система 1 автономна. Если, помимо одного корня, равного единице, все остальные $n-1$ корней характеристического уравнения по модулю меньше единицы, то периодическое решение $z^0(t)$ системы устойчиво по Ляпунову и, более того, оно „асимптотически устойчиво с точностью до фазы", т. е. $\lim [z(t+\alpha) - z^0(t)] = 0$ при $t \to \infty$, $\lim \alpha = 0$ при $z(0) \to z^0(0)$ для всех $z(0)$, близких к $z^0(0)$.

При доказательстве теоремы 2, в отличие от точечного преобразования $y^* = g(y)$ ($g(y) = \varphi(\tau, y)$), порождаемого на гиперплоскости $t = \tau$ траекториями $\varphi(t, y)$ и используемого в неособенном случае, рассматривается асимптотически устойчивое „усеченное" точечное преобразование, порожденное траекториями (1) на гиперплоскости $z_1 = 0$, где z_1 — координата, соответствующая единичному корню уравнения (1).

Н. Н. Красовский

2997. Об одном принципе существования ограниченных периодических и почти периодических решений у системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Красносельский М. А., Перов А. И., Докл. АН СССР, 1958, **123**, № 2, 235—238

Рассматривается нелинейная система дифференциальных уравнений

$$dx/dt = f(t, x), \tag{1}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, причем вектор-функция f непрерывна по совокупности переменных t и x при $|t| < +\infty$, $\|x\| < +\infty$. Предполагается, что в пространстве E^n существуют непрерывно дифференцируемые функции $\lambda(x)$ и $\mu(x)$ такие, что:

1) $(f(t, x), \operatorname{grad} \lambda(x)) > 0$ при $\|x\| \geqslant R$;

2) $(f(t, x), \operatorname{grad} \lambda(x) + \operatorname{grad} \mu(x)) \geqslant 0$ при $x \in T$,

где $T\{\|x\| > R, \min_{\|x\|=R} \lambda(x) \leqslant \lambda(x) \leqslant \max_{\|x\|=R} \lambda(x)\}$ (R — некоторое положительное число), причем

$$\lim_{x \in T,\ \|x\| \to +\infty} |\mu(x)| = +\infty.$$

Теорема 1. Если система (1) удовлетворяет условиям 1) и 2) и, сверх того, $\lambda(-x) = \lambda(x)$, то существует по меньшей мере одно определенное на $(-\infty, +\infty)$ равномерно ограниченное решение $x(t)$. Это решение периодическое или почти периодическое, если правая часть системы (1) соответственно обладает свойством периодичности или почти периодичности по t.

Доказательство теоремы не приведено. На примерах показывается применение теоремы 1 для конкретных систем. При уточнении свойств функций $\lambda(x)$ и $\mu(x)$ формулируются более сильные результаты. Указывается на возможность применения развитого метода для дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.

Б. П. Демидович

2998. Ограниченность периодических решений некоторых нелинейных дифференциальных уравнений. Ямагути, Сугаку, 1954, **6**, № 2, 85—89 (японск.)

2999. Два видоизменения понятия динамической системы на плоскости. Мышкис А. Д., Губарь Е. Г., Хохряков А. Я., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. **4**. М., АН СССР, 1959, 35—36

3000. Спектр частот линейной цепи беспорядков. Клуазо (Spectre de fréquences d'une chaîne linéaire

désordonnée. Cloizeaux Jacques des), J. phys. et radium, 1957, 18, № 2, 131—132 (франц.)
Решается система уравнений

$$du_j/d\tau = \sqrt{\lambda_j}\,U_{j+1} - \sqrt{\lambda_{j-1}}\,U_{j-1}, \qquad (1)$$

где индекс j меняется от 0 до N и число N весьма велико. Параметры λ_j — случайные величины, подчиняющиеся установленному вероятностному закону распределения по индексам j. Вместо непосредственного решения задачи, как это делалось у Дисона и Белмана (Phys. Rev., 1953, 92, 1331 и 1956, 101, 19), автор, следуя Жаме и Гинзбургу (J. Phys. Chem., 1953, 57, 840), вводит фазу $\varphi_j(\omega)$: а) $\operatorname{tg}\varphi_j(\omega) = -\omega t_j = \theta_j$ б) $\operatorname{tg}\varphi_{j+1} = \omega - (\lambda_j/\operatorname{tg}\varphi_j)$; $\varphi_{j+1} - \varphi_j = \operatorname{arctg}\theta_{j+1} - \operatorname{arctg}\theta_j + \begin{cases} 0 & \theta_j > \omega \\ \pi & \theta_j < \omega \end{cases}$ и $\varphi_0(0) = 0$, и из вероятностного закона распределения θ_j находит элементы решения системы (1).
М. И. Ельшин

3001 К. Дифференциальные уравнения. Реддик, Кибби (Differential equations. 3rd ed., 3 rd print. Reddick Harry W., Kibbey Donald E. New York, Jonh Wiley and Sons, Inc.; London, Chapman and Hall, Ltd, 1958, x, 304 pp., ill.) (англ.)
Книга содержит элементарные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений и физические приложения. Для линейных дифференциальных уравнений и линейных дифференциальных систем развит символический метод. Излагается интегрирование дифференциальных уравнений с помощью рядов, включая ряды Фробениуса. Как пример рассматриваются бесселевы функции положительного индекса. Дается понятие об уравнениях с частными производными и нахождении их частных решений методом разделения переменных. Текст иллюстрирован многочисленными примерами и задачами из различных областей. Имеется много задач для упражнений с ответами в конце книги.
Приводим названия глав: 1. Предварительные идеи (1—21); 2. Дифференциальные уравнения первого порядка (22—102); 3. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами (103—171); 4. Некоторые дифференциальные уравнения высшего порядка (172—191); 5. Совокупные уравнения (192—219); 6. Линейные уравнения второго порядка (220—245); 7. Решение с помощью рядов (246—266); 8. Частные дифференциальные уравнения (267—281). Ответы (282—300); указатель (301—304).
Книга предназначена для студентов инженерных специальностей и лиц, занимающихся самообразованием.
Б. П. Демидович

3002 К. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. Коддингтон Э. А., Левинсон Н., Перев. с англ. М., Изд-во ин. лит., 1958, 474 стр., илл., 21 р. 65 к.
В реферируемой книге теория обыкновенных дифференциальных уравнений изложена с исключительно большим охватом материала. Наряду с традиционными разделами теории, например, такими как теоремы существования и единственности, теория линейных систем и др., в книге подробно изложено много новых разделов, с которыми можно было ранее знакомиться только по журнальной литературе. Книга состоит из XVII глав. Первая и вторая главы посвящены вопросам существования и единственности решений. Главы со II по XII посвящены линейным уравнениям. Главы с XIII по XVII — нелинейной теории. Приведем наименование и краткое содержание глав. Гл. I. Существование и единственность решений. В этой главе вопрос о существовании и единственности изучается в весьма общем виде. Рассмотрены условия Липшица, Осгуда и более общие. Гл. II. Существование и единственность решений (Продолжение). Изучается теория Каратеодори верхних и нижних решений дифференциального уравнения с измеримой по Лебегу правой частью, а также применение этой теории к вопросам единственности. Гл. III. Линейные дифференциальные уравнения. Теория линейных систем изложена в матричных обозначениях. Из специальных систем рассмотрены системы с постоянными коэффициентами, системы с периодическими коэффициентами, системы с аналитическими коэффициентами. Гл. IV. Линейные системы с изолированными особенностями. Особенности первого рода. Гл. V. Линейные системы с изолированными особенностями. Особенности второго рода. Эти главы являются хорошим введением в аналитическую теорию линейных систем дифференциальных уравнений. В изложении систематически используется понятие формального решения, что значительно упрощает изложение многих вопросов. Гл. VI. Асимптотическое поведение линейных систем, содержащих большой параметр. В этой главе также с успехом используется понятие формального решения. Гл. VII. Самосопряженные задачи на собственные значения в случае конечного интервала. Дается компактное изложение задач на собственные значения для самосопряженного дифференциального оператора в случае конечного интервала. Теоремы полноты и разложения доказаны при помощи метода интегральных уравнений. Гл. VIII. Теоремы осцилляции и сравнения для линейных уравнений второго порядка и их приложения. Дано современное изложение теории Штурма для линейных уравнений второго порядка. В качестве применений рассмотрены периодические краевые условия и области устойчивости для уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами. Гл. IX. Сингулярные, самосопряженные краевые задачи для уравнения второго порядка. Изложены основные положения теории сингулярных самосопряженных краевых задач для уравнений второго порядка, в том числе теорема разложения. Изложение ведется методом предельного перехода без использования общей теории линейных операторов в пространстве Гильберта. Гл. X. Сингулярные самосопряженные краевые задачи для уравнений порядка n. В этой главе также применяется метод предельного перехода от регулярной задачи к сингулярной. Гл. XI. Алгебраические свойства линейных краевых задач на конечном интервале. Дается современное изложение теории Бохера. Гл. XII. Несамосопряженные краевые задачи. Дано хорошее введение в теорию несамосопряженных краевых задач для обыкновенных уравнений на конечном интервале. Подробно рассмотрен случай оператора $Lx = -x'' + q(t)x$. Случай оператора n-го порядка лишь намечен. Гл. XIII. Асимптотическое поведение нелинейных систем. Устойчивость. Дается введение в теорию устойчивости движений. Гл. XIV. Возмущение систем, имеющих периодическое решение. Гл. XV. Теория возмущений двумерных действительных автономных систем. Изучается качественная теория двумерных систем. Дается классификация изолированных особых точек. Гл. XVI. Теория Пуанкаре—Бендиксона двумерных автономных систем. Гл. XVII. Дифференциальные уравнения на торе.

Ко всем главам подобрано большое число задач. Трудные задачи снабжены подробными указаниями к решению. В книге приведено лишь ограниченное число литературных ссылок. Вероятно поэтому отсутствуют указания на большое число важных работ, результаты которых изложены в книге. В целом реценэируемая книга является значительным вкладом в теорию обыкновенных дифференциальных уравнений. Б. М. Левитан

3003 Д. Проблемы устойчивости движения при возмущениях, ограниченных в среднем. Гермаидзе В. Е. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Уральский ун-т, Свердловск, 1959

3004 Д. Поведение траекторий в окрестности особой точки в трехмерном пространстве. Рейзинь Л. Э. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Тартуск. ун-т, Тарту, 1959

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Редакторы *И. Н. Векуа, Н. И. Мозжерова*

3005. Теория систем дифференциальных уравнений с частными производными. Гельфанд И. М., Петровский И. Г., Шилов Г. Е. Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. 3. М., АН СССР, 1958, 65—72

Обзорный доклад, прочитанный на 3-м Всесоюзном математическом съезде. В начале доклада сделан ряд замечаний общего характера и замечаний, относящихся к установившимся системам; при этом указаны некоторые нерешенные вопросы. Основное внимание уделено задаче Коши для эволюционной системы

$$\partial u_j(x, t)/\partial t = \sum_{l=1}^{m} P_{jl}(t, i\partial/\partial x)\, u_l(x, t)$$

$$(j = 1, \ldots, m), \qquad (1)$$

где $P_{jl}(t, s)$ — многочлены от $s = (s_1, \ldots, s_k)$ с коэффициентами, непрерывно зависящими от t. Начальные данные $u_j(x, 0) = U_j(x)$ $(j = 1, \ldots, m)$ задаются во всем пространстве. Рассматривается вопрос об описании классов единственности и классов корректности. Формулируются определения этих классов; основные первоначальные результаты И. Г. Петровского; дальнейшие результаты В. Э. Лянце, Л. Шварца, О. А. Ладыженской и С. Д. Эйдельмана и наиболее общие и полные результаты И. М. Гельфанда, Г. Е. Шилова и их сотрудников, полученные при помощи развитого ими метода преобразований Фурье быстрорастущих функций; этот метод вкратце описан. Окончательные результаты сведены в таблицу. Далее приводятся обобщения этих результатов на системы с зависящими от x коэффициентами (С. З. Брук, С. Д. Эйдельман, А. Г. Костюченко, Г. Е. Шилов) и системы более общего, чем (1), вида (С. Л. Соболев, С. А. Гальперн, Г. Гусаченко). Библ. 23 назв. М. С. Агранович

3006. О некоторых уравнениях в частных производных второго порядка от двух независимых переменных. Серф (Sur certaines équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes. Cerf G.), J. math. pures et appl., 1958, 37, № 3, 207—223 (франц.)

Автор доказывает, в рамках общей классификации уравнений с частными производными второго порядка вида $r + f(x, y, z, p, q, s, t) = 0$, следующее свойство уравнений, имеющих два различных семейства характеристик: Условие, чтобы одно и только одно из семейств было составлено из характеристик первого порядка, совпадает с условием, выражающим то, что система

$$(b_1)\begin{cases} dy - m_1 dx = 0, \quad dz - (p + qm_1)\,dx = 0, \\ dp - (-f + sm_1)\,dx = 0, \quad dq - (s + tm_1)dx = 0, \\ (df/dy)\,dx + ds + m_2 dt = 0 \end{cases}$$

(m_1, m_2, $m_1 - m_2 \neq 0$, не равные корни уравнения $m^2 - \frac{\partial f}{\partial s} m + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$) пяти уравнений Пфаффа с семью переменными, определяющая характеристики второго рода другого семейства, допускает производную систему (C_1), состоящую из четырех уравнений 6-го класса.

D. Mangeron

3007. Единственность задачи Коши для дифференциальных уравнений в частных производных. Кальдерон (Uniqueness in the Cauchy problem for partial differential equations. Calderon A. P.), Amer. J. Math., 1958, 80, № 1, 16—36 (англ.)

Дается новый метод исследования единственности задачи Коши для дифференциальных уравнений в частных производных и систем таких уравнений. Этот метод основан на представлении линейного дифференциального оператора Au порядка m через сингулярные интегральные операторы в виде $Au = H\Lambda^m u$, где Λ — квадратный корень из $-\Delta$ и H — сингулярный интегральный оператор, символ которого строится по характеристическому полиному оператора Au (РЖМат, 1959, 1648).

В данной статье используются лишь свойства сингулярных операторов в L_2. Основной результат относительно одного уравнения следующий: Пусть $Au = 0$ — однородное линейное дифференциальное уравнение порядка m относительно неизвестной функции u, зависящей от переменных $(x) = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$. Предполагается, что коэффициенты старших производных в Au действительны и принадлежат классу $C_{1+\beta}$, $\beta > 0$, а остальные коэффициенты уравнения измеримы и ограничены. Кроме того, предполагается, что уравнение $Au = 0$ не имеет кратных характеристик. Если M — некоторое нехарактеристическое многообразие, $u \in C_m$ и вместе с производными до порядка m равно нулю на M, то $u \equiv 0$ в окрестности M. При этом, однако, предполагается, что или $k \neq 3$ или $m \leqslant 3$. Эти последние ограничения вызваны тем, что при $k = 3$ и $m \geqslant 4$, исходя из условия отсутствия кратных характеристик, по топологическим соображениям, не удается выделить однозначных ветвей корней некоторого алгебраического уравнения, возникающего в исследовании. Выделение однозначных ветвей существенно для применяемого метода и поэтому случай $k = 3$ и $m \geqslant 4$ остается открытым. При рассмотрении вопросов единственности допускается наличие как мнимых, так и действительных характеристик. В конце работы разбирается случай систем уравнений, для которых получен аналогичный результат, и случай нелинейных уравнений.

Б. В. Боярский

3008. Смешанная задача для линейных дифференциальных уравнений. Дафф (A mixed problem for linear differential equations. Duff G. F. D.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 46 (англ.)

Для некоторого аналитического линейного уравнения в частных производных m-го порядка n независимых переменных предполагается, что поверхность S начальных данных и граничная поверхность T пересекаются вдоль кромки C, и пусть существуют m действительных и различных характеристических поверхностей, проходящих через C, причем не менее k из них распространяются в некоторую так определяемую область. Тогда уравнение имеет решение класса C^{m-1} с заданными начальными значениями Коши на S и с заданными значениями для k поперечных производных на T. Решение аналитическое, кроме областей, пересекаемых упомянутыми k характеристическими поверхностями. Для неаналитического случая результаты подобны, хотя и менее полны.

3009. О существовании и единственности решений классических задач для уравнения $s = F(x, y, z, p, q)$. Кисынский (Sur l'existence et l'unicité des solutions des problèmes classiques relatifs à l'équation $s = F(x, y, z, p, q)$. Kisyński Jan), Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, 1957 (1959), A11, 73—112 (франц.; рез. польск., русск.)

Рассматривается уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) \qquad (1)$$

в замкнутой области $\Delta\{h(y) \leqslant x \leqslant a,\ g(x) \leqslant y \leqslant b\}$. Изучаются следующие две задачи:

I. Задача Гурса. Пусть $y = g(x)$, $0 \leqslant x \leqslant a$ и $x = h(y)$, $0 \leqslant y \leqslant b$, — две неубывающие функции класса $C^{(1)}$, графики которых пересекаются только в начале координат. Найти функцию $z(x, y)$, которая непрерывна в Δ вместе с производными, входящими в (1), удовлетворяет в Δ уравнению (1), а на кривых $y = g(x)$, $x = h(y)$ совпадает с заданной в Δ функцией $\chi(x, y)$.

II. Задача Коши. Пусть функции $y = g(x)$, $x = h(y)$ непрерывны и не возрастают соответственно на отрезках $0 \leqslant x \leqslant a$ и $0 \leqslant y \leqslant b$, причем $0 \leqslant g(x) \leqslant g(0) \leqslant b$, $0 \leqslant h(y) \leqslant h(0) \leqslant a$; кроме того, существуют такие числа $a^* \in [0, a]$ и $b^* \in [0, b]$, что $g(a^*) = h(b^*) = 0$ и функция $x = h(y)$ при $y \in [0, b^*]$ обратна функции $y = g(x)$ при $x \in [0, a^*]$[-2]. Найти функцию $z(x, y)$, которая непрерывна в Δ вместе с производными, входящими в (1), и удовлетворяет в Δ уравнению (1) при условиях: $z'_x(x, g(x)) = \sigma(x)$ для $x \in [0, a]$; $z'_y(h(y), y) = \tau(y)$ для $y \in [0, b]$; $z(x_0, y_0) = z_0$, где $y_0 = g(x_0)$ или $x_0 = h(y_0)$.

В работе доказаны формулируемые ниже утверждения.

Теорема 1. Задача I имеет в точности одно решение при следующих предположениях:

1) $\chi(x, y) \in C^{(1)}(\Delta)$; χ'_x удовлетворяет условию Липшица по y, а χ'_y — по x.

2) Функции $d\lambda^i(x)/dx$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, где $\lambda^0(x) = x$, $\lambda^{i+1}(x) = h(g(\lambda^i(x)))$, равномерно ограничены на отрезке $[0, a]$. (Условие 2 выполнено, в частности, если в точке $(0, 0)$ нет касания между кривыми $y = g(x)$ и $x = h(y)$).

3) При $(x, y) \in \Delta$ и любых $z, p, q, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q}$ функция $F(x, y, z, p, q)$ удовлетворяет неравенству

$$|F(x, y, z, p, q) - F(x, y, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q})| \leqslant \omega(|z - \bar{z}| + |p - \bar{p}| + |q - \bar{q}|), \qquad (2)$$

где непрерывная возрастающая функция $\omega(\delta)$ такова, что $\omega(0) = 0$ и $\int_0^\delta \frac{du}{\omega(u)} = \infty$ для $\delta > 0$.

Решение задачи I (вообще говоря, уже не единственное) существует также, если условие 3) заменить неравенствами:

$$|F(x, y, z, p, q) - F(x, y, z, \bar{p}, \bar{q})| \leqslant \omega(|p - \bar{p}| + |q - \bar{q}|),$$
$$|F(x, y, z, 0, 0)| \leqslant A + B|z|, \qquad (3)$$

где $\omega(\delta)$ такая же, как выше.

Теорема 2. Задача II имеет в точности одно решение, если функция $F(x, y, z, p, q)$ удовлетворяет неравенству (2), а функции $\sigma(x)$ и $\tau(y)$ непрерывны на отрезках $0 \leqslant x \leqslant a$ и $0 \leqslant y \leqslant b$ соответственно. Если вместо (2) выполняются неравенства (3), то решение задачи II существует, но, вообще говоря, не единственно.

Метод доказательства теорем 1 и 2 состоит в следующем. Рассматриваемая задача сводится к функциональному уравнению в банаховом пространстве; разрешимость полученного уравнения устанавливается с помощью теоремы Шаудера о неподвижной точке; единственность решения следует из одной теоремы о функциональных неравенствах, доказанной в реферируемой работе. А. С. Калашников

3010. Некоторые функциональные методы в теории уравнений с частными производными. Соболев С. Л., Вишик М. И., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. 3. М., АН СССР, 1958, 152—162

Обзорный доклад, в котором затронуты следующие вопросы: 1. Обобщенные функции и их применение для решения смешанных и краевых задач для уравнений в частных производных различных типов. 2. Обобщенные производные и теоремы вложения. Приводится удобная интерпретация теорем вложения, основанная на понятии обратного показателя суммируемости (о. п. с.); так называется число $1/p$, если данная функция суммируема со степенью p. Теорема вложения показывает, что при однократном дифференцировании функций из $W_p^{(l)}$ о. п. с. возрастает на $1/n$ (n — размерность пространства). Из этого выводится следующий результат, важный в теории нелинейных уравнений.

Теорема. Пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_r \in W_p^{(l)}$, и $np > l$; тогда любой многочлен от $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ с постоянными коэффициентами снова принадлежит $W_p^{(l)}$.

3. Метод квадратичных форм при решении краевых задач для эллиптических уравнений. 4. Априорные оценки и дифференциальные свойства решений эллиптических уравнений и систем. 5. Энергетические неравенства для нестационарных уравнений. 6. Метод исследования смешанных задач, основанный на приведении их к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения в гильбертовом или банаховом пространстве. 7. Метод квадратичных форм в применении к решению смешанных задач. Библ. 52 назв. М. З. Соломяк

3011. Оценка кривизны минимальных поверхностей $z = z(x, y)$. Ниче (On an estimate for the curvature of minimal surfaces $z = z(x,y)$. Nitsche Johannes C. C.), J. Math. and Mech., 1958, 7, № 5, 767—769 (англ.)

Для кривизны K_0 минимальной поверхности, простирающейся над кругом радиуса R, в центре круга дается оценка $|K_0| < \frac{49}{4}\frac{1}{R^2}$. Б. В. Боярский

3012. К решениям уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами. Алач (O contribuţie în domeniul ecuaţiilor cu derivate parţiale şi coeficienţi constanţi. Alaci V.), Comun. ştiinţ. şi tehn., 1956, 1, 63—70 (рум.; рез. русск., франц.)

Находятся некоторые частные решения вида $u = e^{\alpha t}(A_1 x_1 + \ldots + A_n x_n + \lambda t) = e^{\alpha t}\varphi(v)$ уравнений

$$\sum_1^n \left(a_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + b_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = a\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b\frac{\partial u}{\partial t} + cu,$$

получаемые приравниванием нулю коэффициентов однородного обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка

$$\left(a\lambda^2 - \sum_1^n a_i A_i^2\right)\frac{d^2\varphi}{dv^2} + \left[(2a\alpha + b)\lambda - \sum_1^n b_i A_i\right]\frac{d\varphi}{dv} + (a\alpha^2 + b\alpha + c)\varphi = 0$$

с неизвестной φ. D. Mangeron

3013. Об одном классе уравнений с частными производными. Рошкулец (Asupra unor ecuaţii cu derivate parţiale. Roşculeţ Marcel N.), Bul. Inst. politehn. Bucureşti, 1956, 18, № 1-2, 5—10 (рум.; рез. русск., франц.)

Следуя результатам одной давней работы Алманси (Almansi E., Ann. Math., 1899, 2, s. 3,1—51), автор предлагает некоторые виды решений для класса уравнений в частных производных

$$N(U) = \frac{\partial^{p_1}}{\partial x_1^{p_1}}\frac{\partial^{p_2}}{\partial x_2^{p_2}} \ldots \frac{\partial^{p_\alpha}}{\partial x_\alpha^{p_\alpha}} \Delta_{1, s_1}^{q_1} \Delta_{2, s_2}^{q_2} \ldots \Delta_{\beta, s_\beta}^{q_\beta}(U) = 0,$$

где

$$\Delta_{i,\,s_i}^{q_i} = \left(\frac{\partial^2}{\partial y_{1,\,i}^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_{2,\,i}^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial y_{s_i,\,i}^2}\right)^{q_i} -$$

итерированные операторы Лапласа, причем множества переменных $\{y_k, i\}$ $(k = 1, 2, \ldots s_i)$ дискретны между собою, а также и по отношению к множествам $\{x_\alpha\}$, состоящим из единичных элементов. D. Mangeron

3014. О классификации систем, состоящих из одного и того же числа независимых линейных дифференциальных выражений и неопределенных функций. Жане (Sur la classification des systèmes formés d'autant d'expressions différentielles linéaires indépendantes que de fonctions indéterminées. Janet Maurice), J. math. pures et appl., 1958, **37**, № 3, 279—293 (франц.)

Автор пришел к ряду общих результатов (C. r. Acad. sci., 1921, **172**, 1621; **173**, 124), касающихся линейных систем уравнений с частными производными с коэффициентами—данными функциями независимых переменных.

В этой статье приводятся некоторые доказательства и дополнения к вышеуказанным статьям, дающие полную классификацию систем, состоящих из трех линейных независимых уравнений первого порядка в частных производных с тремя неизвестными. Подчеркивая, в рамках классификации систем N линейных независимых дифференциальных выражений первого порядка с N неопределенными функциями n независимых переменных, интерес исчерпывающего изучения проблемы для небольшого N и в первую очередь для $N = 4$ и излагая возможный общий результат поставленной задачи, автор выражает признательность М. Фреше, применившему в области изучения парааналитических функций (РЖМат, 1954, 2869, 3308, 5763), как и в области понятия дифференцируемости гиперкомплексной функции (РЖМат, 1955, 5002; 1956, 7997) (частный вид более общего понятия моногенности одной гиперкомплексной функции по отношению к другой предложен В. С. Федоровым в Матем. сб., 1946, **1** (60), 353—387), эти исследования автора. Именно проявленный интерес к проблемам классификации дифференциальных систем и привел автора к их углублению в реферируемой здесь статье.

D. Mangeron

3015. Некоторые новые теоремы о преобразованиях, содержащих функции Лежандра. Фельзен (Some new transform theorems involving Legendre functions. Felsen L. B.), J. Math. and Phys., 1958, **37**, № 2, 188—191 (англ.)

Для уравнения

$$\left[\frac{d}{d\theta}\sin\theta\,\frac{d}{d\theta} - \left(\frac{1}{4} + x^2\right)\sin\theta - \frac{\lambda}{\sin\theta}\right] G_\theta(\theta, \theta'; x; \lambda) = -\delta(\theta - \theta'),$$

где x — вещественное фиксированное число, изучается функция Грина $G_\theta(\theta, \theta'; x; \lambda)$ для промежутков с концами $0 \leqslant \theta_1 < \theta_2 \leqslant \pi$ при условии ограниченности на концах $\theta_1 = 0$ или $\theta_2 = \pi$ и $\frac{\partial G_\theta}{\partial\theta} = 0$ или $G_\theta = 0$ на концах $\theta_1 > 0$ и $\theta_2 < \pi$.

Выписываются выражения функций Грина через присоединенные функции Лежандра $P_{-\frac{1}{2}+xl}^{\pm\sqrt{\lambda}}(\pm\cos\theta)$ и находятся некоторые асимптотические выражения для этих функций. Х. Л. Смолицкий

3016. Частные решения линейных дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами. Парсонс (Particular integrals of linear partial differential equations with constant coefficients. Parsons D. H.), Math. Gaz., 1958, **42**, № 342, 279—283 (англ.)

1. Рассматривается уравнение $P(D_1, \ldots, D_m)\,z = p_n(x_1, \ldots, x_m)$; $D_l \equiv \frac{\partial z}{\partial x_l}$; $P(D_1, \ldots, D_m)$ — полином относительно $D_1, \ldots, D_m$;

$$P(0, \ldots, 0) \neq 0 \qquad (1)$$

$p_n(x_1, \ldots, x_m)$ — полином степени n относительно $x_1, \ldots, x_m$. Тогда $z = Q_n(D_1, \ldots, D_m)\cdot p_n(x_1, \ldots, x_m)$, где полином Q_n удовлетворяет тождеству

$$1 \equiv P(D_1, \ldots, D_m) \times Q_n(D_1, \ldots, D_m) + R_{n+1}(D_1, \ldots, D_m) \qquad (2)$$

R_{n+1} не содержит D_l в степенях, меньших $n + 1$. (2) получено разложением в ряд $\frac{1}{P(D_1, \ldots, D_m)}$ по степеням D_l, что возможно в силу (1). 2. Рассматривается уравнение

$$P(D, E)\,z = a_r(y)\,x^r, \qquad (3)$$

$Dz = \frac{\partial z}{\partial x}$; $Ez = \frac{\partial z}{\partial y}$; $a_r(y)$ — непрерывная функция. $P(D, E) \equiv P_0(E) + D\,P_1(E) + \ldots + D^s P_s(E)$. Не ограничивает общности условие

$$P_0(E) \not\equiv 0. \qquad (4)$$

Тогда $z = \{Q(E) + D\,Q_1(E) + \ldots + D^r Q_r(E)\}\,x^r \times \{P_0(E)\}^{-r-1} a_r(y)$. $\{P_0(E)\}^{-1}$ — оператор, обратный $P_0(E)$. $Q(E) + D\,Q_1(E) + \ldots + D^r$. $Q_r(E)$ определяется из равенства

$$\{P_0(E)\}^{r+1} = \{P_0(E) + \ldots + D^s P_s(E)\} \times \{Q(E) + \ldots + D^r Q_r(E)\} + D^{r+1} \cdot R(D\,E). \qquad (5)$$

Построение (5) возможно в силу (4). Тем же методом получаются частные интегралы уравнений

$$P(D_1 \ldots D_m)\,z = \sum_{\alpha \leqslant N} a_{i_1, \ldots, i_{n-t}}(x_1, \ldots, x_t)\,x_{t+1}^{\alpha_{i_1}} x_{t+2}^{\alpha_{i_2}} \ldots x_n^{\alpha_{n-t}}.$$

3. Иногда вместо (5) можно построить тождество

$$\{P_0(E)\}^p = \{P_0(E) + \ldots + D^s P_s(E)\}\,\{S_0(E) + \ldots + D^r S_r(E)\} + D^{r+1} T(D, E);\ p < r + 1,$$

тогда

$$z = \{S_0(E) + \ldots + D^r S_r(E)\}\,x^r\,\{P_0(E)\}^{-p}\,a_r(y).$$

Б. С. Павлов

3017. Об аналитическом продолжении решений некоторых уравнений с частными производными математической физики. Петтинео (Sul prolungamento analitico delle soluzioni di talune equazioni a derivate parziali della fisicamatematica. Pettineo Benedetto), Ann. mat. pura ed appl., 1956, **41**, 221—255 (итал.)

Если гармоническая функция u определена в n-мерном пространстве с одной стороны от аналитической поверхности S, непрерывна вплоть до S и принимает на S аналитические значения, то u можно продолжить через S до функции, аналитической в некоторой окрестности S. Эта теорема при $n = 2$ является классической теоремой Шварца, а при $n > 2$ была доказана в 1926 г. Жиро довольно сложным методом. (Этой теореме посвящена также работа Америо (Amerio L., Portug. math., 1941, **2**, № 3, 173—176. *Реф.*). Автор приводит новое, более простое доказательство данной теоремы; именно он проверяет, что если представить u в виде потенциала двойного слоя, то плотность, определяемая из хорошо из-

вестного интегрального уравнения, будет на S аналитичной. Последнее утверждение распространяется на интегральные уравнения (и системы таких уравнений) более общего вида. А. Д. Мышкис

3018. Некоторые двумерные решения уравнения Пуассона. Пауэр, Джэксон (Certain two-dimensional solutions to Poisson's equation. Power G., Jackson H. L. W.), Appl. Scient. Res., 1958, B7, № 4, 249—255 (англ.)

Функции $\Phi_1(x, y)$ и $\Phi_2(x, y)$ заданы соответственно в областях $r^2 = x^2 + y^2 \leqslant 1$ и $r^2 \geqslant 1$, а на линии $r = 1$ удовлетворяют условиям

$$\left.\begin{aligned} &\Phi_1 = \Phi_2 \\ &k_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} = k_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial r}, \quad k_1, k_2 = \text{const} \end{aligned}\right\} \ldots . \qquad (1)$$

Пусть $g_1(x, y)$ и $g_2(x, y)$ — какие-либо функции, такие что $\Delta g_1 = \Delta \Phi_1$ и $\Delta g_2 = \Delta \Phi_2$. Утверждается, что

$$\Phi_1 = g_1 + \operatorname{Re}\left[H_3(z) + H_4\left(\frac{1}{z}\right)\right],$$

$$\Phi_2 = g_2 + \operatorname{Re}\left[H_5(z) + H_6\left(\frac{1}{z}\right)\right],$$

где $z = x + yi$, H_3, H_6 и H_4, H_5 — аналитические функции в областях $|z| \leqslant 1$ и $|z| \geqslant 1$ соответственно. Для определения функций H_3, H_4, H_5, H_6 предлагаются следующие уравнения:

$$H_3(z) + \overline{H}_4(z) - H_5(z) - \overline{H}_6(z) = G(z),$$

$$k_1[H_3(z) - \overline{H}_4(z)] - k_2[H_5(z) - \overline{H}_6(z)] = \Phi(z), \quad |z| = 1,$$

где $G(z)$ и $\Phi(z)$, $(|z| = 1)$ — известные функции, определяемые через $g_1(x, y)$ и $g_2(x, y)$. Еще два уравнения имеют вид

$$\operatorname{Re} H_4\left(\frac{1}{z}\right) + g_{10}(x, y) = \chi_1(x, y),$$

$$\operatorname{Re} H_5(z) + g_{2\infty}(x, y) = \chi_2(x, y),$$

где о функциях $g_{10}(x, y)$, $g_{2\infty}(x, y)$, $\chi_1(x, y)$, $\chi_2(x, y)$ сказано следующее: а) "Предположим, что вблизи начала $\Phi_1(x, y) \to \chi_1(x, y)$, а на больших расстояниях от начала $\Phi_2(x, y) \to \chi_2(x, y)$, где $\chi_1(x, y)$ и $\chi_2(x, y)$ — известные функции"; б) "где $g_{10}(x, y)$ — форма $g_1(x, y)$ вблизи начала и $g_{2\infty}(x, y)$ — форма $g_2(x, y)$ на большом расстоянии от начала".

Приводятся два примера. В первом из них $g_1 = g_2 \equiv 0$ и поэтому $G = \Phi = 0$. Затем предполагается $H_4(z) \equiv 0$ и выражается $\overline{H}_6(z)$ и $H_3(z)$ через $H_5(z)$, чем и заканчивается пример. Во втором примере $\Delta \Phi_2(x, y) = \omega = \text{const}$. Предполагается $\chi_2(x, y) = U_y + \frac{1}{2}\omega y^2$, где $U = \text{const}$ считается известной. Находится функция $\Phi_2(x, y)$, и неясно, каково отношение этой функции к задаче (1). В заключение предлагается задачу Пуассона для любой области решать указанным методом, используя конформное преобразование. Некоторые рассуждения авторов статьи показались рефер енту неотчетливыми. Х. Л. Смолицкий

3019. Одно обобщение метода Фурье решения некоторых граничных задач. Хаймович (O generalizare a metodei lui Fourier de rezolvare a unor probleme la limită. Haimovici Adolf), An. ştiinţ. Univ. Iaşi, 1956, Sec. 1, 2, № 1-2, 133—143 (рум.; рез. русск., франц.)

Автор, продолжая исследования решений обыкновенных дифференциальных уравнений с нелинейными граничными условиями, где им были введены обобщения понятий собственных чисел и собственных функций, распространяет метод Фурье на задачу о нахождении решения уравнения $u_{xx} + cu_{tt} + a(x)u_x + b(t)u_t = 0$ с нелинейными граничными условиями $u_x(0, t) = \alpha(t) V \times [u(0, t)]$, $u_x(1, t) = \beta(t) V[u(1, t)]$, где V — непрерывная функция, допускающая ограниченную производную, причем интеграл $I = \int_m^M du/V(u)$ существует.

D. Mangeron

3020. Рассмотрение одной последовательности потенциалов эллиптического слоя с приложением к гармоническим проблемам в пространстве и полупространстве. Пачелли (Esame di una successione di potenziali di strato ellittico con applicazione a problemi armonici nello spazio e nel semispazio. Pacelli Mauro), Ann. Scuola nerm. super. Pisa, 1955, 9, № 1-2, 1—22 (итал.)

Пусть на эллиптическом диске σ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1, \quad z = 0$$

распределены массы с поверхностной плотностью

$$\mu^s = \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{s/2} (s = -1, 1, 3, 5, \ldots).$$

Изучаются ньютоновские потенциалы $V_s(x, y, z)$ этих масс. Показано, что значение потенциала на поверхности диска σ

$$V_s(x, y, z) = \overline{V}_s(x, y); \quad (x, y, z) \in \sigma \quad (s = -1, 1, 3, 5, \ldots)$$

есть четный полином от x и y степени $s + 1$, причем $h + 1$ частных производных

$$\frac{\partial^h \overline{V}_s(x, y)}{\partial x^t \partial y^{h-t}} \quad \left(t = 0, 1, \ldots, h; \quad h = \frac{s+1}{2}\right)$$

линейно независимы.

Коэффициенты полинома $\overline{V}_s(x, y)$ находятся из рекуррентных формул, содержащих эллиптические интегралы. Полученные результаты прилагаются к решению следующих задач:

1) Найти гармоническую в полупространстве $z > 0$ и регулярную на бесконечности функцию $\varphi(x, y, z)$, удовлетворяющую граничным условиям

$$\varphi(x, y, +0) = P_n(x, y), \quad z = 0, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1;$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad z = 0, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1.$$

2) Аналогично 1), но при граничных условиях

$$\varphi(x, y, +0) = 0, \quad z = 0, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1;$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = Q_m(x, y), \quad z = 0, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1.$$

3) Найти функцию $\varphi(x, y, z)$, гармоническую во всем пространстве, за исключением диска σ, регулярную на бесконечности и удовлетворяющую на σ условиям:

$$\varphi(x, y, +0) = P_n(x, y),$$

$$\varphi(x, y, -0) = Q_m(x, y), \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1.$$

Здесь $P_n(x, y)$ и $Q_m(x, y)$ — заданные полиномы степеней n и соответственно m.

Решение первой задачи ищется в виде

$$\varphi(x, y, z) = \sum_{h=0}^{n} \sum_{t=0}^{h} a_{ht} \frac{\partial^h \overline{V}_{2h-1}(x, y)}{\partial x^t \partial y^{h-t}}.$$

Вследствие линейной зависимости частных производных

$$\frac{\partial^h \overline{V}_{2h-1}(x, y)}{\partial x^t \partial y^{h-t}} \quad (t = 0, 1, \ldots, h),$$

коэффициенты a_{ht} находятся однозначно из условия

$$\sum_{h=0}^{n} \sum_{t=0}^{h} a_{ht} \frac{\partial^h \overline{V}_{2h-1}(x, y)}{\partial x^t \partial y^{h-t}} = P_n(x, y).$$

Задачи 2) и 3) решаются подобным же образом.

Работа является обобщением результатов Каттанео (Cattaneo C., Atti S min. matem. e fis. Univ. Modena, 1948—49, III), который рассматривал аналогичные вопросы для кругового диска. В. К. Иванов

3021. Современная теория потенциала. Ниномия, Итимацу, Сугаку, 1954, 6, № 2, 100—118 (японск.)

3022. Исправление к моей работе «Об интеграле энергии в теории потенциала». Ниномия (Une correction sur mon travail: «Sur l'intégrale d'énergie dans la théorie du potentiel». Ninomiya Nobuyuki), J. Inst. Polytechn. Osaka Univ., 1955, **A6**, № 2, 79—82 (франц.)

Исправление к РЖМат, 1956, 6497. Основные результаты упомянутой работы верны. Исправлены формулировка и доказательство одной леммы. Ю. А. Шашкин

3023. О преобразовании Лиувилля для $u_{xx} + u_{yy} \pm a^2(x, y)\, u = 0$. Белман (On a Liouville transformation for $u_{xx} + u_{yy} \pm a^2(x, y)\, u = 0$. Bellman Richard), Boll. Unione mat. ital., 1958, **13**, № 4, 535—538 (англ.; рез. итал.)

Пусть $\log a(x, y)$ — гармоническая функция. Тогда существует замена независимых переменных, преобразующая указанное в заголовке уравнение к виду $u_{xx} + u_{yy} \pm u = 0$. М. З. Соломяк

3024. О локальном поведении решений $\Delta u = g(x, u, \nabla u)$. Хартман (On the local behavior of solutions of $\Delta u = g(x, u, \nabla u)$. Hartman Philip), Communs Pure and Appl. Math., 1956, **9**, № 3, 435—445 (англ.)

Пусть $\lambda(x)$ и $\mu(x)$ — непрерывные векторная и скалярная функции в шаре $r = |x| < 1$ трехмерного евклидова пространства. Функция $u = u(x)$ называется C^1— решением уравнения

$$\Delta u + \lambda(x) \cdot \nabla u + \mu(x)\, u = 0 \qquad (1)$$

(Δ — лапласиан, $\nabla = \operatorname{grad}$), если $u(x) \in C^1$ и является суммой гармонической функции и ньютонова потенциала с плотностью $(\lambda \cdot \nabla u + \mu u)/4\pi$. Доказываются следующие теоремы:

I. Если $u(x)$ C^1-решение (1), $u(x) = o(r^n)$ для $r \to 0$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, то $u(x) \equiv 0$ в шаре $r < 1$.

II. Пусть $u(x) \not\equiv 0$ и $u(x)$ C^1-решение в $r < 1$, причем $u(0) = 0$. Тогда существует положительное целое N и такая сферическая функция $S_N(e)$ порядка N, $\left(e = \frac{x}{r}\right)$, что имеет место $u(x) = r^N S_N(e) + o(r^N)$ $\nabla u(x) = \nabla(r^N S_N(e)) + o(r^{N-1})$ для $r \to 0$ и равномерно относительно e. В теоремах III—V предполагается, что $u(x)$ есть C^1-решение в шаре без центра $0 < r < 1$.

III. Если $u(x) = o\left(\frac{1}{r}\right)$, то $u(x)$ может быть определена в $x = 0$ так, что $u(x)$ будет C^1-решением в полном шаре $0 < r < 1$.

IV. Если $u(x) \to \infty$ для $r \to 0$, то существует такая постоянная $c > 0$, что имеет место

$$u(x) = \frac{c}{r} + O(|\log r|); \quad \nabla u(x) = \nabla\left(\frac{c}{r}\right) + O\left(\frac{1}{r}\right).$$

V. Пусть $u(x) = o(r^{-N-2})$, $\nabla u(x) = o(r^{-N-3})$ для некоторого целого $N \geqslant 0$. Тогда существует такая сферическая функция $S_N(e)$ порядка N (возможно $S_N(e) \equiv 0$), что

$$u = r^{-N-1} S_N + O(r^{-N} |\log r|),$$

$$\nabla u = \nabla(r^{-N-1} S_N) + O(r^{-N-1} |\log r|)$$

равномерно относительно e.

Теоремы I—V верны для функций, удовлетворяющих неравенству $|\Delta u| \leqslant \text{const} \cdot (|\nabla u| + |u|)$, и, следовательно, верны для решений уравнения $\Delta u = g(x, u, \nabla u)$, где $|g(x, u, \nabla u)| \leqslant \text{const} \cdot (|\nabla u| + |u|)$. Теоремы I—V переносятся также на случай пространств любого числа измерений $\geqslant 2$. Х. Л. Смолицкий

3025. О линейных дифференциальных уравнениях с малым параметром при старших производных. Солонников В., Докл. АН СССР, 1958, **119**, № 3, 454—457

Изучается первая однородная краевая задача для уравнения эллиптического типа, вырождающегося при $\varepsilon \to 0$ в уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial L u}{\partial x_i} + M u = f, \qquad (1)$$

где L и M — эллиптические операторы порядка $2m_0$.

Граница S разбивается на три части S_1, S_2 и S_3, на каждой из которых соответственно $\sum a_i \cos nx_i > , = $ или < 0. Пусть $\zeta(x)$ — достаточно гладкая неотрицательная функция, равная нулю на S_3. Приводится оценка, справедливая для решения u^ε невырожденной задачи:

$$\sum_{i, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m_0}=1}^{n} \int_{\Omega} \left(a_i \frac{\partial^{m_0+1} u^\varepsilon}{\partial x_{\alpha_1} \ldots \partial x_{\alpha_{m_0}} \partial x_i}\right)^2 \zeta^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant C \| f \|^2_{L_2(\Omega)}, \qquad (2)$$

где C не зависит от ε (в статье эта формула содержит опечатку). С помощью (2) устанавливается существование подпоследовательности $\{u^\varepsilon{}_k\}$, слабо сходящейся в метрике

$$(u, v)_{\overset{\circ}{W}{}^{m_0}_2} + \int_{\Omega} \sum_{i, k, \alpha_1 \ldots \alpha_{m_0}} a_i \frac{\partial^{m_0+1} u}{\partial x_i \partial x_{\alpha_1} \ldots \partial x_{\alpha_{m_0}}} \times$$

$$\times a_k \frac{\partial^{m_0+1} v}{\partial x_k \partial x_{\alpha_1} \ldots \partial x_{\alpha_{m_0}}} \zeta^2 dx$$

к функции u, удовлетворяющей определенному интегральному тождеству. Утверждается, что функция, удовлетворяющая этому тождеству, единственна, и автор называет ее обобщенным решением вырожденной задачи (1) — (3), где (3) — граничное условие:

$$u|_S = \ldots = \left.\frac{\partial^{m_0-1} u}{\partial n^{m_0-1}}\right|_S = \left.\frac{\partial^{m_0} u}{\partial n^{m_0}}\right|_{S_1} = 0. \qquad (3)$$

Приводятся аналогичные результаты для параболических и гиперболических уравнений. Доказательства в статье отсутствуют.

Отмечается, что часть результатов статьи независимо получена М. Ш. Бирманом (РЖМат, 195 , 5732).

М. З. Соломяк

3026. Теорема Фрагмена—Линделёфа в гармоническом анализе и ее применения к некоторым вопросам теории эллиптических уравнений. Лакс (A Phragmén—Lindelöf theorem in harmonic analysis and its application to some questions in the theory of elliptic equations. Lax P. D.), Communs Pure and Appl. Math., 1957, **10**, № 3, 361—389 (англ.)

Пусть S — линейное пространство функций $u(y)$ действительного параметра y, $y>0$, значения которых принадлежат банахову пространству с нормой $\|u(y)\|$. Предполагается, что S выдерживает сдвиг $T_\eta[u(y)] = u(y+\eta)$, $\eta>0$. Пусть $|u|_a^b = \left(\int_a^b \|u(y)\|^p dy\right)^{1/p}$, $p \geqslant 1$, причем для каждого $u(y) \in S$ существование интеграла на каждом интервале $0<a<b<+\infty$ предполагается. S называется внутренне компактным, если любая последовательность $u_n(y) \in S$, ограниченная по норме $|u|_a^b$, содержит фундаментальную подпоследовательность по норме $|u|_{a'}^{b'}$ при $a<a'<b'<b$. Основной результат первой части работы состоит в следующем (абстрактный принцип Фрагмена — Линделёфа): если пространство S внутренне компактно, то существует число $\alpha>0$ такое, что для всех элементов пространства S, для которых существует интеграл

$$\int_0^\infty \|u(y)\|^p dy,$$

существует также интеграл

$$\int_0^\infty \|u(y)\|^p e^{\alpha y}\, dy.$$

Для доказательства проводится подробное исследование спектральных свойств полугруппы операторов T_η. Приведенная теорема эквивалентна утверждению, что спектральный радиус оператора T_η меньше 1 для любого $\eta>0$. Операторы T_η вполне непрерывны тогда и только тогда, когда подпространство M тех $u(y) \in S$, для которых существует интеграл $\int_0^\infty \|u(y)\|\, dy$, внутренне компактно. Рассматриваются также некоторые другие вопросы, например, однозначная продолжимость элементов внутренне компактного пространства, сходимость рядов Фурье по собственным функциям операторов сдвига и т. п. Во второй части рассматриваются применения полученных результатов к однородному уравнению $L(u)=0$ эллиптического типа порядка m с достаточно гладкими коэффициентами, заданному в полуцилиндре D, $y>0$, над областью $\overset{\circ}{D}$ переменных x. Предполагается, что коэффициенты уравнения $L(u)=0$ не зависят от y. Решение уравнения $Lu=0$ считается функцией y, $u(x; y) = u(y)$, причем $\|u(y)\|$ есть квадратный корень из суммы интегралов по $\overset{\circ}{D}$ квадратов всех производных функции $u(x, y)$ по x до порядка m включительно. На основании известных ранее и некоторых обобщенных автором внутренних оценок решений уравнения $Lu=0$ и абстрактного принципа Фрагмена — Линделёфа доказывается, что интеграл $\int_{y>N} \|u(y)\|\, dy \leqslant Ce^{-\alpha N}$, если интеграл Дирихле функции $u(x, y)$ по D конечен. Постоянная α зависит лишь от оператора L и области $\overset{\circ}{D}$. В третьей части рассматриваются вопросы полноты собственных функций операторов сдвига. В частности, там доказывается аналог теоремы Бёрлинга для функций, значения которых лежат в конечномерном банаховом пространстве. В ходе изложения по всей статье ставится много нерешенных интересных вопросов.

Б. В. Боярский

3027. Разложение по собственным функциям уравнений в частных разностях и частных производных. Березанский Ю. М., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. **3**, М., АН СССР, 1958, 238—244

Дается очень ясное изложение основных положений разработанного автором метода вывода разложения по собственным функциям уравнения в частных производных или в частных разностях из общей спектральной теоремы для линейных операторов в пространстве Гильберта. Библ. 22 назв.

Б. М. Левитан

3028. Добавление к работе «О задачах на собственные значения и собственные функции уравнения $\Delta u + \lambda u = 0$». Хон Им Сик (A supplement to «On an eigenvalue and eigenfunction problem of the equation $\Delta u + \lambda u = 0$». Hong Imsik), Kodai Math. Semin. Repts, 1958, **10**, № 1, 27—37 (англ.)

Показывается, что полученная в предыдущей работе предельная теорема для первой собственной функции и первого собственного значения (РЖМат, 1959, 5847) обобщается на следующие собственные значения и собственные функции. См. по этому поводу замечание референта в цитированном реферате.

Б. М. Левитан

3029. Распространение возмущений в случае уравнений второго порядка гиперболического типа. Добреску-Пуриче (Propagarea perturbaţiilor în cazul ecuaţiilor de ordinul II de tip hiperbolic. Dobrescu-Purice Lucia), Comun. Acad. RPR, 1958, 8, № 2, 125—131 (рум.; рез. русск., франц.)

Продолжая исследования Теодореску в области инвариантной теории распространения волн (РЖМат, 1956, 1866), автор изучает геометрическую теорию явлений распространения, определяемых уравнениями гиперболического типа

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\partial^2 u/\partial x_i \partial x_j + \sum_{i=1}^n b_i \partial u/\partial x_i + cu = f.$$

Устанавливаются уравнения распространения

$$dx_i = \frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial p_i}dt, \quad dp_i = -\frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial x_i}dt,$$

где характеристическая функция

$$H(x_i, p_j) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, p_i p_j$$
$$(i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

— квадратичная форма. Из изложенного следует, что любая волна — интегральная поверхность уравнения в частных производных и обратно. Библ. 3 работы Н. Теодореску.

D. Mang ron

3030. Задачи Коши для волнового уравнения с затуханием и полигармоническими начальными условиями. Майлс, Вильямс (The Cauchy problem for the damped wave equation with polyharmonic initial conditions. Miles E. P., Jr, Williams Ernest), Portug. math., 1958, **17**, № 1-2, 53—57 (англ.)

Пусть $F(x_1, \ldots, x_r)$ и $G(x_1, \ldots, x_r)$ — полигармонические функции порядков f и g соответственно. Тогда задача Коши для уравнения

$$\left[\Delta - \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - k^2\right)\right] u(x_1, \ldots, x_r, t) = 0 \qquad (1)$$

при условиях $u|_{t=0} = F$, $u_t|_{t=0} = G$ имеет решение вида

$$u = \sum_{n=0}^{f-1} \Delta^n F u_n(t) + \sum_{n=0}^{g-1} \Delta^n G.\, v_n(t), \qquad (2)$$

где $u_0(0) = v_0'(0) = 1$, $u_0'(0) = v_0(0) = u_n(0) = u_n'(0) = v_n(0) = v_n'(0) = 0$, $(n \geqslant 1)$ и удовлетворяют уравнениям $u_n'' - k^2 u_n = u_{n-1}$, $v_n'' - k^2 v_n = v_{n-1}$, $(u_{-1} = v_{-1} \equiv 0)$. В статье находится явное выражение для $u_n(t)$ и $v_n(t)$. Указывается, что этим же методом решается задача Коши для уравнения $\Delta u + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \pm k^2 u = 0$. В заключение отмечено: если F и $G \in C^\infty$, но не полигармонические, то (2) для $f = g = \infty$ дает формальное решение задачи Коши в виде ряда; сходимость формального ряда и возможность использования указанного метода в случае аппроксимации начальных условий полиномами исследованы первым из авторов. Х. Л. Смолицкий

3031. Новая краевая задача для уравнения колеблющейся струны. Лясота (Sur un nouveau problème aux limites relatif à l'équation de la corde vibrante. Lasota A.), Bull. Acad. polon. sci., 1957, cl. 3, 5, № 9, 843—846 (франц.; рез. русск.)

Пусть $f(x, y, u, p, q)$, $g(x, u, q)$, $h(y, u, p)$, $k_i(x, u)$, $i = 1, 2, 3$, $l_i(y, u)$ — функции, непрерывные для $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$ и произвольных u, p, q, и пусть в пространстве x, y, u дана точка $P_0(x_0, y_0, u_0)$, причем $0 \leqslant x_0 \leqslant a$, $0 \leqslant y_0 \leqslant b$. Автор вводит для функции $u(x, y) \in C^1$ $(0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b)$ следующие краевые условия G: 1) поверхность $u = u(x, y)$ пересекает каждую из 3 поверхностей $y = k_i(x, u)$ вдоль некоторой кривой L_i: $y = y_i(x)$, $u = u_i(x)$; 2) для $0 \leqslant x \leqslant a$: $u_x(x, y_1(x)) = g(x, u(x, y_2(x)), u_y(x, y_3(x)))$; 3) поверхность $u = u(x, y)$ пересекает каждую из 3 поверхностей $x = l_i(y, u)$ вдоль некоторой кривой $\tilde{L}_i$: $x = x_i(y)$, $u = u_i(y)$; 4) для $0 \leqslant y \leqslant b$: $u_y(x_1(y), y) = h(y, u(x_2(y), y), u_x(x_3(y), y))$ 5) $u(x_0, y_0) = u_0$. Если функции f, g, h, k_i, l_i удовлетворяют следующим неравенствам:

$$|f(x, y, u, \bar{p}, \bar{q}) - f(x, y, u, p, q)| \leqslant L|\bar{p} - p| + M|\bar{q} - q|,$$

$$|g(x, u, \bar{q}) - g(x, u, q)| \leqslant R|\bar{q} - q|,$$

$$|h(y, u, \bar{p}) - h(y, u, p)| \leqslant S|\bar{p} - p|,$$

$$|k_i(x, \bar{u}) - k_i(x, u)| \leqslant N|\bar{u} - u|,$$

$$|l_i(y, \bar{u}) - l_i(y, u)| \leqslant N|\bar{u} - u|$$

$$|f(x, y, u, p, q)| \leqslant K, \quad |g(x, u, q)| \leqslant K,$$

$$|h(y, u, p)| \leqslant K,$$

$$0 \leqslant k_i(x, u) \leqslant a, \quad 0 \leqslant l_i(y, u) \leqslant b,$$

причем постоянные L, M, R, S, N, K должны в свою очередь удовлетворять неравенствам

$$(\max(a, b) + 1)KN < 1, \quad bL < 1, \quad aM < 1,$$

$$RS(1 - bL)^{-1}(1 - aM)^{-1} < 1,$$

то говорят, что эти функции удовлетворяют условию R Методом Шаудера неподвижной точки доказывается теорема: Если функции f, g, h, k_i, l_i удовлетворяют условию R, то существует по крайней мере одна функция $u(x, y) \in C^1$ $(0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b)$, для которой существует u_{xy}, удовлетворяющая уравнению

$$u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$$

и краевым условиям G. В. И. Левин

3032. Распространение волн в слоистой среде. Скотт (Wave propagation in a stratified medium. Scott E. J.), Ann. polon. math., 1957, **3**, № 2, 213—217 (англ.)

Рассмотрена смешанная задача для струны, составленной из n различных кусков. Задача решается с помощью преобразования Лапласа. Решение получается в виде контурного интеграла типа Меллина, который вычисляется с помощью теоремы о вычетах в случае $n = 2, 3$, при этом, очевидно, решение задачи представляется в виде того же ряда, который бы дал метод Фурье. В. М. Бабич

3033. Замечания к уравнению колебаний струны. Шарский, Важевский (Uwagi o równaniu struny drgającej. Szarski Jacek, Ważewski Tadeusz), Zesz. nauk. Uniw. Jagiell., 1955, № 3, 5—14 (польск.; рез. русск., англ.)

Дается точный вывод уравнения колебаний струны в общем случае, когда колебания каждой точки струны описываются пространственным вектором (x^1, x^2, x^3). На основе линейного закона Гука для функций x^1, x^2, x^3 получается система нелинейных уравнений в частных производных; эта система линейна для строго продольных колебаний. При известных предположениях рассматривается также вопрос о допустимости линеаризации. Б. В. Боярский

3034. Характеристика всюду регулярного решения приведенного волнового уравнения. Оуэнс (A characterization of the everywhere regular solution of the reduced wave equation. Owens O. G.), Trans. Amer. Math. Soc., 1958, 88, № 2, 388—399 (англ.)

Устанавливается теорема: Пусть $u(x, y) \in C^2$ и всюду удовлетворяет уравнению

$$\Delta u + u = 0; \tag{1}$$

пусть равномерно по θ

$$\int_0^\infty u\,d\tau = F(\theta), \tag{2}$$

$u \equiv u(x, y) = u(r\cos\theta, r\sin\theta)$, $F(\theta + 2\pi) = F(\theta)$ и $F(\theta)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\alpha > 1/2$. Тогда задача (1), (2) имеет единственное решение и оно представимо в форме

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\varphi)\,E(r, \varphi - \theta)\,d\varphi,$$

где

$$E(r, \psi) = \cos(r\sin\psi) + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(r\sin(z + \psi)) + \sin(r\sin(z - \psi))}{\sin z}\,dz.$$

М. Н. Олевский

3035. О некоторых краевых задачах для почти линейных нормальных параболических уравнений. Пискорек (Sur certains problèmes aux limites pour l'équation semi-linéaire parabolique normale. Piskorek A.), Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1958, **6**, № 8, 505—510, XL—XLI (франц.; рез. русск.)

Рассматривается смешанная задача для параболического уравнения

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{k=1}^{n} b_k\frac{\partial u}{\partial x_k} + cu - \frac{\partial u}{\partial t} = F\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$$

в конечной области с границей S^n при краевом условии $\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_S = \varphi(x, t, u)$ и начальном условии $u|_{t=0} = \psi(x)$. Функции

$$a_{ij}(x, t),\ b_k(x, t),\ c(x, t),$$

$$\varphi(x, t, u),\ f(x, t, u, v_1, \ldots, v_n)$$

предполагаются удовлетворяющими условию Гёльдера. С помощью принципа неподвижной точки Шаудера доказывается существование решения. Д. М. Эйдус

3036. О теореме существования для параболических уравнений второго порядка. Нелсон (An existence theorem for second order parabolic equations. Nelson Edward), Trans. Amer. Math. Soc., 1958, 88, № 2, 414—429 (англ.)

Методами теории вероятностей доказывается следующее предложение: Пусть $a^{ij}(x)$, $b^i(x)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ — вещественные функции класса C^2, определенные в области X n-мерного евклидова пространства точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$, и пусть форма $\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\alpha_i\alpha_j$ симметрична и положительно определена. Обозначим через $B(X)$ банахово пространство измеримых ограниченных функций $f(x)$ с нормой $\|f\| = \sup_{x\in X} |f(x)|$. Существует полугруппа линейных операторов P^t $(t \geqslant 0)$, определенная на $B(X)$ такая, что

$$\|P^t f\| \leqslant \|f\|, \qquad (f\in B(X))$$

$$P^t f \geqslant 0 \quad \text{при} \quad f \geqslant 0 \qquad (f\in B(X))$$

и для любой функции $f(x)$ класса C^2, равной нулю в пограничной полоске области X,

$$\lim_{t\to+0} \frac{P^t f - f}{t} = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

равномерно относительно $x\in X$. Л. Н. Слободецкий

3037. Краевые задачи для вырождающихся параболических уравнений. Макаренко Г. И., Тр. Моск. энерг. ин-та, 1956, вып. 28, 5—24

В цилиндре $Q = D \times (0, l)$ $(x = (x_1, \ldots, x_n)\in D,\ 0 < t < l)$ рассматривается первая краевая задача для параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}(x, t)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x, t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x, t)u = h(x, t),$$

вырождающегося либо на начальной плоскости (при $t = 0$), либо на части боковой поверхности цилиндра Q. В первой главе доказывается существование обобщенного в смысле соответствующего интегрального тождества решения в случае степенного вырождения относительно t на начальной плоскости. Полученные результаты распространяются на некоторые параболические системы 2-го порядка. Во второй главе рассматривается случай степенного относительно расстояния по нормали вырождения на боковой поверхности цилиндра.

Л. Н. Слободецкий

3038. О некоторых краевых задачах для уравнения $\partial u/\partial t = \Delta u + F$. Куликов Н. П., Уч. зап. Балашовск. гос. пед. ин-та, 1958, 3, 149—164

Для уравнения

$$\partial u/\partial t = \Delta u + F(p, t) \qquad (1)$$

рассматриваются следующие краевые задачи.

Пусть D — некоторая конечная область трехмерного евклидова пространства, ограниченная поверхностью ζ, T — цилиндр $[P\in D] \times [t\in(-\infty, \infty)]$, T^+ — полуцилиндр $[P\in D] \times [t\in(0, \infty)]$, ζ_T, ζ_{T^+} соответственно их боковые поверхности.

Краевая задача без начального условия состоит в нахождении решения уравнения (1) в цилиндре T, удовлетворяющего условию

$$u|_{\zeta_T} = f(\sigma, t), \qquad \sigma\in\zeta.$$

Смешанной краевой задачей называется задача отыскания решения уравнения (1) в цилиндре T^+ при условиях

$$u|_{\zeta_{T^+}} = f(\sigma, t), \qquad \sigma\in\zeta, \quad t \geqslant 0;$$

$$u(P, 0) = \varphi(P), \qquad P\in D.$$

Решения следует, по-видимому, понимать в обобщенном смысле.

При определенных требованиях гладкости, налагаемых на функции F, f, φ и границу ζ, доказываются теоремы существования и единственности решения в классе $C^{(1)}(T^+)$ для второй из указанных задач и теорема существования в классе $C^{(1)}(T)$ — для первой задачи. Показано, что разность любых решений из $C^{(1)}(T)$ последней задачи, удовлетворяющих, для какого-либо вещественного λ, условию

$$|u(P, t)|e^{-\lambda t} \to 0 \quad \begin{matrix}\text{при } t\to\infty, & \text{если } \lambda > 0,\\ \text{при } t\to-\infty, & \text{если } \lambda < 0,\end{matrix}$$

принадлежит конечномерному подпространству в $C^{(1)}(T)$, зависящему от λ и образованному с помощью собственных функций краевой задачи $\Delta\varphi = \lambda\varphi$, $\varphi|_\zeta = 0$.

При исследовании краевой задачи без начального условия над функцией $u(P, t)$ выполняется преобразование Фурье по переменной t и изучаются краевые задачи Дирихле и Нёймана для уравнения $\Delta u = i\alpha u$, где α вещественно. Решения их, как устанавливается в работе, обладают рядом свойств, аналогичных свойствам гармонических функций. О. В. Гусева

3039. О классе единственности решения задачи Коши для уравнения в конечных разностях, аналогичного параболическому. Камынин (Mbi klasën e unicitetit të zgjidhjes se problemit Koshi për ekuacionin parabolik anolog me diferenca të fundme. Kaminin L. I.), Bul. Univ. shtëter. Tiranës. Ser. shkenc. natyr., 1958, 12, № 2, 22—28 (алб.; рез. франц.)

Рассматривается задача Коши

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = [a(x)u_{\bar{x}}]_x - b(x)u_x + c(x)u + f(x, t);$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x = \ldots, -h, 0, h, \ldots; \quad 0 < t \leqslant T,$$

где $u_x(x, t) = [u(x, t) - u(x-h, t)]h^{-1}$, $\inf a(x) > 0$, $\sup c(x) < \infty$. К этой задаче приводится задача Коши для соответствующего параболического уравнения при применении метода прямых. В предыдущих работах автор рассмотрел случай $b(x) \equiv 0$ и установил, что решение существует и единственно в классе функций, рост которых при $x \to \pm\infty$ ограничен определенной оценкой (экспоненциального типа). Здесь устанавливается аналогичная теорема для общего случая. Из нее, в частности, вытекает, что за счет выбора $b(x) > 0$ можно сделать этот класс единственности решения как угодно широким, включающим функции любого наперед заданного роста. В работе имеется много опечаток.

А. Д. Мышкис

3040. Стабилизация решений параболических уравнений. Вишик М. И., Люстерник Л. А., Докл. АН СССР, 1956, III, № 2, 273—275

В предыдущей статье авторов (РЖМат, 1958, 2920) получены критерии стабилизации решений нестационарных операторных уравнений к соответствующим решениям стационарных уравнений. На основании этих критериев в статье даются достаточные условия стабилизации решений смешанных задач с однородным краевым

условием для параболических уравнений к решениям соответствующих краевых задач для эллиптических уравнений.

Подробно разобран случай, когда эллиптический оператор с главной частью в виде оператора Лапласа содержит при старших производных зависящий от t малый параметр, вместе с производной определенным образом стремящийся к нулю при $t \to +\infty$, и случай первого краевого условия. При этом рассматриваются равномерная стабилизация и стабилизация „в среднем по сечению".

Указывается, что совершенно аналогично исследуется случай общего эллиптического оператора второго порядка и случай второго и третьего краевых условий. Кроме того, методы обобщаются на случай позитивного оператора более высокого порядка (например, сильно эллиптического).

Имеются опечатки. В формулировке теоремы I, случай 2) вместо условия $2r_1 > r_1$ должно быть $2r_1 < \varepsilon_1$.

А. П. Осколков

3041. Линейные параболические дифференциальные уравнения, содержащие малый параметр. Аронсон (Linear parabolic differential equations containing a small parameter. Aronson D. G.), J. Rational Mech. and Analysis, 1956, 5, № 6, 1003—1014 (англ.)

Рассматривается первая краевая задача для уравнения

$$L_\varepsilon(u) = \varepsilon u_{xx} + a(x, y)\, u_x - b(x, y)\, u_y + c(x, y)\, u = d(x, y), \qquad (1)$$

где $\varepsilon > 0$, $b(x, y) > m > 0$. Основной результат работы состоит в следующем. Пусть $\overline{R}$ — замкнутая область, ограниченная кривыми S_2 и S_3, отрезком S_1 прямой $y = y_1$ и отрезком S_4 прямой $y = y_2$ ($y_2 > y_1$). Изучается поведение при $\varepsilon \to 0$ в области R решений краевой задачи $L_\varepsilon(u) = d(x, y)$, $u \mid_{S_i} = \varphi_i$ ($i = 1, 2, 3$). Характеристиками уравнения первого порядка

$$a(x, y)\, u_x - b(x, y)\, u_y + c(x, y)\, u = d(x, y) \qquad (2)$$

являются интегральные кривые системы $dx/dt = -a(x, y)$, $dy/dt = b(x, y)$.

Пусть I — дуга S_i ($i = 1, 2, 3$) такая, что ни одна характеристика не касается I и все характеристики, начинающиеся на I, при возрастании t входят в R, а выходят из R в точках дуги J; при этом ни одна характеристика не касается J.

Замкнутая область, ограниченная I, J и двумя характеристиками, проходящими через концы дуги I, обозначается через M. Доказано, что в M $u(x, y; \varepsilon) = v(x, y) + z(x, y; \varepsilon) + O(\varepsilon)$, где $v(x, y)$ — решение уравнения (2), равное $u(x, y; \varepsilon)$ на I, $z = \varphi - v$ за $J \mid S_2 + S_3$, $z = e^{-\frac{f(x, y)}{\varepsilon}} \cdot h(x, y)$ вблизи $J \cap S_2 + S_3$ и $z = O(e^{-\frac{\delta}{\varepsilon}})$, $\delta > 0$ в остальной части M.

Результаты автора аналогичны результатам Левинсона для эллиптических уравнений с малым параметром.

Отметим, что эта же задача изучалась ранее в диссертации Е. П. Жидкова (МГУ, 1952), где получены близкие результаты.

С. Л. Каменомостская

3042. Задачи распространения тепла с принудительной конвекцией. Сестини (Problemi di propagazione del calore con convezione forzata. Sestini Giorgio), Riv. mat. Univ. Parma, 1957, 8, № 1-3, 5—14 (итал.)

В области S с границей FS рассматривается смешанная краевая задача

$$\frac{du}{dt} - k\Delta u = \sum v_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu + A,$$

$$u \mid_{t=0} = f, \quad \left(a\frac{\partial u}{\partial n} + bu\right)_{FS} = \varphi \qquad (1)$$

$$(a, b, k = \text{const} > 0).$$

Если известно решение задачи для случая, когда в правой части уравнения (1) стоит нуль, а также известна функция Грина этой „укороченной" задачи, то исходную задачу легко свести к интегро-дифференциальному уравнению, для которого естественный процесс последовательных приближений при определенных условиях гладкости сходится (РЖМат, 1958, 2078). В работе выписываются и преобразуются выражения для первого приближения в двух частных случаях, когда S представляет собой полупространство $c \equiv A \equiv 0$, а функции f и φ линейны.

А. Д. Мышкис

3043. Эквивалентные нелинейные задачи. Манн (Equivalent nonlinear problems. Mann W. Robert), J. Elisha Mitchell Scient. Soc., 1958, 74, № 2, 114—116 (англ.)

Рассматривается смешанная задача для уравнения $u_t = u_{xx}$ в области $x > 0$, $t > 0$ при начальном условии $u(x, 0) = 0$ и некотором нелинейном краевом условии. Существование и единственность решения, а также ряд его свойств доказано в более ранних работах автора. В реферируемой работе доказывается, что эта задача эквивалентна смешанной задаче для уравнения $v_t = v_{xx} + Cv_x^2$, где C — постоянная, в той же области при начальном условии $v(x, 0) = 0$ и некотором линейном краевом условии. Эквивалентность понимается в том смысле, что решение одной задачи выражается через решение другой. Тем самым устанавливается существование и единственность решения второй задачи. Аналогично доказывается, что краевая задача для уравнения $\Delta u = 0$ в области $0 < x < \pi$, $0 < y < \infty$ при некотором нелинейном краевом условии эквивалентна задаче для уравнения $\Delta V + C\,\text{grad}^2 V = 0$ с линейным краевым условием.

Д. М. Эйдус

3044. Об обобщенной проблеме излучения Вейнштейна. Либерстейн (On the generalized radiation problem of A. Weinstein. Lieberstein H. M.), Pacif. J. Math., 1957, 7, № 4, 1623—1640 (англ.)

Пусть T — область, ограниченная треугольником с вершинами $(0, 0)$, $(a, 0)$, $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$. Автор называет функцию $u(x, y)$ регулярной в T, если она имеет непрерывные производные до второго порядка включительно в некотором треугольнике G, внутренность которого содержит T и его стороны, исключая основание $y = 0$. Устанавливается следующая теорема для так называемой обобщенной проблемы излучения, рассматривавшейся Вейнштейном (РЖМат, 1958, 2076): при $k < 1$ и заданных функциях $f(x)$ и $g(x)$ возможно лишь одно решение уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу

$$u_{xx} = u_{yy} + \frac{k}{y} u_y, \qquad (1)$$

регулярное в T и удовлетворяющее условиям:

$$\lim_{y \to 0} u(x, y) = f(x), \qquad (2)$$

$$u(x, x) = g(x). \qquad (3)$$

Доказательство использует общее решение уравнения (1) в форме, указанной Дарбу и Блумом (РЖМат, 1955, 4438) и рекуррентные соотношения Дарбу—Вейнштейна, относящиеся к решениям уравнения (1) (РЖМат, 1955, 2207). Единственность решения задачи (1), (2), (3) устанавливается сначала для $-2 < k < 1$ и методом полной индукции распространяется на все значения $k < 1$.

М. Н. Олевский

3045. Об одном частном уравнении третьего порядка. Сачердоти (Su una particolare equazione del terzo ordine. Sacerdoti Silvana), Boll. Unione mat. ital., 1958, 13, № 1, 125—126 (итал.; рез. англ.)

Замечание о том, что уравнение $au_{ttt} - bu_{zzt} + cu_{tt} - du_{zz} = 0$ при условии, что постоянные a, b, c и d положительны и удовлетворяют равенству $ad = bc$ представимо в форме $\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{c}{a}\right)\left(u_{tt} - \frac{b}{a}u_{zz}\right) = 0$ и, следовательно, сводится к неоднородному волновому уравнению.
М. Н. Олевский

3046. Об уравнении Эйлера — Пуассона — Дарбу. **Вальтер** (Über die Euler-Poisson-Darboux-Gleichung. Walter Wolfgang), Math. Z., 1957, **67**, № 4, 361—376 (нем.)

Дается решение задачи Коши для уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу (ЭПД)

$$u_{rr} + \frac{k}{r}u_r = \Delta u, \qquad (1)$$

$$(\Delta u \equiv u_{x_1x_1} + \ldots + u_{x_nx_n}), \qquad (2)$$

$$u(x_1, \ldots, x_n, r)\,|_{r=0} = f(x_1, \ldots, x_n), \qquad (3)$$

$$\partial u/\partial r\,|_{r=0} = 0,$$

(k — действительное число) в предположении, что функция f — аналитическая по всем переменным. Далее доказывается, что решение задачи (1), (2), (3) в форме, данной Вейнштейном (РЖМат, 1955, 2207) при $k > n-1$ и $f \in C^2$ является таковым при $k > n+3$ в предположении, что f — непрерывная функция. Устанавливается также поведение $\partial u/\partial x_i$ при $r \to 0$ в случае $k \neq -1, -3, \ldots, -(2m+1), \ldots$ Автор обращает внимание на то, что известное доказательство теоремы единственности, относящейся к задаче (1), (2), (3) при $k \geqslant 0$ предполагает, что $\partial u/\partial x_i \to 0$ при $r \to 0$, что обычно не оговаривается (Курант—Гильберт, Методы математической физики, 1945, 2, 432). Несколько изменяя это доказательство, автор обнаруживает, что при $k > 0$ единственность решения (надлежащей гладкости) уравнения (1) обеспечивается уже одним условием (2); больше того, решение уравнения ЭПД ($k > 0$), которое при $r \to 0$ исчезает вместе с $\partial u/\partial x_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) и удовлетворяет условию $r^k \frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r\to 0} \to 0$, тождественно равно нулю при $r \geqslant 0$.
М. Н. Олевский

3047. Краевые задачи для параболических уравнений порядка $2n$. **Каттабрига** (Problemi al contorno per equazioni paraboliche di ordine $2n$. Cattabriga Lamberto), Rend. Semin. mat. Univ. Padova, 1958, 28, № 2, 375—401 (итал.)

Рассматривается краевая задача для уравнения $\frac{\partial^{2n}u}{\partial x^{2n}} + (-1)^n \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ в области, ограниченной отрезком γ_0 оси x и двумя непересекающимися кривыми γ_1 и γ_2, имеющими уравнения вида $x = \varphi_1(y)$ и $x = \varphi_2(y)$. Краевые условия задаются в следующем виде:

$$u\,|_{\gamma_0} = \psi_0(x), \quad \frac{\partial^i u}{\partial x^i}\Big|_{\gamma_j} = \psi_{ij}(y),$$

$$j = 1, 2, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Задача решается методами теории потенциала. С помощью полученных результатов, пользуясь методом Пини, автор доказывает теорему существования и единственности для уравнения

$$\sum_{i=0}^{2n} a_i(x, y)\frac{\partial^i u}{\partial x^i} + (-1)^n \frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y),$$

а также получает оценки для старших производных решения в пространстве функций, удовлетворяющих условию Гёльдера. Автор отмечает, что с помощью этих оценок можно получить теоремы существования и единственности для нелинейных параболических уравнений порядка $2n$.

Работа в целом обобщает результаты Пини, относящиеся к случаю $n=2$ (РЖМат, 1958, 9879).
Д. М. Эйдус

3048. Метод изменяющегося направления для решения бигармонического уравнения. **Конт, Деймс** (An alternating direction method for solving the biharmonic equation. Conte S. D., Dames R. T.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1958, 12, № 63, 198—205 (англ.)

Рассматривается вариант конечноразностного метода решения краевой задачи для бигармонического уравнения в квадрате $x, y \in [0,1]$, отличный от обычной схемы. В последней при решетке $x = kh$, $y = jh$, $h = \frac{1}{M}$ $k, j = 0, 1, \ldots, M$ нужно решать линейную систему $(M-1)^2$ уравнений относительно $(M-1)^2$ неизвестных значений аппроксимирующей функции в точках решетки.

Преимущество предлагаемого метода состоит в том, что при вычислении каждой итерации он требует решения $M-1$ систем, состоящих из $M-1$ уравнений каждая, относительно $M-1$ неизвестных — значений функции вдоль линий, параллельных попеременно осям x и y в n-й и $(n+1)$-й итерациях.
О. В. Гусева

3049. Продолжение бигармонических функций через дуги окружностей. **Брамбл** (Continuation of biharmonic functions across circular arcs. Bramble James H.) J. Math. and Mech., 1958, 7, № 6, 905—920 (англ.)

Пусть r, θ — полярные координаты плоскости. Точки $p(r, \theta)$ и $p'\left(\frac{a^2}{r}, \theta\right)$, $(a > 0)$ называются инверсными относительно окружности $r = a$. Пусть область D^* не содержит начала координат со всяким лучом $\theta = \text{const}$ пересекается по отрезку и состоит из пар инверсных точек. Через D обозначается часть D^*, в которой $r < a$. Пусть Q есть дуга окружности $r = a$, принадлежащая D^*. Доказываются четыре теоремы следующего типа: Если $w(x, y)$ является бигармонической в D и на Q удовлетворяет условиям: а) $w = w_r = 0$ (теорема 1); б) $w_{rr} + \frac{\sigma}{r}w_r = w = 0$ (теорема 2); в) $(\Delta w)_r + \frac{1-\sigma}{a^2}\left(w_{\theta\theta r} - \frac{1}{a}w_{\theta\theta}\right) = 0$, $\Delta w + \frac{1-\sigma}{\sigma}w_{rr} = 0$ (теорема 3); г) $(\Delta w)_r - \frac{1-\sigma}{a^3}w_{\theta\theta} = 0$, $w_r = 0$ (теорема 4), то w имеет бигармоническое продолжение в D^*, и в каждой из теорем дается явное выражение w в $D^* - D$ через значение w в D. В теоремах 2, 3, 4 σ обозначает произвольную постоянную, причем для $\sigma = 1$ и $\sigma = -3$ в теореме 3 продолжение не оказывается единственным. Доказанные в статье 10 лемм о связях между полигармоническими функциями в D^* имеют самостоятельный интерес.
Х. Л. Смолицкий

3050. Применение конечного интегрального преобразования с симметрическим ядром к решению одной системы дифференциальных уравнений. **Кузнецова Д. С.**, Уч. зап. Шуйск. гос. пед. ин-та, 1958, 6, 185—203

Рассматривается система

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A(t, x)\frac{\partial u}{\partial x} \qquad (1)$$

(где $u(t, x) = (u_1(t, x), \ldots, u_n(t, x))$, $A(t, x) = \|a_{ik}(t, x)\|$, $a_{ik} \in C^{(1)}$) в прямоугольнике $D\{0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ при

условиях:

$$u(0, x) = \varphi(x); \quad u(t, 0) = u(t, 1) = 0. \qquad (2)$$

Пусть $G(x, \xi)$ — замкнутое симметрическое положительно определенное ядро ($0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant \xi \leqslant 1$); ставится задача: по изображению $\overline{\varphi}(x) = \int_0^1 G(x, \xi)\varphi(\xi)\,d\xi$ функции $\varphi(x)$ найти изображение $\overline{u}(t, x)$ решения $u(t, x)$ задачи (1), (2), не находя $u(t, x)$. Для достижения этой цели выводится обобщенное интегральное уравнение, которому удовлетворяет функция $\overline{u}(t, x)$ (если существует $u(t, x)$). Далее рассматриваются два вспомогательных интегро-дифференциальных уравнения с малым параметром τ, которые аппроксимируют в некотором смысле уравнения для $u(t, x)$ и $\overline{u}(t, x)$; обозначим эти вспомогательные уравнения через (3) и (4) соответственно. Доказывается однозначная разрешимость уравнений (3) и (4) при каждом $\tau > 0$; затем устанавливается, что если решения уравнения (3) при $\tau \to 0$ сходятся вместе с производными по x, то решения уравнения (4) при $\tau \to 0$ сходятся к функции $\overline{u}(t, x)$.

Примечание референта. Результаты работы имеют условный характер, так как задача (1), (2), вообще говоря, является переопределенной. В работе встречаются опечатки. Так, в формулировке теоремы 4 должно быть: „$\overline{v}(\tau, t, x)$ при $\tau \to 0$ стремится к $\overline{u}(t, x)$.“

А. С. Калашников

3051. О краевых задачах для систем линейных эллиптических уравнений в частных производных. Маджонес, Стампаккья (Sur les problèmes aux limites pour les systèmes d'équations linéaires aux dérivées partielles elliptiques. Magenes E., Stampacchia G.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 85 (франц.)

Авторы рассматривают краевые задачи для линейных эллиптических уравнений в частных производных и для систем таких уравнений, используя результаты Гординга (Gårding), Вишика, Браудера (Browder), Ниренберга (Nirenberg), Лиона (Lions) и т. д., и получают некоторые результаты, относящиеся к существованию и регулярности решений на границе в случаях неоднородных краевых условий. Приведены также некоторые рассуждения о новой теории Соболева-Вишика тех же краевых задач.

3052. Изучение матрицы фундаментальных решений параболической системы уравнений в частных производных. Погожельский (Étude de la matrice des solutions fondamentales du système parabolique d'équations aux dérivées partielles. Pogorzelski W.), Ricerche mat., 1958, 7, № 2, 153—185 (франц.)

В слое $(0, T)$ $(0 < t < T)$ $n+1$-мерного евклидова пространства точек (X, t) $(X = (x_1, \ldots x_n))$ устанавливается существование фундаментальной матрицы для параболической системы вида

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} = \sum_{1 \leqslant j \leqslant N}^{k_1 + \ldots + k_n = M} A_{\alpha j}^{k_1, \ldots, k_n}(X, t) \frac{\partial^M u_j}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} +$$

$$+ \sum_{1 \leqslant j \leqslant N}^{1 \leqslant k_1 + \ldots + k_n < M} B_{\alpha j}^{k_1, \ldots, k_n}(X, t) \frac{\partial^{k_1 + \ldots + k_n} u_j}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} +$$

$$+ \sum_{1 \leqslant j \leqslant N} C_{\alpha j}(X, t)\, u_j$$

$$(\alpha = 1, 2, \ldots, N)$$

при меньших ограничениях на коэффициенты, чем в более ранних работах С. З. Брука (Докл. АН СССР, 1948, 60) и С. Д. Эйдельмана (РЖМат, 1956, 8844). Предполагается, что коэффициенты $A_{\alpha j}^{k_1, \ldots, k_n}(X, t)$ удовлетворяют условию Гёльдера по переменным X, t, а коэффициенты $B_{\alpha j}^{k_1, \ldots, k_n}(X, t)$ и $C_{\alpha j}(X, t)$ удовлетворяют условию Гёльдера только по X.

Л. Н. Слободецкий

3053. О явном интегрировании систем n квазилинейных уравнений с частными производными первого порядка, с $n+1$ неизвестными функциями двух независимых переменных. Гольдхаген (Despre integrarea explicită a sistemelor de n ecuații cu derivate parțiale cvasiliniare de ordinul întîi, cu $n+1$ funcții necunoscute de două variabile independente. Goldhagen E.), Studii și cercetări științ. Acad. RPR Fil. Iași. Mat., 1957, 8, № 1, 75—106 (рум.; рез. русск., франц.)

Автор исследовал в одноименной работе, помещенной в предыдущем томе этого же журнала (РЖМат, 1958, 8877), нормальные системы n квазилинейных уравнений первого порядка с частными производными $n+1$ неизвестных функций двух независимых переменных вида

$$\frac{\partial z_h}{\partial x} = A_h(x, y, z_k)\frac{\partial z_{n+1}}{\partial x} + \sum_{j=1}^{n+1} B_h^j(x, y, z_k)\frac{\partial z_j}{\partial y} +$$

$$+ C_h(x, y, z_k) \begin{pmatrix} h = 1, 2, \ldots, n \\ k = 1, 2, \ldots, n+1 \end{pmatrix},$$

допускающих явный интеграл

$$z_h = f^h(x, y, \varphi_{i,j}) \begin{pmatrix} h = 1, 2, \ldots, n+1 \\ i + j = 0, 1, \ldots, t \end{pmatrix}.$$

В этой статье пополняются уже полученные результаты тем, что добавляют данные, касающиеся случая, когда неизвестные функции связаны соотношением вида $F(x, y, z_k, \varphi_{l,m}) = 0$ $(l + m < t)$. Реферируемая статья, так же как и предыдущая, продолжает в некотором смысле работу автора (РЖМат, 1956, 7348), примыкающую к работам С. В. Валландера (РЖМат, 1953, 269; 1955, 1771).

D. Mangeron

3054. О задаче Коши для квазилинейных уравнений. Рождественский Б. Л., Докл. АН СССР, 1958, 122, № 4, 551—554

Обобщенным решением задачи Коши для системы квазилинейных уравнений

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_i(u_1, \ldots u_n, t, x)}{\partial x} = 0 \qquad (1)$$

называются такие функции $u_i(t, x)$, которые принимают заданные значения на начальной прямой $t = 0$ и удовлетворяют интегральным соотношениям $\oint_C u_i(t, x)\,dx - \varphi_i(u, t, x)\,dt = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, где $u = \{u_1, \ldots, u_n\}$, C — любой кусочно-гладкий замкнутый контур, целиком лежащий в области $t \geqslant 0$. В статье указан метод, позволяющий свести вопрос о единственности обобщенного (разрывного) решения задачи Коши для системы (1) к вопросу о единственности непрерывного решения задачи Коши для некоторой системы нелинейных уравнений. Такая редукция позволяет доказать теорему о единственности обобщенного решения для системы квазилинейных уравнений. Метод иллюстрирован на примере одного уравнения при некоторых условиях на функцию φ и разрывы решения.

В. Э. Аболиня

3055. О единственности обобщенного решения задачи Коши для систем квазилинейных уравнений гиперболического типа. Рождественский Б. Л., Докл. АН СССР, 1958, 122, № 5, 762—765

Методом, изложенным в предыдущей работе (реф. 3054), доказана единственность в классе кусочно-непрерывных и кусочно-гладких обобщенных решений задачи Коши для консервативной системы двух квазилинейных урав-

нений вида (1) при некоторых условиях на функции φ_i и разрывы решения. Указано, что применяемый метод является общим и не зависит от числа уравнений.

В. Э. Аболиня

ПРИЛОЖЕНИЯ К ФИЗИКЕ, ТЕХНИКЕ И ЕСТЕСТВЕННЫМ НАУКАМ

Редакторы *В. В. Немыцкий, А. Г. Свешников, Н. И. Мозжерова*

3056. Исследования по теории особых траекторий системы свободных материальных точек. Соколов Ю. Д., Укр. матем. ж., 1959, 11, № 1, 3—15 (рез. франц.)

Автор излагает результаты своих исследований, обобщающих классическую теорию соударений в задаче трех тел на случай взаимодействия внутренних сил между n материальными точками, пропорциональных их массам и некоторой функции их взаимных расстояний, удовлетворяющей достаточно общим условиям.

Г. А. Мерман

3057. Два случая интегрируемости задачи двух тел переменной массы и их применение к изучению движения в сопротивляющейся среде. Гельфгат Б. Е., Бюл. Ин-та теор. астрон. АН СССР, 1959, 7, № 5, 354—362 (рез. нем.)

Рассматривается задача двух тел переменной массы, изменяющейся по закону $\frac{dM}{dt} = \alpha M^n$, где M — масса, t — время, α, n — постоянные. Сводятся к квадратурам два новых случая: $n=0$ и $n=3/2$, отличные от известных случаев Мещерского ($n=2$ и $n=3$). Случай $n=0$ путем введения новой независимой переменной h, которая при постоянной массе имеет смысл постоянной живых сил, сводится автором к линейному уравнению третьего порядка с коэффициентами, зависящими от h, решающемуся в бесселевых функциях. Случай $n=3/2$ путем преобразования подобия сводится к предыдущему. Дается качественное исследование полученных решений. К тому же случаю $n=0$ приводится задача о движении материальной точки в неграватирующей сопротивляющейся среде постоянной плотности под действием центрального тела постоянной массы при сопротивлении, пропорциональном скорости.

Примечание референта. Качественные результаты (например, о постоянстве эксцентриситета), полученные в работе, относятся к системе элементов, определяемых мгновенными значениями координат, скоростей и массы. Последнее условие отличает их от обычных оскулирующих элементов небесной механики, на которые выводы автора не могут быть перенесены без дополнительного исследования.

Г. А. Мерман

3058. Исследования условий существования периодических решений третьего сорта задачи трех тел. Гремийар (Recherches sur les conditions d'existence de solutions périodiques de la troisième sorte du problème des trois corps. Grémillard Jean), Bull. Astron., 1959, 22, № 3, 221—242 (франц.; рез. англ., нем., русск.)

Автор приводит в одну систему, сравнивает и дополняет исследования Пуанкаре и Цайпеля, относящиеся к периодическим решениям третьего сорта в задаче трех тел, а также рассматривает вопрос о существовании периодических решений с произвольными «наклонными» в зависимости от четности числа $p-q$, где p/q — отношения средних движений. Работа состоит из введения, семи глав и заключения. В настоящий номер вошли лишь введение, глава I («Периодические решения системы дифференциальных уравнений по Пуанкаре») и глава II («Канонические уравнения задачи трех тел»).

Г. А. Мерман

3059. О движении материальной точки внутри неоднородного гравитирующего трехосного эллипсоида. Абалакин В. К., Бюл. Ин-та теор. астрон. АН СССР, 1959, 7, № 5, 327—353 (рез. англ.)

Рассматривается движение материальной точки внутри гравитирующего неоднородного трехосного эллипсоида. Используется полученное в начале статьи разложение силовой функции такого эллипсоида на внутреннюю точку. В предположении, что эллипсоид мало отличается от сферы, автор вводит в задачу малый параметр так, что вторые эксцентриситеты эллипсоида пропорциональны этому параметру. Затем к дифференциальным уравнениям движения материальной точки внутри эллипсоида применяется метод Пуанкаре. Изучается порождающее периодическое решение упрощенных уравнений, получающихся при значении параметра, равном нулю. Затем ищутся периодические решения точных уравнений, близкие к порождающим решениям. Найденные периодические решения описывают движение точки в плоскости, произвольно наклоненной к экватору.

Г. Н. Дубошин

3060. К вопросу установления характера границ устойчивости в «малом» сложных напорных гидравлических систем. Симонов-Емельянов Ю. А., Изв. Карельск. и Кольск. фил. АН СССР, 1958, № 4, 54—66

Рассматривается в обычной идеализации (постоянство мощности турбины, пренебрежение характеристиками напорного трубопровода) поведение на границе области устойчивости для трех сложных гидравлических систем: 1) с двумя последовательно расположенными уравнительными резервуарами на подводящей деривации; 2) с двумя уравнительными резервуарами, расположенными в конце подводящей и в начале отводящей деривации; 3) с двумя сходящимися напорными деривациями и одним уравнительным резервуаром. В табличной форме приводятся результаты расчетов первой ляпуновской величины для установок с заданными числовыми параметрами.

Н. Н. Баутин

3061. Замечания по поводу предыдущей статьи Говарда. Мозер (Remarks on the preceeding paper of Louis N. Howard. Moser J.), J. Math. and Phys., 1959, 37, № 4, 299—304 (англ.)

В упомянутой статье (там же, стр. 283—298) исследовалась гидродинамическая устойчивость уравнения Орра-Зоммерфельда для струи $(D^2-\alpha^2)^2\varphi = i\alpha R\,[(w-c)\,(D^2-\alpha^2)\,\varphi - w''\varphi]$, где $D=d/dy$, $w=ch^{-2}y$, c — собственное значение. Краевое условие: $\varphi(\pm\infty)=0$. Уравнение сводилось к интегральному, и решения представлялись в виде рядов по параметру α. В реферируемой работе доказана сходимость этих рядов при $|\alpha| \leqslant \rho_0 R^{-1}$ (ρ_0 — постоянная).

И. М. Соболь

3062. О вынужденной составляющей тока в простом колебательном контуре с периодически изменяющейся индуктивностью. Симонович Б. П., Изв. АН СССР. Отд. техн. н. Энерг. и автоматика, 1959, № 3, 165—170

Рассматривается воздействие гармонической э. д. с. на простой колебательный контур с индуктивностью, изменяющейся по гармоническому закону. Предложен способ, позволяющий найти амплитуды частотных составляющих тока в контуре путем последовательных приближений, и выведены необходимые расчетные формулы.

3063. К определению достаточных условий устойчивости в большом стационарных режимов одной простейшей энергосистемы. Аронович Г. В., Изв. высш. учебн. заведений. Радиофизика, 1959, 2, № 1, 134—138

Указывается метод определения устойчивости в большом стационарного режима одной простейшей энергосистемы. В качестве таковой рассматривается система из двух бездеривационных гидроэнергетических установок в условиях их параллельной работы в системе. Турбины

снабжены регуляторами с жесткой обратной связью. Метод сводится к понижению порядка системы дифференциальных уравнений задачи с последующим использованием метода Айзермана (Теория автоматического регулирования двигателей, М., Гостехиздат, 1952) определения устойчивости в большом динамических систем, содержащих линеаризуемые нелинейности. В. В. Немыцкий

3064. Упрощенный критерий устойчивости для линейной системы регулирования. Гаек (Vereinfachte Stabilitätskriterien für lineare Regelsysteme. Hajek J.), Regelungstechnik, 1959, 7, № 5, 170—174 (нем.; рез. англ.)

3065. Очерк теории оптимальных систем. Фельдбаум (Zarys teorii układów optymalnych. Feldbaum A. A.), Arch. automat. i telemech., 1959, 4, № 1,-51—74 (польск.; рез. русск., англ.)

Рассматривается задача оптимального по быстродействию регулирования при определенных ограничениях на характер переходного процесса, описываемого фазовыми переменными $X_i(t)$, например — при ограничениях $X_{i1} \leqslant X_i \leqslant X_{i2}$ или $|a_0 \frac{d^n X}{dt^n} + \ldots + a_n X| \leqslant M$. При этом обсуждается также проблема наискорейшего вывода выходной величины $X(t)$ объекта регулирования на заданный режим $X_0(t)$, поведение которого для будущих моментов времени t описывается, может быть, лишь статистически. Основное содержание статьи — описание методов синтеза оптимальных систем на базе известных основополагающих теорем автора (РЖМат, 1958, 7719). Наиболее подробно рассмотрен случай синтеза оптимальной системы с одним релейным входом $u(t)(u=\pm M)$. Описывается определение поверхности переключения функции u в фазовом пространстве системы и на этой основе — метод построения оптимальной управляющей части системы. Обсуждаются методы построения систем, имеющих сравнительно простую структурную схему, но достаточно близких к оптимальным. Статья завершается очерком об истории и тенденциях развития теории оптимального регулирования. Н. Н. Красовский

3066. Об алгебраических критериях устойчивости систем регулирования. Кремер, Эфферц (Über die algebraischen Kriterien für die Stabilität von Regelungssystemen. Cremer H., Effertz F. H.), Math. Ann., 1959, 137, № 4, 328—350 (нем.)

Обзор известных критериев Эрмита, Шура, Кона, Фудзивара, Рауса, Гурвица, Льенара и Шипара и др., связанных с расположением корней многочлена в комплексной плоскости. Выявляются новые связи между этими критериями. Даются некоторые дополнения и уточнения. В приведенном списке литературы (38 работ) отсутствуют советские работы по рассматриваемым вопросам, в частности обзоры-монографии М. Г. Крейна и М. А. Наймарка, Н. Н. Меймана, Н. Г. Чеботарева и Н. Н. Меймана, Ю. И. Неймарка (см. библиографию в конце книги референта „Теория матриц", 1953 г.). Ф. Р. Гантмахер

3067. О некоторых упрощенных критериях устойчивости нелинейных регулируемых систем. Беделькбаев А. К., Автоматика и телемеханика, 1959, 20, № 6, 689—701 (рез. англ.)

Для системы непрямого регулирования

$$\eta_s = \sum_{k=1}^{n} p_{sk}\eta_k + n_s\xi \qquad (s = 1, \ldots, n),$$

$$\dot{\xi} = f(\sigma), \quad \sigma = \sum_{s=1}^{n} j_s\eta_s - r\xi,$$

где $f(\sigma) = h\sigma + \varphi(\sigma)$ и корни характеристического уравнения $|p_{sk} - \delta_{sk}\lambda| = 0$ имеют отрицательные вещественные части, функция Ляпунова, решающая вопрос асимптотической и абсолютной устойчивости, строится в виде $V = Q + \int_0^{\sigma} \varphi(\sigma)d\sigma$. При этом квадратичная форма $Q = \sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \sigma_{sk}\eta_s\eta_k$ находится так, чтобы с использованием уравнений $\dot{\eta}_s = p_{s1}\eta_1 + \ldots + p_{sn}\eta_n$ $(s = 1, \ldots, n)$ имели $\dot{Q} = -\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{sk}\eta_s\eta_k$, где произвольные элементы матрицы $\| a_{sk} \|$ подчинены лишь неравенствам Сильвестра, гарантирующим определенную отрицательность функции $\dot{Q}$. Основываясь на результате И. Г. Малкина (Прикл. матем. и механ., 1952, 16, вып. 2), автор показывает, что коэффициенты σ_{sk} могут быть, минуя корни характеристического уравнения, выражены лишь через постоянные p_{sk}, a_{sk}. Для бо́льшей конструктивности выведенного критерия устойчивости матрица $\| a_{sk} \|$, в частности, берется к виде матрицы Гурвица линейной части исходной системы. При другом выборе элементов матрицы $\| a_{sk} \|$ с помощью разрешающих соотношений $2\sigma_{sk} + q_k = 0$ $(k = 1, \ldots, n)$, где $q_k = j_1p_{1k} + \ldots + j_np_{nk}$ находятся иные условия устойчивости. Кроме того, для несколько преобразованной исходной системы непрямого регулирования с помощью функции Ляпунова $V = \sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \sigma_{sk}\eta_s\eta_l + \frac{1}{2}\sigma^2$ устанавливаются другие критерии устойчивости. Полученные результаты теории иллюстрируются на ряде конкретных примеров. В заключение даются рекомендации по выбору параметров регулируемой системы, в которых условия устойчивости связываются с вопросом о наилучшем качестве регулирования. Р. А. Спасский

3068. Об одном способе определения переходной составляющей движения автоматической системы при произвольном возмущении. Чинаев П. И., Изв. АН СССР. Отд. техн. н. Энерг. и автоматика, 1959, № 3, 160—164

Часто возникает необходимость так предварительно подготовить задачу, чтобы можно было получить переходную составляющую решения неоднородного дифференциального уравнения при нулевых условиях как решение однородного уравнения при эквивалентных нулевых начальных условиях. Ниже излагается способ определения переходной составляющей движения путем перехода от передаточной функции $W(D)$ с нулевыми начальными условиями к оператору $K(D)$ (Тр. Всес. совещ. по теории автомат. регулирования. 2., Изд-во АН СССР, 1955) при произвольном внешнем возмущении $f(t)$; предполагается, что $f(t)$ — произвольная аналитическая функция. Резюме автора

3069. Об одном критерии устойчивости нелинейных регулируемых систем. Чжан Сы-ин, Автоматика и телемеханика, 1959, 20, № 5, 669—672

Для системы непрямого регулирования

$$\dot{x}_k = -\rho_k x_k + f(\sigma),$$

$$\dot{\sigma} = \sum_{k=1}^{n+1} \beta_k x_k - r'f(\sigma) \quad (k = 1, \ldots, n+1),$$

где $\rho_1 > 0, \ldots, \rho_{n+1} > 0$ или $\rho_1 = 0$, $\rho_2 > 0, \ldots, \rho_{n+1} > 0$, в полученном А. М. Летовым критерии устойчивости

$$4r'R > \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(1 + R\beta_k)^2}{\rho_k}$$

произвольная положительная постоянная R выбрана автором статьи такой, что ей соответствует наиболее широкая, при данном построении функции Ляпунова, область устойчивости, характеризующаяся неравенством

$$\left(2r' - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\beta_k}{\rho_k}\right)^2 : \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{\beta_k^2}{\rho_k}\right) > \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\rho_k}.$$

В приложении выведенного упрощенного критерия к двум задачам Булгакова во втором случае получаются условия устойчивости, несколько отличные от ранее найденных методом А. И. Лурье. Р. А. Спасский

3070. К вопросу об устойчивости нелинейных регулируемых систем. Розенвассер Е. Н., Автоматика и телемеханика, 1959, 20, № 6, 702—707 (рез. англ.)

Для системы прямого регулирования

$$\dot{x}_k = \sum_{\alpha=1}^{n} b_{k\alpha} x_\alpha + h_k f(\sigma),$$

$$\sigma = j_1 x_1 + \ldots + j_n x_n \quad (k = 1, \ldots, n)$$

производится анализ и сравнение двух типов условий устойчивости

$$-2a_\rho \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{a_\alpha}{\lambda_\alpha + \lambda_\rho} + \gamma_\rho = 0, \qquad (1)$$

$$2a_\rho \sqrt{r} - 2a_\rho \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{a_\alpha}{\lambda_\alpha + \lambda_\rho} + \beta_\rho = 0 \qquad (2)$$

$$(\rho = 1, \ldots, n; \quad \beta_\rho = \lambda_\rho \gamma_\rho,$$

$$r = -(j_1 h_1 + \ldots + j_n h_n),$$

полученных после построения функции Ляпунова в одном из двух видов:

$$V = \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} \frac{a_\alpha a_\beta}{\lambda_\alpha + \lambda_\beta} z_\alpha z_\beta,$$

$$V = \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} \frac{a_\alpha a_\beta}{\lambda_\alpha + \lambda_\beta} z_\alpha z_\beta - \int_0^\sigma f(\sigma)\, d\sigma.$$

Установлено, что неравенство $\sum_{\rho=1}^{n} \frac{\beta_\rho}{\lambda_\rho} + r > 0$, являясь необходимым условием разрешимости уравнений (2), полученных для системы непрямого регулирования, не является обязательным требованием разрешимости таких же квадратных уравнений (2), полученных для системы прямого регулирования. При одновременном использовании критериев (1), (2) для системы

$$\dot{x}_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + h_1 f(\sigma),$$

$$\dot{x}_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + h_2 f(\sigma),$$

$$\sigma = j_1 x_1 + j_2 x_2$$

получена весьма широкая область асимптотической устойчивости.

Показано также, что нулевое решение уравнения

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx + \varphi(x) = 0$$

асимптотически устойчиво при $a > 0$, $b > 0$, $x\varphi(x) > 0$, $\varphi(0) = 0$. Р. А. Спасский

3071. Об устойчивости положений равновесия релейных систем. Аносов Д. В., Автоматика и телемеханика, 1959, 20, № 2, 135—149 (рез. англ.)

Рассматривается устойчивость положения равновесия релейной системы

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + k_i \operatorname{sign} x_1 \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (1)$$

Непосредственный анализ ведется над формальной записью релейной системы, которая получается из (2) исключением переменных $x_2, x_3, \ldots, x_n$;

$$K(p)\, x_1 + ML(p) \operatorname{sign} x_1 = 0, \qquad (2)$$

M — число, p — оператор дифференцирования $K(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots$, характеристический многочлен матрицы коэффициентов $\| a_{ik} \|^n$ линейной части системы (1) $L(p) = p^{h-r} + b_1 p^{n-r-1} + \ldots$ — многочлен $| n - r |$-й степени. Не исключается $L(p) \equiv 0$.

Доказывается следующий критерий устойчивости положения равновесия $(0, 0, \ldots, 0)$ системы (1). В случае $r = 1$ для устойчивости необходимо, чтобы было $M > 0$ и чтобы многочлен $L(p)$ не имел корней справа от мнимой оси, и достаточно, чтобы, сверх того, корни многочлена находились слева от мнимой оси.

В случае $r = 2$ к этим необходимым условиям добавляется еще условие $a_1 \geqslant b_1$, а к достаточным — условие $a_1 > b_1$. В случае $r \geqslant 3$ или $L(p) \equiv 0$ всегда имеет место неустойчивость.

Так как правые части системы (1) при $x_1 = 0$ разрывны, движение точек, находящихся в начальный момент на гиперплоскости $x_1 = 0$ не определяется системой дифференциальных уравнений (1).

Для общего изучения поведения траектории вблизи положения равновесия дается следующее математическое определение релейной системы.

Рассматривается система, траектории которой при $x_1 \neq 0$ совпадают с траекториями системы (1), а при $x_1 = 0$ происходит либо непосредственное склеивание траектории, либо переход к траектории скользящего режима, когда фазовая точка находится в полосе

$$k_1 < \sum_{j=2}^{n} a_{1j} x_j < -k_1, \quad x_1 = 0,$$

а сами траектории скользящего режима описываются системой уравнений

$$x_1 = 0,$$

$$\dot{x}_i = \sum_{j=2}^{n} a_{ij} x_j - \frac{k_i}{k_1} \sum_{j=2}^{n} a_{1j} x_j \quad (i = 2, 3, \ldots, n).$$

Релейная система невырожденным преобразованием

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} y_j \quad (c_{ij} = \delta_{ij}, \ j = 1, 2, \ldots, n) \qquad (3)$$

приводится к виду (y_i снова обозначается через x_i)

$$\dot{x}_i = \begin{cases} x_{i+1} & \text{при } i < r \text{ (при } r = 1 \text{ эти уравнения отпадают),} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{rj} x_j + k \operatorname{sign} x_1, & \text{при } i = r, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & \text{при } i > r \text{ (при } r = n \text{ эти уравнения отпадают)} \end{cases} \qquad (4)$$

и в случае $L(p) \equiv 0$ к виду

$$\dot{x}_i = \begin{cases} x_{i+1} & \text{при } i < h, \\ \sum_{j=1}^{h} a_{hj} x_j & \text{при } i = h, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + k_i \operatorname{sign} x_i & \text{при } i > h. \end{cases} \quad (5)$$

Критерий устойчивости автор доказывает, используя инвариантность системы (2) относительно преобразования (3), а также применяя основные теоремы второго метода Ляпунова об устойчивости и неустойчивости к системам (4) и (5). Д. Л.

3072. Об устойчивости нелинейных систем автоматического регулирования. Комарницкая О. И., Прикл. матем. и механ., 1959, 23, № 3, 505—514

Используя метод И. Г. Малкина (Прикл. матем. и механ., 1951, вып. 1, 15) построения функции Ляпунова и удачно выбирая элементы матрицы квадратичной формы, входящей в полную производную от функции Ляпунова, автор получил в развернутом виде условия асимптотической и абсолютной устойчивости системы непрямого регулирования

$$\dot{x}_i = \lambda_i x_i + f(\sigma),$$

$$\dot{\sigma} = \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_n x_n - rf(\sigma) \quad (i = 1, \ldots, n),$$

в которой $R e \lambda_i < 0$. В частности, при $\lambda_1 < 0, \ldots, \lambda_n < 0$ они таковы:

$$\beta_i \leqslant -\lambda_i r \begin{cases} \beta_k < -\lambda_k r & (\beta_i < 0) \\ \beta_k < -\lambda_k \left(r + \sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_i}{\lambda_i} \right) & (\beta_i \geqslant 0) \end{cases}$$

$(k = 1, \ldots, n; \quad i = 1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n).$

Для системы прямого регулирования с помощью того же метода в случае наличия нулевых корней или простых относительно элементарных делителей соответствующей характеристической матрицы, или имеющих только вторую кратность относительно элементарных делителей, найдены критерии устойчивости, отличные от известных.

При этом по аналогии с рассуждениями референта (РЖМат, 1955, 722) для случая нескольких нулевых корней второй кратности относительно элементарных делителей установлены необходимые, а также необходимые и достаточные условия единственности положения равновесия регулируемой системы, что выясняет вопрос о наименьшем числе регулирующих органов для приведенного случая.

Следует отметить, что в окончательных записях условий устойчивости первых трех разобранных в статье случаях регулируемой системы и в примере к последнему случаю имеются опечатки. Р. А. Спасский

3073. Метод определения оптимальных параметров сложных линейных систем регулирования. Орурк И. А., Сб. Ленингр. ин-та инж. ж.-д. трансп., 1958, вып. 161, 43—61

Рассматривается задача выбора параметров линейной системы, исходя из требования, чтобы переходный процесс в этой системе по возможности мало отличался от некоторого наперед заданного режима $x = x(t)$, который можно считать оптимальным в определенном смысле (min перерегулирования, max затухания и т. д.). Автор рекомендует решать задачу численным интегрированием интегральных уравнений, описывающих переходный процесс. Даются рекомендации рационального порядка вычислений и подбора параметров. Строгий качественный анализ метода не приводится. Методика расчетов иллюстрируется на численном примере. Н. Н. Красовский

3074. Рост населения под влиянием случайного рассеяния. Ландал (Population growth under the influence of random dispersal. Landahl H. D.), Bull. Math. Biophys., 1957, **19**, № 3, 171—186 (англ.)

Пусть $n(\rho, t)$ — плотность населения в момент t на расстояние ρ от начала координат, $\alpha n - \beta n^2$ — скорость приращения n при отсутствии диффузии и D — коэффициент диффузии. Тогда n удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \alpha n - \beta n^2 + D \nabla^2 n. \quad (1)$$

Рассматриваются кусочно-линейные относительно ρ приближения к решениям некоторых задач для этого уравнения. Разбирается также случай поглощающего барьера, случай отражающего барьера и случай двух областей с различными параметрами α, β, D. Пространство предполагается одномерным или двумерным, в почти во всех задачах предполагается наличие центральной симметрии. Согласие полученных приближений с точными решениями (в случаях, где такие известны) удовлетворительно. Г. К. Энгелис

3075. Неустановившиеся плоские течения политропного газа с прямолинейными образующими. Сидоров А. Ф., Яненко Н. Н., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1959, № 1, 187—198

Дается классификация нестационарных плоских течений политропного газа, имеющих прямолинейные характеристики. Уравнения гидродинамики имеют в данном случае вид:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{2} u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{2}{\gamma - 1} c \frac{\partial c}{\partial x_i} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{2}{\gamma - 1} \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \sum_{k=1}^{2} u_k \frac{\partial c}{\partial x_k} \right) + c \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0, \quad (2)$$

где u_i — составляющие скорости, c — скорость звука. Рассматриваются бегущие волны ранга 2, т. е. решения (1) — (2), для которых ранг r матрицы $\frac{\partial (c, u_1, u_2)}{\partial (t, x_1, x_2)}$ равен 2. Между c, u_1, u_2 существует, следовательно, функциональная зависимость. Пусть она имеет вид:

$$c = \frac{\gamma - 1}{2} \theta(u_1, u_2) \quad (3)$$

(Функциональная зависимость вида $\varphi(u_1, u_2) = 0$ приводит лишь к простым волнам ($r = 1$) и коническим течениям). Из (3) вытекает существование двухпараметрического семейства линий уровня u_1, u_2 и c, уравнения которых можно записать в виде $dt = \frac{dx_1}{\Delta_1} = \frac{dx_2}{\Delta_2}$. Так как эти линии, по предположению, прямые, то в качестве параметров, определяющих их положение, можно выбрать величины $\alpha_i = x_i - \Delta_i t$ $(i = 1, 2)$. u_i, c, Δ_i суть функции α_j. Переходя в системе (1)—(2) к независимым переменным α_j, получаем переопределенную систему шести уравнений для u_1, u_2, линейную и однородную относительно производных $\partial u_i / \partial \alpha_j$. Вопрос сводится к исследованию этой системы в зависимости от ее ранга. Доказана теорема: в классе нестационарных плоских адиабатических движений газа ($\gamma \neq 2$) с прямолинейными характеристиками не существует вихревых течений, отличных от простых волн и конических течений. Показано, что этот класс течений состоит из 1) простых волн, 2) конических течений (прямолинейные характеристики образуют пучок в фазовом пространстве), 3) потенциальных течений (для функции $\theta(u_1, u_2)$ получается в этом случае дифференциальное уравнение второго порядка), 4) вихревых течений, существующих в газе с $\gamma = 2$. Н. Н. Кузнецов

3076. К вопросу о нестационарных плоских течениях политропного газа с прямолинейными характеристи-

ками. **Сидоров А. Ф., Яненко Н. Н.,** Докл. АН СССР, 1958, 123, № 5, 832—834.

Краткое изложение статьи (реф. 3075).

3077. **Некоторые неустановившиеся плоские течения газа. Станюкович К.П.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. 4. М., АН СССР, 1959, 113—114

3078. **Об одном точном плоском течении адиабатически-сжимаемого газа с критической точкой. Шварценбергер** (Über eine exakte, ebene, adiabatisch-kompressible Staupunktströmung. Schwarzenberger Rudolf), Z. angew. Math. und Mech., 1958, 38, № 7-8, 322 (нем.)

Рассмотрено стационарное дозвуковое обтекание параболы $y^2 = px$ потоком адиабатически-сжимаемого газа, движущимся в бесконечности параллельно оси x. Найдено точное решение этой задачи в плоскости годографа. Н. Н. Кузнецов

3079. **О точечном источнике в плоском и пространственном течениях сжимаемого газа. Кшивоблоцкий, Потсепп, Сарлас** (On plane and spatial source in compressible flow. Krzywoblocki M. Z. v., Pottsepp L., Saarlas M.), Istanbul tekn. üniv. bül., 1957, 10, № 2, 19—27 (англ.; рез. турецк.)

Получено приближенное выражение для потенциала и функции тока в случае точечного источника заданной мощности как для плоского, так и пространственного течения сжимаемого газа. Н. Н. Кузнецов

3080. **О дозвуковых газовых струях. Якоб К.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. 4. М., АН СССР, 1959, 241—244

3081. **Простые волны в установившемся вихревом плоском сверхзвуковом течении политропного газа постоянной энтропии. Коберн** (Simple waves in the steady rotational plane supersonic flow of a polytropic gas of constant entropy. Coburn N.), Michigan Math. J., 1958, 5, № 2, 129—137 (англ.)

Для течений газа, указанных в заглавии, найдены некоторые частные решения уравнений газодинамики, соответствующие вихревым движениям типа простых волн (прямолинейные характеристики). Метод заключается во введении системы координат, в которой прямолинейные характеристики являются координатными линиями, и последующем интегрировании уравнений движения. Н. Н. Кузнецов

3082. **Точное решение задачи о распространении взрывной волны в земных условиях. Рай** (An exact solution of a spherical blast wave under terrestrial conditions. Ray G. Deb), Proc. Nat. Inst. Sci. India, 1958, A24, № 2, 106—112 (англ.)

Рассматривается система уравнений, описывающая изэнтропическое течение за сферической ударной волной

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = 0,$$
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2u}{r}\right) = 0, \qquad (1)$$
$$\frac{\partial}{\partial t}(p\rho^{-\gamma}) + u\frac{\partial}{\partial r}(p\rho^{-\gamma}) = 0.$$

Решение этой системы ищется в виде:

$$u = \frac{r}{t}U(\eta), \quad p = r^{k+2}t^{\lambda-2}P(\eta),$$
$$\rho = r^k t^\lambda \Omega(\eta), \quad \eta = r^a t^b. \qquad (2)$$

Предполагается, что ударная волна движется с постоянной скоростью. Постоянные λ, κ, a, b выбираются так, чтобы выполнялось условие

$$\frac{b}{a} = \frac{\lambda - 2}{\kappa + 5}, \qquad (3)$$

например, автор выбирает

$$\kappa = -5, \quad \lambda = 2, \quad b = 1, \quad a = \mu - 1. \qquad (4)$$

При таком выборе постоянных решение (2) принимает вид:

$$\eta = \frac{t}{r^{1-\mu}}, \; u = \frac{r}{t}U(\eta), \; p = \frac{1}{r^3}P(\eta), \; \rho = \frac{t^2}{r^5}\Omega(\eta). \qquad (5)$$

В качестве внешних краевых условий берутся обычные условия Гюгонио:

$$u_1 = \frac{2V}{\gamma+1}\left(1 - \frac{1}{M^2}\right),$$
$$p_1 = \frac{p_0}{\gamma+1}[2\gamma M^2 - (\gamma - 1)], \qquad (6)$$
$$\rho_1 = \frac{(\gamma+1)\rho_0 M^2}{(\gamma-1)M^2 + 2}, \quad \text{где } M \text{ — число Маха.}$$

Для p/p_1, ρ/ρ_1 и u' получены выражения

$$\frac{p}{p_1} = c_1[r' - u'(1-\mu)]^{\frac{2}{\gamma-2}}[r'u'(1-\mu)]^{\frac{2}{\gamma-2}} \times$$
$$\times[\gamma u'(1-\mu) - r']^{\frac{1}{2-\gamma}}[f(r')]^{\frac{1}{\gamma-2}}, \qquad (7)$$
$$\frac{\rho}{\rho_1} = c_2[r' - u'(1-\mu)]^{\frac{\gamma}{\gamma-2}}[\gamma u'(1-\mu) - r']^{\frac{\gamma-1}{2-\gamma}} \times$$
$$\times [u'(1-\mu)]^{\frac{2-2\gamma}{2-\gamma}} r'^{-\frac{2}{2-\gamma}}[f(r')]^{\frac{1}{\gamma-2}}, \qquad (8)$$
$$2\log u' = \chi_1 \log r' + \chi_2 \log\left[r' - \frac{3\gamma-1}{2}u'\right] +$$
$$+\chi_3 \log[\gamma u'(1-\mu) - r'] + 2\log u_1' - \chi_2 \log\left[1 - \frac{3\gamma-1}{2}u_1'\right] -$$
$$-\chi_3 \log[\gamma u_1'(1-\mu) - 1]; \qquad (9)$$

где c_1 и c_2 — постоянные, определяемые из краевых условий; χ_1, χ_2, χ_3 зависят только от μ и γ, а $u_1' = \frac{u_1}{V}$. Формулы (7), (8), (9) и дают решение поставленной задачи, очевидно, применимое как к слабым, так и к сильным ударным волнам. В работе имеются опечатки. Ю. Я. Погодин

3083. **Предельные особенности в околозвуковом потоке газа. Часть I. Общая теория. Ладфорд, Шот** (Sonic limit singularities. Part I: General theory. Ludford G. S. S., Schot S. H.), Arch. Ration. Mech. and Analysis, 1958, 2, № 2, 160—172 (англ.)

Рассматривается плоское, установившееся, безвихревое течение идеального газа, функция тока которого ψ в плоскости годографа (q, ϑ) течения (q — величина скорости, ϑ — угол наклона вектора скорости) удовлетворяет известному уравнению Чаплыгина:

$$\psi_{qq} - (M^2 - 1)q^{-2}\psi_{\vartheta\vartheta} + (M^2+1)q^{-1}\psi_q = 0,$$

где $M^2 = q^2/a^2 = 2(\varkappa - 1)^{-1}q^2(1 - q^2)^{-1}$.

Предельными точками (линиями) авторы называют точки (линии) плоскости (q, ϑ) или их соответствующие изображения в физической плоскости (x, y) потока, в которых якобиан

$$I = \partial(x, y)/\partial(q, \vartheta) = [(M^2 - 1)\psi_\vartheta^2 - q^2\psi_q^2]\rho^{-2}q^{-3}$$

перехода от плоскости (q, ϑ) к плоскости (x, y) обращается в нуль.

В работе рассматриваются звуковые предельные точки обыкновенные (з. п. т. о.), звуковые предельные точки высшего порядка (з. п. т. в. п.) и звуковые предельные линии (з. п. л.), в которых $M=1$ $(q=q_t)$, $\psi_q=0$, $\psi_\vartheta\neq 0$; $M=1$, $\psi_q=\psi_\vartheta=0$; $M=1$, $\psi_q=0$; соответственно, и устанавливается ряд теорем о геометрии взаимного расположения этих элементов и сверхзвуковых предельных линий (с. з. п. л.) в плоскости годографа. Например:

Теорема 1. Всякая з. п. т. о. лежит на з. п. л. или на с. з. п. л. В случае з. п. т. в. п., в которой $\psi_{\vartheta\vartheta}\neq 0$ имеет место:

Теорема 8. Существуют лишь две различные с. з. п. л., выходящие из з. п. т. в. п. и образующие в ней острие 1-го рода в радиальном направлении (в направлении $\vartheta=\text{const}$).

Теорема 13. Если в з. п. т. в. п. $\psi_{\vartheta\vartheta\vartheta}\neq 0$, то линия тока $\psi(q, \upsilon)=c$ имеет в ней тройную точку, из которой выходят три ветви в дозвуковую сторону и одна в сверхзвуковую сторону, все — в радиальном направлении. Две ветви с дозвуковой стороны образуют острие 1-го рода.

Если в звуковой точке с. з. п. л. $\psi_\vartheta\neq 0$, то справедлива:

Теорема 14. С. з. п. л. единственна и касается звукового круга ($q=q_t$ в плоскости (q, ϑ)) в звуковой точке.

И. Л. Кароль

3084. **Предельные особенности в околозвуковом потоке газа. Часть II. Примеры. Ладфорд, Шот** (Sonic limit singularities. Part II. Examples. Ludford G. S. S., Schot S. H.), Arch. Ration. Mech. and Analysis, 1958, 2, № 2, 173—190 (англ.)

Приводятся примеры, иллюстрирующие результаты предыдущей статьи авторов (реф. 3083). Используются следующие частные решения уравнения Чаплыгина:

$$\psi(\tau,\vartheta)=P_n(\tau)\sin n\vartheta\equiv\tau^{n/2}H_n(\tau)\sin n\vartheta;\qquad \tau=q^2/q^2_{\max}, \tag{1}$$

где $H_n(\tau)$ в общем случае — комбинация гипергеометрических функций, удовлетворяющая уравнению

$$\tau(1-\tau)H_n''+[(n-1)-(n+1-\beta)\tau]H_n'+ n(n+1)\beta H_n/2=0,\qquad \beta=\tfrac{1}{2}(\varkappa-1)^{-1}$$

и условию: $dP_n/d\tau=d[\tau^{n/2}H_n(\tau)]/d\tau=0$ при „звуковом“ значении $\tau=\tau_t=(2\beta+1)^{-1}$.

Получены параметрические уравнения звуковых предельных линий (з. п. л.) этих решений, которые в плоскости (x, y) являются гипоциклоидами при $n>1$, эпициклоидами при $n<1$, циклоидами при $n=1$ и кругом при $n=0$. Получены уравнения и исследована форма сверхзвуковых предельных линий (с. з. п. л.) этих решений в плоскости (τ, ϑ), причем установлено, что две с. з. п. л., выходящих из одной звуковой предельной точки, не пересекаются на интервале $\tau_t<\tau<1$ при $n<n_0$ ($n_0>2$). Наряду со случаями $n=0$ (течение от источника) и $n=1$, исследованным в работе авторов (реф. 3083), подробно изучается форма и расположение з. п. л. и с. з. п. л. в течениях, определяемых решениями (1) при $n=2$ (обтекание газом прямого угла) и при $n=1/2$. В этих течениях плоскость годографа отображается на четырехлистную физическую плоскость, причем отдельные листы „склеиваются“ друг с другом вдоль з. п. л. и с. з. п. л. Путем суперпозиции решений (1) с $n=0$ и $n=1$, т. е. при

$$\psi=k\vartheta+\tau^{-1/2}[\gamma+(1-\tau)^{\beta+1}]\sin\vartheta,\qquad \gamma=-2[2\beta/(2\beta+1)]^{\beta}$$

и при соответствующем подборе постоянной k получено течение газа, имеющее изолированную з. п. л. В этом течении каждая полуплоскость $\vartheta>0$ и $\vartheta<0$ годографа отображается на двухлистную физическую плоскость, состоящую из дозвукового и сверхзвукового листов, „склеенных“ вдоль изолированной з. п. л.

И. Л. Кароль

3085. **Проникание тонкого заостренного тела вращения в неоднородную и слоистую жидкость. Багдоев А. Г.**, Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., механ., астрон., физ., химии, 1957, № 4, 45—48

Задача решается в линейной постановке. Предполагается, что плотность изменяется с глубиной по экспоненциальному закону

$$\rho=\rho e^{kz}.$$

Требуется определить функцию $p(r, z, t)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial z}=-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

в нижней полуплоскости (z — вертикальная, r — горизонтальная координаты) и условиям при $z=0$, $p=0$. При $r=0$, $z>-f(t)$:

$$\frac{\partial p}{\partial r}=-\rho\frac{d}{dt}\left(f'\frac{\partial r_k}{\partial z}\right).$$

Здесь f и $\dfrac{\partial r_k}{\partial z}$ — заданные функции времени, причем

$$\left(\frac{\partial r_k}{\partial z}\right)_{r=r+}=\left(\frac{\partial r_k}{\partial z}\right)_{r=r-}.$$

При $r=0$, $z<-f$ на оси oz функция должна быть непрерывна. К перечисленным условиям добавляется условие регулярности на ∞ и данные Коши.

Используя преобразование Лапласа и свои предыдущие результаты (Вестн. МГУ, 1957, № 2), автор выписывает решение задачи в общем виде. Более подробно исследуется случай погружения конуса $(r(t)=\pm az)$.

Н. Н. Моисеев

3086. **Распространение ударной волны в газе с бесконечной электропроводностью при наличии поперечного магнитного поля и поля тяготения. Бай** (Shock wave propagation in an infinitely electrically conductive gas with transverse magnetic field and gravitation. Bai S. I.), Z. angew. Math. und Mech., 1959, 39, № 1-2, 40—49 (англ.; рез. нем., франц., русск.)

Изучается поведение ударной волны в газе с бесконечной электропроводностью при наличии поперечного магнитного поля и поля тяготения. Ударная волна возбуждается в неподвижном газе телом, движущемся по заданному закону. Решается одномерная задача в гидродинамическом приближении. Эффекты вязкости и теплопроводности не учитываются. Пусть движение газа в переменных Лагранжа описывается функцией

$$x=\varphi(s, t),$$

причем $x=s$ в области, в которую ударная волна еще не дошла. Уравнение движения и уравнение непрерывности в данном случае запишутся следующим образом:

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}(p+p_M)-g, \tag{1}$$

$$\rho\Phi=\rho_0, \tag{2}$$

где

$$p_M=\frac{\mu H^2}{2},\qquad \Phi=\frac{\partial\varphi}{\partial s}.$$

Уравнение состояния берется в виде:

$$p=p_1\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^{\gamma}. \tag{3}$$

К уравнениям (1), (2), (3) следует добавить условия скачка на фронте ударной волны

$$u_1 = \frac{1}{\gamma-1}\left[\frac{\gamma+3}{2}\xi - \frac{a_0^2}{\xi} - \frac{\gamma p_{\infty_0}}{\rho_0\xi} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\sqrt{\left[(\gamma-1)\xi + \frac{2a_0^2}{\xi} - \frac{2\gamma p_{\infty_0}}{\rho_0\xi}\right]^2 + 8(2-\gamma)(\gamma+1)\frac{p_{\infty_0}}{\rho_0}}\right],$$

$$p_1 = p_0 + \rho_0\xi u_1 + p_{\infty_0}[1-\Phi_1^{-2}],$$

$$H_1 = H_0\Phi_1^{-1},$$

здесь

$$a^2 = \gamma RT - \frac{\mu H^2}{\rho}.$$

$\xi = \xi(t)$ — скорость движения фронта ударной волны. Кроме того, требуется задать функцию $\varphi(0, t)$, которая определяет закон движения тела, создающего ударную волну. Автор указывает на возможность построения решения поставленной задачи с помощью степенных рядов. Подробно разбирается случай, когда $\varphi(0, t) = vt$, $H_0 = \text{const}$, $T_0 = \text{const}$. Показано, что наличие магнитного поля приводит к увеличению скорости ударной волны. Д. П. Костомаров

3087. Об аксиально-симметричном обтекании кольцеобразных тел потоком сжимаемого газа. Кшивоблоцкий (On axially symmetric flow through annular bodies in compressible flow. Krzywoblocki M. Z. v.), Istanbul tekn. üniv., bül., 1957, **10**, № 1, 60—83 (англ.; рез. турецк.)

Изучение обтекания полых тел вращения однородным потоком газа представляет интерес для аэродинамики. Течения такого рода можно моделировать с помощью линейных круговых источников и стоков, помещенных в однородный плоскопараллельный поток, так что одна из поверхностей тока приближенно совпадает с поверхностью тела. Ранее этот метод применялся в литературе к соответствующим течениям несжимаемой жидкости. В реферируемой статье он используется для приближенного рассмотрения сжимаемого газа.

Пусть полубесконечное полое тело вращения обтекается потоком газа, движущимся на бесконечности параллельно оси тела (ось z) со скоростью $-U$. Модель такого движения осуществляется одним кольцевым источником, помещенным в натекающий поток. В нулевом приближении потенциал равен $-Uz$ (тело тонкое), а следующее приближение (которым автор ограничивается) определяется в цилиндрических координатах r, θ, z уравнением

$$(1-M^2)\varphi_{zz} + \varphi_{rr} + \frac{1}{r^2}\varphi_{\theta\theta} + \frac{1}{r}\varphi_r = 0, \qquad (1)$$

где M — число Маха свободного потока.

Пусть $M < 1$ (дозвуковой поток). Решением (1), соответствующим точечному источнику, расположенному в точке $(b, \theta, 0)$, является с точностью до постоянной, зависящей от интенсивности источника, функция $(z^2 + b^2 + \lambda^2 r^2 - 2\lambda br\cos\theta)^{-1/2}$, где $\lambda = \sqrt{1-M^2}$. Поэтому в данном приближении потенциал рассматриваемого течения равен

$$\varphi = \frac{\text{const}}{r_1}K\left(k, \frac{\pi}{2}\right) - Uz,$$

где b — радиус источника, $r_1^2 = z^2 + (\lambda r + b)^2$, $k^2 = \frac{4b\lambda r}{r_1}$, K — полный эллиптический интеграл первого рода.

Пусть теперь $M > 1$ (сверхзвуковой поток). Решением (1), соответствующим точечному источнику в точке $(b, \theta, 0)$, является в этом случае функция, равная $\{z^2 - \mu^2[b^2 + r^2 - 2br\cos\theta]\}^{-1/2}$ (где $\mu^2 = M^2 - 1$), если $z \leqslant 0$ и выражение в фигурных скобках положительно (т. е. источник расположен внутри конуса Маха с вершиной в точке $(r, 0, z)$, и нулю в противном случае). Поэтому потенциал рассматриваемого течения равен

$$\varphi = -Uz + \text{const}\int_0^{\cdot}\frac{bd\theta}{\{z^2 - \mu^2[b^2 + r^2 - 2br\cos\theta]\}^{1/2}} \quad (z \leqslant 0),$$

где интеграл распространен на область источника, расположенную внутри указанного конуса Маха. Этот интеграл может быть представлен в виде, вообще говоря, неполного эллиптического интеграла первого рода с модулем $k = (4\mu^2 br R^{-2})^{1/2}$ и аргументом $\nu = -\arcsin[(\sqrt{2}\,k)^{-1}]$.

Автор подробно обсуждает полученные результаты и рассматривает ряд численных примеров. Н. Н. Кузнецов

3088. Прямой метод использования плоскости годографа в гидродинамике. Маккн (A direct method of using the hodograph plane in fluid dynamics. Mackie A. G.), Proc. Edinburgh Math. Soc., 1958, **11**, № 2, 107—114 (англ.)

Метод годографа в применении к течениям несжимаемой жидкости связан с конформными отображениями. Последние не могут быть непосредственно применены к рассмотрению сжимаемых жидкостей. Имея в виду прежде всего преподавание курса гидродинамики, автор обращает внимание на эту методическую непоследовательность и для ее устранения предлагает решать задачи, связанные с течением несжимаемой жидкости, также не прибегая к теории аналитических функций. В качестве примера рассмотрены некоторые из них: натекание струи на бесконечную стенку и на пластинку конечных размеров, вытекание жидкости из бесконечного резервуара и течение в бесконечном канале, в некотором месте которого скачком меняется ширина.

Рассмотрено также обобщение на случай дозвукового течения сжимаемого газа. Н. Н. Кузнецов

3089. Распад струи вязкой жидкости под воздействием несимметричных возмущений. Лышевский А. С., Изв. высш. учебн. заведений. Энергетика, 1959, № 3, 114—123

Рассматривается нестационарное движение плоской бесконечной струи вязкой несжимаемой жидкости в вязкой окружающей среде. Ось x направлена по оси струи. Составляющие скорости жидкости в струе записываются в виде $v_x = U + u_1$, $v_y = v_1$ ($U = \text{const}$) и в окружающей среде $v_x = u_2$, $v_y = v_2$. В уравнениях Навье — Стокса, записываемых отдельно для струи и внешней среды, отбрасываются члены, квадратичные относительно u_n, v_n. Строятся частные решения для функций тока $\psi^{(1)}$ и $\psi^{(2)}$ для струи и внешней среды в виде $\psi^{(n)} = F^{(n)}(y)\,e^{i(kx-\omega t)}$. Функции $F^{(n)}(y)$ зависят от y экспоненциально и содержат каждая четыре произвольных постоянных. Устанавливаются граничные условия на границе струи ($y = \pm a$) и при $y = \pm\infty$. Удовлетворяя граничным условиям (при предположении, что смещение точек границы струи по оси y имеет вид $h = \text{const}\cdot e^{i(kx-\omega t)}$) получают, в конечном счете, уравнение, связывающее k и ω. Это уравнение рассматривается при некоторых дополнительных упрощающих предположениях. Указывается, что качественные результаты, получающиеся из исследования этого уравнения, согласуются с данными эксперимента. Б. В. Русанов

3090. Исследования по гидродинамике вязкой жидкости. Киселев А. А., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. 4. М., АН СССР, 1959, 25

3091. Трехмерное, установившееся, радиальное течение вязкой, теплопроводной, сжимаемой жидкости. Сакуран (Three-dimensional steady, radial flow

of viscous, heat-conducting, compressible fluid. Sakurai Akira), Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1958, 11, № 3, 274—289 (англ.)

Рассматривается система уравнений Навье — Стокса в случае трехмерного, установившегося и радиального течения идеального газа с вязкостью μ и теплопроводностью λ. При условии постоянства λ, μ, c_p эта система приводится к виду:

$$z^2\frac{d^2u}{dz^2}+(2z-1)\frac{du}{dz}-2u=\frac{\gamma-1}{\gamma}\left\{\frac{d}{dz}\left(\frac{c_pT}{u}\right)-\frac{2}{z}\frac{c_pT}{u}\right\}, \quad (1)$$

$$c_pT+(1+2z)\frac{u^2}{2}=\frac{3}{4\sigma}z^2\frac{d}{dz}(c_pT)+z^2\frac{d}{dz}\left(\frac{u^2}{2}\right)+c_pT_0, \quad (2)$$

где $z=\frac{r}{r^*}$, r^* — некоторая постоянная, σ — число Прандтля, предполагаемое постоянным.

При введении новых безразмерных переменных $w=\frac{u}{c_1}$ и $\vartheta=\frac{T}{T_1}$ (c_1 — критическая скорость, определяемая условием $c_1^2=2\frac{\gamma-1}{\gamma+1}c_pT$; T_1 — значение T при $r=r_1$, когда $w=1$) и последующем исключении ϑ из системы (1), (2) получается основное уравнение для w:

$$aw^2\frac{d^2w}{dx^2}-(1-w^2)\frac{dw}{dx}+\frac{2}{x}w(1-\beta w^2)=0, \quad (3)$$

где $x=\frac{r_1}{r}$, $a=\frac{2\gamma}{\gamma+1}\alpha$, $\beta=\frac{\gamma-1}{\gamma+1}$, $\alpha=\frac{r_1}{r^*}$ — величина, обратная числу Рейнольдса.

Соответствующее (3) уравнение в двумерном случае имеет вид:

$$aw^2\frac{d^2w}{dt^2}-(1-w^2)\frac{dw}{dt}+w(1-\beta w^2)=0, \quad t=\log r. \quad (4)$$

Автор использует сходство уравнений (3) и (4), чтобы получить приближенное решение задачи. Так как решение уравнения (4) известно, то с его помощью находятся приближенные решения уравнения (3) в различных подобластях области изменения x, которые затем сшиваются с помощью известных методов теории пограничного слоя.

В результате качественного исследования уравнения (3) автор приходит к выводу, что решение этого уравнения при большом числе Рейнольдса состоит из невязких решений и ударных волн. Ю. Я. Погодин

3092. Определение поля давлений в кусочно-однородном пласте, состоящем из m-софокусных эллипсов, при наличии контура питания. Голубев Г. В., Уч. зап. Казанск. ун-та, 1957, **117**, № 9, 84—89

Указанная в заголовке задача рассмотрена в случае, когда контур питания также является софокусным эллипсом, а скважины расположены симметрично относительно оси x. Она решается в два этапа. Первый состоит в конформном отображении области течения на кольцевую область с непроницаемым ядром. Второй — в решении гидродинамической задачи в полученной кольцевой области. С помощью обобщенного потенциала простого слоя задача сводится к системе m интегральных уравнений Фредгольма второго рода относительно m неизвестных плотностей потенциала на границах зон с различной проницаемостью. Отыскивая эти плотности в виде рядов Фурье, автор приходит к системе линейных уравнений относительно коэффициентов этих рядов. Библ. 4 назв. В. Л. Данилов

3093. Об одном случае фильтрации двух малосжимаемых жидкостей через деформируемую пористую среду. Рубинштейн Л. И., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1959, № 1, 174—179

Рассматривается одномерная задача, являющаяся фильтрационным аналогом обратной задачи Стефана, при бесконечной длине пласта и заданной постоянной скорости продвижения границы раздела фаз. В этом случае P_1 определяется однозначно, после чего в аналитически замкнутой форме находится P_2 как решение задачи Коши, когда носительницей данных является заданная прямая $x=at$. М. Т. Нужин

3094. Лучевой метод вычисления интенсивности волновых фронтов. Бабич В. М., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. **4**. М., АН СССР, 1959, 116

3095. К теории отражения упругих волн от криволинейной границы. Скуридин Г. А., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. **4**. М., АН СССР, 1959, 122

3096. Контактные задачи теории упругости при динамическом воздействии прижимающей силы. Свекло В. А., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. **4**. М., АН СССР, 1959, 112—113

3097. К плоской задаче теории упругости для прямоугольной области. Абрамян Б. Л., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. **4**. М., АН СССР, 1959, 102

3098. Об одной форме общего решения однородных уравнений пространственной теории упругости. Смоловик И. И., Тр. Научн. конференции Сталинского пед. ин-та. Вып. 2. Кемерово, 1957 (1958), 360—363

Показывается, что бигармонические функции φ_l, удовлетворяющие условиям

$$\triangle^2\varphi_l=0,$$

$$\triangle\varphi_l=\frac{1}{1+\sigma}S,$$

где $S=X_x+Y_y+Z_z$, являются общим решением произвольной задачи теории упругости. И. П. Цай

3099. Теплопередача при ламинарном течении в цилиндрической трубе. Сингх (Heat transfer by laminar flow in a cylindrical tube. Singh S. N.), Appl. Scient. Res., 1958, **A7**, № 5, 325—340 (англ.)

Решается задача о теплопередаче при установившемся движении несжимаемой жидкости в круглой трубе. Уравнение для температуры $T(r, x)$ имеет вид:

$$u_x\frac{\partial T}{\partial x}=k\left(\frac{\partial^2T}{\partial x^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{\partial^2T}{\partial r^2}\right)+\mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial r}\right)^2+q,$$

k, μ — постоянные величины, u_x — скорость. Граничные условия задачи таковы:

$$T=T_s \quad \text{при } x>0,\ r=s \quad \text{(на стенке трубы)}$$

$$T=T_0 \quad \text{при } x=0,\ 0\leqslant r<s,$$

при $x\to\infty$ T есть решение уравнения

$$k\left(\frac{\partial^2T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial r}\right)^2+q=0.$$

Методом разложения в ряды по функциям Бесселя найдено решение при $u_x=\text{const}$ и для скорости в течение Пуазейля

$$u_x=A\left[1-\left(\frac{r}{s}\right)^2\right],\ A \text{ — постоянная.}$$

Результаты настоящей работы в значительной степени повторяют результаты Миллсапса и Польгаузена (Millsaps K., Pohlhausen K., Proc. confer. diff. equations, 271—294, Univ. Maryland Book store, 1956). На это указано автором в конце статьи.

В. П. Коробейников

3100. О поперечных колебаниях стержней. Флексер М. Ш., Прикл. матем. и механ., 1958, **22**, № 5, 696—697

Применяется преобразование Лапласа к известной системе уравнений С. П. Тимошенко, описывающей изгибные колебания стержня с учетом инерции вращения и влияния на прогиб перерезывающей силы.

Показывается, что последовательное применение теории Тимошенко к случаю, когда на стержень действует сосредоточенная сила, требует допущения о возможности образования угловой точки на упругой линии стержня. В связи с этим указывается на некорректность постановки граничных условий этой задачи в работе референта (Прикл. матем. и механ., 1948, № 3), где производная прогиба по координате считалась непрерывной. Это обстоятельство отмечалось и ранее в работе Денглера и Голанда (Dengler, Holland, Proc. of the first u. s. nat. congr. of Appl. Mech., 1951—1952, p. 179). Я. С. Уфлянд

3101. Задача о равновесии прямоугольного параллелепипеда, на основаниях которого заданы нормальные напряжения и касательные перемещения, а на боковой поверхности — напряжения. Валов Г. М., Научн. докл. высш. школы. Физ.-матем. н., 1958, № 4, 87—92

Предлагается метод решения классической задачи Ламе о напряженном и деформированном состоянии прямоугольного параллелепипеда в некоторых случаях смешанных условий на гранях его.

Решение задачи ведется в перемещениях путем интегрирования уравнений Ламе; общее решение их берется в форме данной П. Ф. Папковичем. Входящие сюда гармонические функции автор берет в виде двойных рядов, используя полное разделение переменных. Функции, входящие в граничные условия, разлагаются в ряды Фурье. В результате задача сводится к решению бесконечных систем линейных уравнений. Сделана ссылка на доказательство единственности решения, получаемого таким путем. М. М. Филоненко-Бородич

3102. Расчет массивных плит вариационным методом с применением разрешающих функций для перемещений. Милейковский И. Е. В сб.: Исслед. по вопр. теории пластичности и прочности строит. конструкций. М., 1958, 173—212

Статья содержит четыре раздела: 1. Сведения трех основных уравнений равновесия теории упругости с учетом в них температурных членов к разрешающим уравнениям. Воспроизводится, по-видимому, неизвестный автору вывод решения Б. Г. Галеркина, опубликованный рецензентом в работе „К теории систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами" (Тр. Ленингр. политехн. ин-та, 1937, № 6, 31—36). 2. Приведение трехмерной задачи теории упругости к двумерной относительно разрешающей функции перемещений. Изложение хорошо известного вариационного приема решения задач математической физики, многократно применявшегося И. Г. Бубновым, Л. В. Канторовичем и отчетливо и полно изложенного в книге Л. В. Канторовича и В. И. Крылова „Приближенные методы высшего анализа" (Гостехиздат, 1949). 3. О решении системы основных уравнений в частных производных относительно разрешающих функций путем разложения на независимые уравнения. Показывается, что решения системы уравнений $a_1\nabla^4\Phi_1 + b_1\nabla^2\Phi_1 + c_{12}\nabla^2\Phi_2 + e_1\Phi_1 + g_{12}\Phi_2 = 0$, $a_2\nabla^4\Phi_2 + b_2\nabla^2\Phi_2 + c_{21}\nabla^2\Phi_1 + e_2\Phi_2 + g_{21}\Phi_1 = 0$, в которых коэффициенты постоянны, представимы в виде $\Phi_i = \sum_{k=1}^{4}\beta_{ik}\varphi_k$, $i = 1, 2$, причем φ_k — решения уравнений второго порядка $\nabla^2\varphi_k = \mu_k\varphi_k$, а μ_k — корни некоторого уравнения четвертой степени. Случай кратных корней, который отнюдь не будет исключительным в задачах теории упругости изотропного тела, не рассмотрен; предлагаемый прием тогда в столь простом виде не проходит (пример: $\nabla^4\Phi_1 = \Phi_2$, $\nabla^4\Phi_2 = \Phi_1$). 4. Некоторые задачи по расчету толстых плит. Дано приближенное решение (ничего не добавляющее, по нашему мнению, к хорошо известным) нескольких задач о температурных напряжениях в прямоугольном параллелепипеде. А. И. Лурье

3103. О малых перемещениях прямоугольных плит при различных краевых условиях. Ерзин (Solution for small deflections of rectangular plates with different edge conditions Erzin Cevdet Z.), Istanbul tekn. üniv. bül., 1954, 7, 50—58 (англ.; рез. турецк.)

Для приближенного решения задачи об изгибе прямоугольной плиты используется выражение вариации потенциальной энергии, в котором учитывается элементарная работа краевых моментов и перерезывающих сил. Рассмотрены задачи об изгибе квадратной плиты, три края которой оперты, а четвертый или заделан или свободен. Хорошо известно точное решение этих задач; оно не более сложно, чем предложенное в реферируемой работе приближенное решение. А. И. Лурье

3104. Кручение прямоугольного стержня силами, приложенными к его боковой поверхности. Валов Г. М., Научн. докл. высш. школы. физ.-матем. н., 1958, № 4, 81—85

Рассматривается задача о кручении стержня прямоугольного сечения внешними силами, приложенными к его боковой поверхности и представимыми разложениями в двойные ряды Фурье. Предполагается, что силы распределены симметрично относительно среднего поперечного сечения, касательные силы на торцах отсутствуют, а нормальные — статически эквивалентны нулю. Перемещения задаются в форме двойных рядов, составленных так, чтобы выполнялись уравнения равновесия и контурные условия. Нахождение коэффициентов указанных рядов сводится к решению бесконечной системы уравнений, регулярность которой не исследуется. К. В. Соляник-Красса

3105. Об одной смешанной задаче изгиба упругой пластинки. Карапетян М. Е., Тр. Тбилисск. ин-та инж. ж.-д. трансп., 1957, вып. 31, 63—70

Показано, что рассмотрение задачи об изгибе пластинки, контур которой частично заделан, частично свободен, математически эквивалентно основной смешанной плоской задаче теории упругости (на части контура заданы силы, на части — перемещения). Рассматриваются области, на которые внутренность единичного круга отображается с помощью рациональной функции (в частности, полиномом). Указан способ сведения задачи к задаче Гильберта для круга с разрывными коэффициентами. Приведены формулы, определяющие вид решения. Рассмотрение конкретных примеров отсутствует. Чтение работы затруднено большим числом опечаток. А. И. Лурье

3106. К изгибу толстых круглых плит осесимметричной нагрузкой. Абрамян Б. Л., Баблоян А. А., Айкакан ССР Гитутюннери Академиаи тегекагир. Физико-математикакан гитутюннери сериа, Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-матем. н., 1958, **11**, № 4, 95—106 (рез. арм.)

Бигармоническая функция напряжений Лява для осесимметричной задачи теории упругости задается в виде

$$\Phi = z(Ar^2 + Bz^2 + Cz) + \sum_{k=1}^{\infty}[E_kI_0(\lambda_k r) + G_k\lambda_k rI_1(\lambda_k r)]\sin\lambda_k z + \sum_{k=1}^{\infty}(A_k\operatorname{sh}\mu_k z + B_k\operatorname{ch}\mu_k z + C_k\mu_k z\operatorname{sh}\mu_k z + D_k\mu_k z\operatorname{ch}\mu_k z)J_0(\mu_k r),$$

где $\lambda_k = \frac{k\pi}{h}$, а μ_k — корни уравнения $J_1(xR) = 0$, h — толщина, R — радиус плиты. На поверхности $r = R$ считаются заданными радиальное перемещение U_r и касательное напряжение τ_{rz} при $0 < z < h$, а на торцах плиты $z = 0$ и $z = h$ — напряжения σ_z и τ_{rz}. Кроме того, предполагается, что на окружности $z = z_0$, $r = R$ отсутствует осевое перемещение ($U_z(R, z_0) = 0$). Используя представление функций $I_0(\lambda_k r)$ и $rI_1(\lambda_k r)$ в форме рядов Фурье — Дини по функциям $\{J_0(\mu_k r)\}$, авторы дают формулы, определяющие все коэффициенты функции Ф. Рассмотрен частный случай плиты, загруженной нормальной нагрузкой σ_z, распределенной по части $0 \leqslant r \leqslant \varepsilon$ верхнего торца $z = h$ при отсутствии радиальных перемещений на боковой поверхности $r = R$ и осевого перемещения $U_z\left(R, \frac{h}{r}\right)$, в предположении, что касательные напряжения на этой поверхности распределены по параболическому закону. Для этого случая построены эпюры распределения нормального напряжения σ_z на оси плиты для $\frac{h}{R} = 1$ и $\frac{h}{R} = 1/3$ при разных значениях ε. Предлагаемое решение имеет, по мнению референта, преимущество полноты и простоты перед ранее известными. А. И. Лурье

3107. Задача об изгибе круглой пластинки, лежащей на упругом полупространстве, под действием сосредоточенной силы, приложенной в ее центре. Ишкова А. Г., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, № 6, 96—104

Функция прогиба w и реакция упругого основания $p(s)$ в случае плотного прилегания удовлетворяют уравнениям $\Delta^2 w = -\frac{1}{D} p(s)$,

$$w = \frac{4}{\pi\delta}\left[\frac{1}{s}\int_0^s p(r)\,r\,dr \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1-(r^2/s^2)\sin^2 x}} + \int_s^1 p(r)\,dr \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1-(s^2/r^2)\sin^2 x}}\right]$$

Функция $p(s)$ ищется в виде

$$p(s) = \frac{A}{\sqrt{1-s^2}} + \sum_{n=0}^{\infty} (b_n s^n + E_{2n} s^{2n} \ln s).$$

Оказывается возможным представить коэффициенты b_{2n+1}, E_{2n} одночленными формулами в виде произведения некоторых отрицательных степеней безразмерного параметра

$$K = \frac{Eh^3 m^2 (m_0^2 - 1)}{6(m^2 - 1) E_0 m_0^2 R^3}$$

на определенные числовые множители. Остающиеся коэффициенты b_{2n} и A определяются бесконечной системой линейных уравнений, решения которой разыскиваются в виде рядов по отрицательным степеням K. Указан процесс определения коэффициентов этих рядов. А. И. Лурье

3108. Круговая цилиндрическая оболочка с круговым вырезом под действием напряжений сдвига. Витум (Die Kreiszylinderschale mit kreisförmigem Ausschnitt unter Schubbeanspruchung. Withum D.), Ingr-Arch., 1958, **26**, № 6, 435—446 (нем.)

Рассматривается напряженное состояние в подверженной кручению тонкой круговой цилиндрической оболочке, снабженной круговым отверстием. Усилия, моменты и перемещения могут быть выражены через комплексную функцию $\psi(\zeta, \varphi)$, причем $\mathrm{Re}\,\psi = w$ — радиальное перемещение, $\mathrm{Im}\,\psi = \varkappa\Phi$, где $\varkappa$ — постоянная, а Ф имеет значение, аналогичное функции напряжений Эри плоской задачи; $\zeta = \alpha\rho\sqrt{i}$, где ρ, φ — полярные координаты точки при развертывании цилиндра на плоскость с началом в центре отверстия. Полагая

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin 2n\varphi, \quad \Delta\psi_n = \psi_n'' + \frac{1}{\zeta}\psi_n' - \frac{4n^2}{\zeta^2}\psi_n,$$

автор приходит к рассмотрению системы уравнений ($n = 1, 2, 3, \ldots$)

$$\Delta\Delta\psi_n + \Delta\psi_n + \varepsilon\left(\frac{1}{2}\psi_{n-1}'' - \frac{4n-3}{2\zeta}\psi_{n-1} + \frac{2n(n-1)}{\zeta^2}\psi_{n-1}' + \frac{1}{2}\psi_{n+1}'' + \frac{4n+3}{2\zeta}\psi_{n+1}' + \frac{2n(n+1)}{\zeta^2}\psi_{n+1}'\right) = 0, \quad \psi_0 = 0,$$

в которую введен параметр малости ε, равный для рассматриваемой задачи единице. Решение разыскивается в форме степенного ряда $\psi_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon^\nu \Psi_n^{(\nu)}$ при краевых условиях, соответствующих отсутствию усилий на контуре отверстия. Явление определяется параметром

$$\xi_0 = \frac{\sqrt[4]{3(1-\mu^2)}}{\sqrt{Rt}} r,$$

где t — толщина плиты, r — радиус отверстия, R — радиус цилиндра, μ — коэффициент Пуассона. Оказывается возможным ограничиться в указанных рядах слагаемыми для n до 4 и ν до 6, чтобы получить удовлетворительные числовые результаты для $\xi_0 \leqslant 4$. В работе рецензента (Прикладная матем. и механика, 1946, **10**, № 3) задача (для случая цилиндра, подвергнутого осевому растяжению и внутреннему давлению) решалась в форме ряда по степеням ξ_0 и вычисления проводились для $\xi_0 \leqslant 0{,}5$. А. И. Лурье

3109. Напряженное состояние и перемещения в толстой круглой пластинке, вызванные действием нестационарного поля температуры. Дерский (The state of stress and displacement in a thick circular plate due to a non-stationary temperature field. Derski W.), Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. techn., 1959, 7, № 1, 53—64 (англ.; рез. русск.)

Рассматривается термонапряженное состояние толстой круговой плоской пластины, вызванное нестационарным распределением температуры. Пусть цилиндрическая система координат выбрана так, что ось OZ совпадает с осью симметрии пластины и поверхности, ограничивающие пластину, заданы уравнениями $z = \pm h$, $r = b$. Предполагается, что в начальный момент времени температура $T(r, z, 0) = 0$. На боковой поверхности $r = b$ температура $T(b, z, t) = 0$, а на торцовых поверхностях температура распределена следующим образом:

$$T(r, \pm h, t) = \begin{cases} f(t) f_1(r) & \text{при } 0 < t < \tau \text{ и } 0 < r < a < b \\ f_1(r) & \text{при } t > \tau \text{ и } 0 < r < a < b \end{cases}$$

и

$$T(r, \pm h, t) = 0 \quad \text{при } a < r < b.$$

Здесь вид функции $f_1(r)$ не конкретизируется, а функция $f(t)$ берется в виде $f(t) = \frac{t}{\tau}$. Температурная функция получается с помощью преобразования Лапласа в форме простых и двойных рядов, быстрота сходимости которых не обсуждается. При решении задачи термоупругости пластина предполагается незакрепленной,

причем механические граничные условия на торцовых участках поверхности выполняются точно, а на боковой поверхности выполняются лишь интегрально. Для определения напряжений в работе используется аппарат термоупругого потенциала, а для выполнения граничных условий применяется функция Лява. Термоупругие напряжения в работе получены в форме рядов, сходимость которых не исследуется. М. С. Ага

3110. Неустановившиеся температурные напряжения в тонкой круглой пластинке. Дерский (On transient thermal stresses in a thin circular plate. Derski Włodzimierz), Arch. mech. stosowanej, 1958, **10**, № 4, 551—558 (англ.; рез. польск., русск.)

Рассмотрена задача определения термонапряженного состояния круглой тонкой пластины радиуса a и толщины b. Пластина предполагалась настолько тонкой, чтобы можно было бы говорить о плоском температурном поле и плоском напряженном состоянии. Для нахождения температурного поля предполагалось, что в начальный момент времени температура пластины поддерживалась равной нулю, а в дальнейшие моменты времени температура края пластины изменялась по специальному закону:

$$T(a, t) = \begin{cases} \dfrac{t}{\tau} T_0 \text{ при } 0 < t < \tau, \\ T_0 \quad \text{при } \tau < t. \end{cases}$$

Температурная функция в работе найдена с помощью преобразования Лапласа. При решении задачи термоупругости пластина предполагалась незакрепленной. Для определения термоупругих напряжений был применен аппарат термоупругого потенциала. Как температурная функция, так и термоупругие напряжения в работе представлены в форме рядов, быстрота сходимости которых не обсуждена. М. С. Ага

3111. Осесимметричные задачи термоупругости для неограниченного цилиндра. Соколовский (Axially-symmetrical problems of thermo-elasticity for a cylinder of unlimited length. Sokołowski M.), Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. techn., 1958, **6**, № 4, 207—210, XVI (англ., рез. русск.)

Автор рассматривает задачу определения термонапряженного состояния бесконечно длинного цилиндра радиуса R для двух случаев распределения температуры. Пусть ось OZ цилиндрической системы координат совпадает с осью симметрии цилиндра. В первом случае автор предполагает окружность радиуса $r = \rho < R$ в плоскости $z = 0$, нагретой до температуры $T_0 = \text{const}$, а все остальное пространство как внутри, так и вне цилиндра поддерживаемым при нулевой температуре. Во втором случае автор предполагает, что вдоль упомянутой окружности $r = \rho$ равномерно распределены источники тепла мощности $W_0 = \text{const}$. В обоих случаях рассматривается стационарное распределение температуры. При решении задачи автор использует преобразования Фурье и Ганкеля. Термоупругие напряжения в работе представлены с помощью несобственных интегралов, вопросы сходимости которых не обсуждаются. М. С. Ага

3112. Метод начальных функций в теории толстых многослойных плит и оболочек. Власов В. З., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. **4**. М., АН СССР, 1959, 102

3113. О построении эффективных решений некоторых смешанных краевых задач математической физики для полигональных областей. Минасян Р. С., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. **4**. М., АН СССР, 1959, 98—99

3114. Определение верхних и нижних границ решений линейных дифференциальных уравнений. Дерстайн, Шаффер (Determination of upper and lower bounds for solutions to linear differential equations. Durstine R. M., Shaffer D. H.), Quart. Appl. Math., 1958, **16**, № 3, 315—317 (англ.)

Предлагается метод для определения верхней и нижней границы решения краевой задачи:

$$L[u] + \varphi = 0 \text{ в области } D, \quad M[u] = \lambda \text{ на границе } B \text{ области } D. \tag{1}$$

Пусть w — дифференцируема достаточное число раз в D и $M[w] = \lambda$ на B и пусть $v = u - w$.

Тогда $L[w] + \varphi = \varepsilon$,

откуда $L[v] = -\varepsilon$ в D, $M[v] = 0$ на B. (2)

Если $G(x, \xi)$ — функция Грина краевой задачи (2), то

$$v = \int DG(x, \xi)\, \varepsilon(\xi)\, d\xi. \tag{3}$$

Пусть w_1 и w_2 — две функции типа w, причем

1) $\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$ — непрерывна в D,

2) ε_1 не меняет знака в D,

3) выполняется одно из неравенств:

$1 > M \geqslant \dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \geqslant m$, либо $M \geqslant \dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \geqslant m > 1$. Тогда с помощью (3) нетрудно показать, что

$$u_1 \leqslant u \leqslant u_2, \tag{4}$$

где $u_1 = w_1 + (w_1 - w_2)\dfrac{1}{M-1}$, $u_2 = w_1 + (w_1 - w_2) \times \dfrac{1}{m-1}$.

Рассматривается два примера применения неравенств (4). Ю. Н. Днестровский

3115. Сферические средние и условия излучения. Уилкокс (Spherical means and radiation conditions. Wilcox Calvin H.), Arch. Ration Mech. and Analysis, 1959, **3**, № 2, 133—148 (англ.)

Доказано, что решение $u(p)$ уравнения Гельмгольца $\Delta u + k^2 u = 0$ в области B вне поверхности $\sum$ имеет единственное разложение вида

$$u(p) = u_1(p) + v(p), \tag{1}$$

где $u_1(p)$, являющееся решением уравнения Гельмгольца во всем пространстве, определяется по формуле

$$u_1(\mathbf{x}) = \frac{e^{ikr}}{4\pi} \int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial r} - ik\right) r u(\mathbf{x} + r\mathbf{r}_0)\, d\Omega$$

($\mathbf{x} = \overrightarrow{Op}$, Ω — единичная сфера, $\mathbf{r}_0$ — единичный вектор), а $v(p)$ представляется потенциалами простого и двойного слоя

$$v(p) = \frac{1}{4\pi} \int_\Sigma \left\{ \frac{\partial u}{\partial n} \frac{e^{ikR}}{R} - u \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikR}}{R}\right)\right\} d\sigma.$$

Представление (1) позволяет сформулировать условие излучения для задачи $\Delta u + k^2 u = f$ в B, $u = 0$ или $\dfrac{\partial u}{\partial n} = 0$ на $\sum$ в виде требования $u_1(p) \equiv 0$.

Показана эквивалентность этого условия другим аналитическим формам условия излучения. Устанавливается связь введенного условия излучения с принципом предельной амплитуды, согласно которому решение задачи дифракции для уравнения Гельмгольца определяется как предел при $t \to \infty$ решения в области B задачи Каши с нулевыми начальными и граничными условиями для уравнения

$$\Delta\varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = f(p, k)\, e^{-ikt}.$$

Однако доказательство автора предполагает, что

$$\int_0^\infty e^{ik^2t}\varphi_0(P,\ t)\,dt$$

сходится и является решением уравнения Гельмгольца. Здесь $\varphi_0(P,\ t)$ — решение задачи Коши для начального импульса.

В заключение результаты, полученные для скалярного уравнения, переносятся на решение системы уравнений Максвелла.

А. Г. Свешников

3116. О принципе Бабине. Мак-Ками (On Babinet's principle. MacCamy R. C.), Canad. J. Math., 1958, **10**, № 4, 632—640 (англ.)

Рассматриваются две краевые задачи для волнового уравнения:

$$\left.\begin{aligned}&\Delta u + u = 0, \qquad y < 0,\\ &u(x,\ 0) = 0 \text{ при } |x| > a,\\ &u_y(x,\ 0) = g(x) \text{ при } |x| < a\\ &\lim_{r\to\infty}\sqrt{r}\left(\frac{\partial u}{\partial r} - iu\right) = 0,\end{aligned}\right\}\ \text{I}$$

$$\left.\begin{aligned}&\Delta V + V = 0, \quad y < 0,\\ &V_y(x,\ 0) = 0 \text{ при } |x| > a,\\ &V(x,\ 0) = h(x) \text{ при } |x| < a,\\ &\lim_{r\to\infty}\sqrt{r}\left(\frac{\partial v}{\partial r} - iv\right) = 0\end{aligned}\right\}\ \text{II}$$

Доказывается, что решение задачи I может быть выражено через решение задачи II при соответствующем подборе функции $h(x)$. Далее рассматриваются две краевые задачи для уравнения Лапласа:

$$\left.\begin{aligned}&\Delta u = 0, \qquad y < 0,\\ &Lu = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad |x| > a,\\ &Mu = g(x) \text{ при } y = 0, \quad |x| < a,\end{aligned}\right\}\ \text{I}$$

$$\left.\begin{aligned}&\Delta v = 0, \qquad y < 0,\\ &Yv = 0 \quad \text{при } y = 0, \ |x| > a,\\ &Mv = h(x) \text{ при } y = 0, \ |x| < a.\end{aligned}\right\}\ \text{II}$$

Здесь

$$L = \sum_{m=0}^{a} a_m D^m Y + \sum_{m=0}^{b} b_m D^m,$$

$$M = \sum_{m=-\rho}^{r} r_m D^m Y + \sum_{m=-\sigma}^{s} s_m D^m,$$

где

$$D = \frac{d}{dx}, \quad Y = \frac{d}{dy}, \quad D^{-1}f = \int_0^x f(t)\,dt.$$

Предполагается, что задачу I можно дополнить условием, ограничивающим рост решения на бесконечности, которое обеспечивает единственность решения. Вопрос о существовании такого условия и о его характере в работе не обсуждается. Кроме того, предполагается, что решение задачи II можно представить в виде

$$v(x,\ y) = -\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a} f(t)\log[(x-t)^2+y^2]^{1/2}\,dt.$$

Доказывается, что в этом случае решение задачи I может быть выражено через решение задачи II. В заключение автор приводит два примера, иллюстрирующих полученные результаты.

Д. П. Костомароз

3117. Дифракция поверхностных звуковых волн на полубесконечных импедансных трубе и стержне. Гуань Дин-хуа, Докл. АН СССР, 1959, **124**, № 3, 559—562

Рассматривается задача о дифракции аксиально-симметричной поверхностной звуковой волны на полубесконечных трубе и стержне при граничных условиях третьего рода. Труба радиуса a $(z > 0)$ имеет бесконечно тонкие стенки. Потенциал скорости $\Phi = \Phi(r,\ z)$ удовлетворяет скалярному уравнению

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} + k^2\Phi = 0 \tag{1}$$

и граничным условиям

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \sigma\Phi = 0 \text{ при } r = a, \quad z > 0. \tag{2}$$

Система возбуждается падающей поверхностной волной

$$\Phi_{\text{пад}} = A\frac{H_0(qr)}{H_0(qa)}e^{-ihz},\ r > a,$$

где $q = \sqrt{k^2 - h^2}$ — величина, определяемая из (2), $H_0(qr)$ — функция Ханкеля первого рода. Решение ищется в виде интеграла

$$\Phi(r,\ z) = \frac{\pi_i}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iwz}\left\{\begin{matrix}J_0(vr)\,[vaH_0'(va)+\sigma aH_0(va)]\\ H_0(vr)[\,vaJ_0'(va)+\sigma aJ_0(va)]\end{matrix}\right\}\times$$
$$\times F(w)\,dw, \tag{3}$$

где $v = \sqrt{k^2 - w^2}$, $\operatorname{Im} v > 0$, а $F(w)$ — функция, удовлетворяющая уравнениям

$$\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iwz}F(w)dw = -Ae^{-ihz}, \ z < 0,\\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{iwz}v\Psi(w)\,F(w)\,dw = 0, \ z > 0,\\ \Psi(w) = \frac{\pi}{va}[vaJ_0'(va) + \sigma aJ_0(va)]\,[vaH_0'(va)+\sigma aH_0(va)].\end{cases} \tag{4}$$

Решение (4) строится методом Винера — Хопфа. В случае дифракции на стержне условия на торце сводят задачу к бесконечной системе алгебраических уравнений относительно амплитуд нормальных волн внутри трубы.

Ю. Н. Днестровский

3118. Дисперсионные соотношения в задаче дифракции. Петрина Д. Я., Укр. матем. ж., 1958, **10**, № 4, 405—410 (рез. англ.)

Исследуются свойства аналитичности амплитуды рассеивания скалярной задачи дифракции плоской волны $e^{ik\bar{\omega}\bar{x}}$ на преломляющей области B в трехмерном пространстве E:

$$\begin{cases}\Delta u + k_1^2 u = 0, \quad \bar{x}\in B, \quad \Delta u + k_0^2 u = 0, \quad \bar{x}\in E - B,\\ (u)_1 = (u)_0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial\bar{n}}\right)_1 = \left(\frac{\partial u}{\partial\bar{n}}\right)_0,\end{cases} \tag{1}$$

где символ $(\,)_1$ и $(\,)_0$ обозначает предельное значение на границе области B изнутри и снаружи соответственно, $k_1^2 = \text{const}$, $k_0^2 = \text{const}$. Решение задачи (1), удовлетворяющее условиям излучения, единственно, удовлетворяет интегральному уравнению

$$u(\bar{x}) = -(k_0^2 - k_1^2)\int_B u(\bar{y})\frac{\exp(ik_0|\bar{x}-\bar{y}|)}{4\pi|\bar{x}-\bar{y}|}d\bar{y} +$$
$$+ \exp(i\bar{k}_0\bar{x}) \tag{2}$$

и при больших $|\bar{x}|$ имеет асимптотику вида

$$u(\bar{x}) \cong \exp(i\bar{k}_0\bar{x}) + |\bar{x}|^{-1}\exp(ik_0|\bar{x}|) f(k_0, \theta, \varphi). \quad (3)$$

Функция $f(k_0, \theta, \varphi)$ называется амплитудой рассеивания. С помощью (2) изучаются аналитические свойства функции f, как функции комплексного аргумента k_0.

Доказывается теорема: Амплитуда рассеивания $f(k_0, \tau, \varphi)$, рассматриваемая, как функция k_0, допускает аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость комплексного переменного k_0 при любом конечном фиксированном и действительном τ и произвольном φ. На бесконечности $f(k_0, \tau, \varphi)$ растет не быстрее $|k_0|^6$. На действительной оси $f(k_0, \tau, \varphi)$ непрерывна и имеет точки ветвления при $k_0 = \pm\frac{1}{2}\tau$.

Указывается на возможное применение теоремы для решения обратной задачи дифракции.

Ю. Н. Днестровский

3119. Некоторые вопросы обратной задачи рассеивания. Симс (Certain aspects of the inverse scattering problem. Sims A. R.), J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1957, **5**, № 4, 183—205 (англ.)

Рассматривается обратная задача, заключающаяся в определении плотности электронов в ионосфере по коэффициенту отражения, измеряемому на поверхности земли.

Математическая часть задачи состоит в следующем: Пусть в уравнении

$$u'' + \{k^2 - v(x)\}u = 0 \quad (1)$$

потенциальная функция неотрицательна, кусочно-непрерывна обращается в нуль для $x < 0$ и принадлежит классу $L(0, \infty)$. Можно показать, что в этом случае существуют единственные аналитические функции $a(k)$ и $b(k)$ и единственное решение $u(x, k)$ уравнения (1), для которого

$$u(x, k) \sim a(k)e^{ikx} \quad (x \to +\infty), \quad (2)$$

$$u(x, k) = e^{ikx} + b(k)e^{-ikx} \quad (x \to -\infty). \quad (3)$$

Требуется восстановить уравнение (1) по функции $b(k)$. Эта задача решалась Кэйем (Kay J., Div. Electromagn. Res., New York Univ., 1955), который указал следующие достаточные условия:

1. $\overline{b(k)} = b(\bar{k})$ $\quad (I(k) = 0)$.
2. $b(k) = O\left(\frac{1}{k}\right)$ $\quad (I(k) \geqslant 0)$.
3. $|b(k)| < 1$ $\quad (I(k) = 0)$.

4. $b(k)$ — аналитическая функция, которая имеет конечное число простых полюсов, лежащих на положительной мнимой полуоси с вычетами вида ib_j, $b_j > 0 \times (j = 1, 2, \ldots, N)$. На действительной прямой нет особенностей кроме, быть может, точки $k = 0$.

5. Функция

$$B(x) = \frac{1}{2\pi}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} b(k)e^{-ikx}\,dk - i\sum_{j=1}^{N} b_j e^{-ik_j x}$$

непрерывна и имеет кусочно-непрерывную вторую производную.

Если эти условия выполнены, то

$$u(x, k) = u_0(x, k) + \int_{-x}^{x} K(x, \xi)\,u_0(\xi, k)\,d\xi,$$

где $u_0(x, k)$ есть решение уравнения (1) при $v(x) = 0$, удовлетворяющее условию (3), и $K(x, \xi)$ есть решение интегрального уравнения

$$0 = B(x + y) + K(x, y) + \int_{-x}^{x} K(x, \xi)\,B(y + \xi)\,d\xi. \quad (4)$$

Доказывается, что условия 1—5 являются также необходимыми

В заключение приводится несколько примеров, в которых $b(k)$ есть рациональная функция.

Примечание референта. После того, как непрерывность функции $B(x)$ доказана, ее дифференцируемость может быть легко выведена из интегрального уравнения (4). Б. М. Левитан

3120. Теорема разложения для электромагнитных полей. Уилкокс (An expansion theorem for electromagnetic fields. Wilcox C. H.), Communs. Pure and Appl. Math., 1956, **9**, № 2, 115—134 (англ.)

См. РЖФиз. 1959, № 9, 20858

3121. Дифракция на проводящих телах неограниченных размеров. Дмитриев В. И., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. 1956. **4**. М., АН СССР, 1959, 118

3122. Исследование электромагнитных полей в слоистых средах. Шахсуваров Д. Н., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. **4**. М., АН СССР, 1959, 125

3123. Теория электрического разряда в движущейся проводящей среде. Жигулев В. Н., Докл. АН СССР, 1959, **124**, № 6, 1226—1228

Математическая задача состоит в интегрировании системы уравнений магнитной гидродинамики, имеющей в рассматриваемом случае вид:

$$U\frac{\partial H}{\partial x} = \nu_m \frac{\partial^2 H}{\partial y^2},$$

$$\rho c_p U\frac{\partial T}{\partial x} = k\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{4\pi\nu_m}{c^2} j_x^2,$$

$$p + \frac{H^2}{8\pi} = \text{const};$$

здесь

$$H = H_z, \quad j = \frac{c}{4\pi}\operatorname{rot} H.$$

Решение для H находится в классе автомодельных решений, тогда при соответствующих граничных условиях выражения для j и T имеют вид:

$$j_x = \frac{I}{2\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{U}{\nu_m x}}\exp\left(-\frac{Uy^2}{4\nu_m x}\right),$$

$$j_y = \frac{I}{4\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{U}{\nu_m x}}\frac{y}{x}\exp\left(-\frac{Uy^2}{4\nu_m x}\right),$$

$$T = T_\infty + \frac{I^2}{c^2\rho c_p}\int_\xi^\infty \exp\left(-\frac{\eta^2}{4}\right)d\eta\int_0^\eta \exp\left[-\frac{\xi^2}{4}\left(\frac{2}{pr_m} - 1\right)\right]d\xi,$$

где I — полный электрический ток в струе,

$$T_\infty = \lim_{y\to\infty} T,$$

$$\xi = y\sqrt{\frac{\rho c_p U}{kx}}, \quad pr_m = \frac{\nu_m \rho c_p}{k}.$$

Рассматривается также аналогичная осесимметричная задача. Д. П. Костомаров

3124. Об интегрировании уравнений магнитогидростатики для аксиально-симметричных конфигураций. Каноббьо, Крочи (Sull'integrazione delle equazioni della magnetoidrostatica per configurazioni a simmetria assiale. Canobbio E., Croci R.), Nuovo cimento, 1959, **12**, № 2, 167—172 (итал.)

Формулируются уравнения магнитогидростатики в произвольных криволинейных и ортогональных координатах. Путем введения векторного потенциала авторы производят переход от уравнений Максвелла к нелинейному интегро-дифференциальному уравнению, которое можно затем интегрировать численно. Рассмотрен случай цилиндрических и сфероидальных координат. Исследованы

некоторые вопросы, связанные с устойчизостью решений. А. А. Боргардт

3125. Об интегрировании линеаризованных уравнений магнитогидростатики. Каноббьо, Крочи (Sull' integrazione delle equazion linearizzate della magnetoidrostatica. Canobbio E., Croci R.), Nuovo cimento, 1959, 12, № 2, 173—176 (итал.)

Продолжение предшествующей работы (реф. 3124). Вводится предположение о том, что давление и магнитная индукция в рассматриваемой задаче состоят из невозмущенных частей и малых добавок, которые учитываются в первом приближении теории возмущений. В отличие от общего случая точного нелинеиного интегро-дифференциального уравнения, интегрирование здесь может быть проведено обычными методами. Рассмотрены те же случаи (цилиндр и тороид), что и в предшествующей работе. А. А. Боргардт

3126. Теория магнитного пограничного слоя. Жигулев В. Н., Докл. АН СССР, 1959, 124, № 5, 1001—1004

Указано на явление экранировки движущейся плазмы от внешнего магнитного поля. Если $R_m \gg 1$ ($R_m = \frac{4\pi\sigma UL}{c^2}$, где c — скорость света, а σ — электропроводность газа), то изменение магнитного поля будет происходить в узком слое с толщиной порядка $\frac{L}{\sqrt{R_m}}$ который автор называет магнитным пограничным слоем. Путем оценки порядка величины членов в уравнениях магнитной гидродинамики и отбрасывания некоторых из них получены уравнения магнитного пограничного слоя. Движение при этом предполагалось плоским, а магнитное поле — лисо лежащим в плоскости движения, либо перпендикулярным к ней. Указан класс автомодельных решений уравнений магнитного пограничного слоя, нахождение которых сводится к интегрированию системы обыкновенных уравнений, которая в первом случае имеет вид

$$\gamma g f' - \beta g' f = g''';$$
$$(\alpha+\beta) f'^2 - \beta f f'' - (\alpha+\gamma) g'^2 + \gamma g g'' = \delta^2 q + \omega f''',$$

а во втором случае — вид

$$\gamma h f' - \beta h' f = h''; \quad (\alpha+\beta) f'^2 - \beta f f'' = \delta^2 q + \omega f''',$$

где α, β, γ, q, δ — постоянные коэффициенты. Поставлена задача об обтекании проводящей жидкостью полуплоскости, расположенной параллельно потоку, по которой течет электрический ток перпендикулярно набегающему потоку или параллельно ему. Выписаны соответствующие граничные условия для уравнения магнитного пограничного слоя. А. Г. Куликовский

3127. О единственности решений уравнения слабой стационарной тепловой конвекции. Фарзетдинов М. М., Прикл. матем. и механ., 1958, 22, № 2, 286—288

Показано, что если можно представить решение уравнений для стационарной слабой тепловой конвекции через степенные ряды по безразмерному параметру λ (число Грасхофа), то для рассмотренных граничных условий это представление единственно.

Решение вопроса о единственности сводится к доказательству единственности решения систем линейных уравнений, которым удовлетворяют члены рядов.

В. П. Коробейников

3128. О температурном поле в неограниченном полом цилиндре, когда температура внешней среды меняется по закону ломаной. Данилова И. Н., Изв. АН СССР. Отд. техн. н. Энерг. и автоматика, 1959, № 1, 131—133

Рассмотрена задача о распределении температуры в неограниченном полом цилиндре. Предполагалось, что начальная температура цилиндра постоянна, а через граничные поверхности происходит теплообмен со средами, температуры которых изменяются во времени по специальному закону. При решении задачи были применены методы операционного исчисления. Функция распределения температуры представлена с помощью ряда, быстрота сходимости которого не обсуждена.

М. С. Ага

3129. Макроскопические уравнения одновременного тепло- и массообмена в изотропной, непрерывной и замкнутой системах. Мерк (The macroscopic equations for simultaneous heat and mass transfer in isotropic, continuous and closed systems. Merk H. J.), Appl. Scient. Res., 1958, A8, № 1, 73—99 (англ.)

Дается критический анализ литературы, касающейся феноменологической теории переноса теплоты и массы в многокомпонентных системах. В результате автор из имеющихся в литературе несколько отличных друг от друга формулировок основных уравнений теории останавливается на уравнениях, где учитывается зависимость удельной энтальпии от концентрации и эффект, отмеченный Аккерманом. Далее на основе термодинамики необратимых процессов анализируются различные описания процессов диффузии и переноса тепла, в частности для бинарных систем. И. И. Ольховский

3130. Исследование нестационарного переноса тепла в тепловыделяющих элементах ядерных реакторов. Ермаков В. С., Иванов А. В., Тр. 2-й Междунар. конференции по мирн. использованию атомн. энергии, 1958. Т. 2. Ядерн. реакторы и ядерн. энерг. М., Атомиздат, 1959, 153—165

3131. Кинетическое уравнение для нейтронов с учетом движения ядер. Климов В. Н., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. 4. М., АН СССР, 1959, 64—65

3132. Теория однородной изотропной турбулентности. Джайн (A theory of homogeneous isotropic turbulence. Jain P. C.), Appl. Scient. Res., 1959, A8, № 2-3, 219—227 (англ.)

Рассматривается проблема получения замкнутой системы уравнений для тензоров корреляции Q_{ij} второго и T_{ijk} третьего порядков для однородной изотропной турбулентности. Исходными являются уравнения Навье-Стокса:

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu\nabla^2 U_i \qquad (1)$$

и непрерывности:

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0, \qquad (2)$$

где U_i и P — скорость и давление в точке x_i в момент времени t, ρ=const — плотность и ν=const — кинематическая вязкость. Умножая (1) на U'_j (значение скорости в точке x'_j), получаем

$$U'_j \frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} U_i U_k U'_j = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i} P U'_j + \nu\nabla_x^2 U_i U'_j. \qquad (3)$$

Меняя в (3) i и j, x_i и x'_j и складывая получившееся соотношение с (3) будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(U_i U'_j\right) + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(U_i U_k U'_j\right) + \frac{\partial}{\partial x'_k}\left(U'_j U'_k U_i\right) =$$
$$= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P U'_j}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P' U_i}{\partial x'_j} + \nu\nabla_x^2 U_i U'_j + \nu\nabla_{x'}^2 U_i U'_j. \qquad (4)$$

Если теперь усреднить (4) и воспользоваться предположением об однородности турбулентности (т. е. что все средние величины зависят только от $\xi_i = x'_i - x_i$),

то придем к уравнению, содержащему тензоры второго и третьего порядков:

$$\frac{\partial Q_{ij}}{\partial t} = 2\frac{\partial}{\partial \xi_k}(T_{ikj}) + 2\nu\nabla^2 Q_{ij}, \qquad (5)$$

где

$$Q_{ij} = \overline{U_i U_j'}, \quad T_{ikj} = \overline{U_i U_k U_j'}.$$

С помощью аналогичной процедуры могут быть получены уравнения, включающие тензоры корреляции более высокого порядка. В частности, уравнение для тензора третьего ранга

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - 2\nu\nabla^2\right) T_{jll} = -X_{jll} \qquad (6)$$

включает в себя тензор, X_{jll}, зависящий от тензора четвертого ранга. Конечной замкнутой системы при этом не получается. Вместо тензорных уравнений (5) и (6) могут быть написаны уравнения для определяющих скалярных функций Q, T и X:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = 2\left(r\frac{\partial}{\partial r} + 5\right)T + 2\nu\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{4}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)Q,$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - 2\nu\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{7}{r}\right)\right]T = X, \qquad (7)$$

причем

$$Q_{ij} = \frac{Q'}{r}\xi_i\xi_j - (rQ' + 2Q)\delta_{ij}. \qquad (8)$$

Из (7) вытекает:

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t} - 2\nu\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{5}{r}\right]\right\}^2 Q = 2\left(5 + r\frac{\partial}{\partial r}\right)X. \qquad (9)$$

Для построения замкнутой системы относительно функций Q и X автор вводит дополнительные предположения: 1) $X = F(Q)$; 2) функция F должна быть определена с помощью одного из упрощающих принципов Колмогорова. а) Если воспользоваться гипотезой Колмогорова для однородной изотропной турбулентности, то получим:

$$\frac{\partial X}{\partial r} = \frac{\partial F}{\partial Q}\left[V_0^2 + 2Q\right]\frac{1}{r} \quad (\text{где } V_0 = V_0(t)). \qquad (10)$$

б) Если воспользоваться гипотезой Колмогорова о локальной изотропной турбулентности (для $\nu = 0$), то вместо (10) будем иметь:

$$4\frac{\partial Q}{\partial r} = c\varepsilon^{2/3}\frac{2}{3}r^{-1/3} \quad (\varepsilon = \varepsilon(t)). \qquad (11)$$

Системы (9) — (10), а также (9) и (11) замкнуты и определяют функцию $X = F(Q)$. Ю. Н. Днестровский

3133. Закон затухания в случае однородной турбулентности при наличии осевой симметрии. Гхош (Final period decay-law in the case of longitudinally homogeneous turbulence with symmetry about a localized axis. Ghosh K. M.), Proc. Nat. Inst. Sci. India, 1958, **A24**, № 4, 240—249 (англ.)

Основываясь на теории аксиально-симметричной турбулентности Чандрасекара, автор находит решение для средних квадратов трех компонент скорости в некоторой точке на расстоянии p от оси симметрии $\overline{u_\parallel^2}$, $\overline{u_\perp^2}$, $\overline{u_{\text{azimuth}}^2}$. Предполагая, что гидродинамические величины подчиняются уравнению Навье—Стокса и делая обычные пренебрежения, автор получает асимптотические формулы для $\overline{u_\parallel^2}$, $\overline{u_\perp^2}$, $\overline{u_{az}^2}$, имеющие значения при $t \to \infty$.

И. И. Ольховский

3134. Релятивистская механика и электродинамика сплошных сред. Станюкович К. П., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. **4**. М., АН СССР, 1959, 122—124

3135. Геометрическая интерпретация решений типа распространяющихся волн уравнения в частных производных второго порядка. Добреску-Пуриче (Geometrizarea fenomenului de propagare prin unde descris de o ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul doi, în spaţiul timp. Dobrescu-Purice Lucia), Studii şi cercetări mat. Acad. RPR, 1958, **9**, № 2, 401—414 (рум.; рез. русск., франц.)

Разрабатывается геометрическая теория решений типа распространяющихся волн уравнения в частных производных второго порядка гиперболического типа

$$a^{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} + b^i\frac{\partial u}{\partial x^i} + cu = f. \qquad (1)$$

Как и в инвариантной единой теории распространения волн, развитой в работе других авторов, волна рассматривается, как место частиц, т. е. двойных контактных элементов в смысле Ли. Устанавливается, что для того чтобы получить распространение путем эпицентральных волн и выполнение принципа Гюйгенса, необходимо и достаточно, чтобы уравнение (1) было нормального гиперболического типа. Введением локальной пространственно-временной системы отсчета, внутренне связанной с явлением распространения, в формулах распространения выделяются переменные, представляющие время.

Ю. Н. Днестровский

3136. О возможном влиянии электронных столкновений на отражающую способность металлов. Бентем (On the possible influence of electron interaction on the reflectivity of metals. Benthem C. W.), Appl. Scient. Res., 1958, **B7**, № 4, 275—292 (англ.)

Поведение электронов в металлах в присутствии электрического поля $\boldsymbol{E} = (E_x, 0, 0)$, $|\boldsymbol{E}| \equiv E$, описывается кинетическим уравнением

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{e}{m}E\frac{\partial f}{\partial v_x} + v_z\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{f - f_0(v)}{\tau_c} - \frac{f - f_0(v - \bar{u})}{\tau_e}, \qquad (1)$$

где τ_c и τ_e — времена релаксации при взаимодействии электронов с кристаллической решеткой и между собой соответственно, $\boldsymbol{u}$ — скорость переноса (дрейфа) электронов. Принимая, что величины $f_1 = f - f_0$ и E пропорциональны $e^{i\omega t}$, разлагая второй член правой части по $\boldsymbol{u}$ и учитывая, что в силу уравнений Максвелла ток $j = -Ne\boldsymbol{u} \approx \frac{1}{i\omega\mu_0}\frac{d^2E}{dz^2}$ (N — плотность электронов), после линеаризации получим:

$$\frac{f_1}{\tau v_z}(1 + i\omega\tau) + \frac{\partial f_1}{\partial z} = \frac{1}{v_z}\left(\frac{e}{m}E + \frac{E^{(2)}}{i\omega\mu_0 Ne\tau_e}\right)\frac{\partial f_0}{\partial v_x}, \qquad (2)$$

где $E^{(2)} \equiv \frac{\partial^2 E}{\partial z^2}$, $\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_c} + \frac{1}{\tau_e}$.

Пусть отражение электронов на границе металла диффузное. Выбирая в качестве равновесного распределения $f_0(v)$ распределение Ферми, на основании (2), получим следующее интегро-дифференциальное уравнение для поля E в металле:

$$E^{(2)}(z) = iq\int_0^\infty [E(t) - ir_e E^{(2)}(t)]\,k(t - z)\,dt, \quad z \geqslant 0, \qquad (3)$$

где

$$k(t-z)=\int_1^\infty\left(\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{\varepsilon^3}\right)\exp\left[-(1+i\alpha)\gamma\mid t-z\mid\varepsilon\right]d\varepsilon, \quad (4)$$

$$q=\frac{3}{4}\alpha\gamma=\frac{3}{4}\frac{\omega a}{v}, \quad a=\left(\frac{m}{\mu_0 Ne^2}\right)^{1/2}.$$

Уравнение (3) с ядром (4) решается методом Винера—Хопфа. Построенное решение подробно исследуется. Получаются асимптотические формулы для коэффициентов отражения и поглощения. Ю. Н. Днестровский

3137. Теоретическое изучение распределения электронов в неоднородной анизотропной плазме Лоренца. Жансель, Кахан (Étude théorique de la distribution électronique dans un plasma lorentzien hétérogéne et anisotrope. Jancel Raymond, Kahan Théo), J. phys. et radium, 1959, **20**, № 1, 35—42 (франц.; рез. англ.)

Уравнение Больцмана для функции распределения электронов в плазме Лоренца при наличии электрического поля **E** и магнитного поля **B** имеет вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+v\nabla_2 f+[\Gamma+\omega\times v]\nabla_v f=J(f); \quad (1)$$

здесь $\Gamma=\frac{e}{m}\mathbf{E}$, $\omega=-\frac{e}{m}\mathbf{B}$, $J(f)$ — член столкновений, который в реферируемой работе выбирается в виде

$$J(f)=2\pi nv\int(f'-f)\,bdb, \quad (2)$$

где n — плотность тяжелых частиц. Таким образом, уравнение (1) с членом столкновений в виде (2) является линейным уравнением относительно функции распределения электронов f. Введем в пространстве скоростей сферические координаты и будем искать функцию f в виде

$$f(t, r, v)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}a_l^m(t, r, v)\,Y_l^m(\theta, \varphi), \quad (3)$$

где

$$Y_m^l(\theta, \varphi)=(-1)^m v^l\sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}}\times$$

$$\times\sin^{|m}\theta\frac{d^{|m|}}{d(\cos\theta)^m}P_e(\cos\theta)\,e^{im\varphi}.$$

Подставляя разложение (3) в уравнение (1), получим бесконечную систему дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка относительно коэффициентов $a_l^m(t, r, v)$. Вопросы, связанные с решением этой системы, в работе не обсуждаются.

Д. П. Костомаров

3138. Д. Исследование некоторых проблем о волнах в тяжелой жидкости. Брийуэ (Étude de quelques problèmes sur les ondes liquides de gravité. Brillouet Georges:—Thèse doct. sci. math., Fac. sci. Univ. Paris, 1956, Paris, Impr. Ministère Air, **1957**, 145 p.) (франц.)

Диссертация посвящена классической проблеме набегания волн на наклонный берег. Задача сводится к определению функции φ, гармонической внутри угла, который ограничен прямыми $y=0$ и $y=-kx$, где $k=\mathrm{tg}\alpha$, удовлетворяющей условиям $\varphi-\varphi_y=0$ при $y=0$, $\partial\varphi/\partial n=0$ при $y=-kx$.

Решения разыскиваются в классе функций, имеющих особенность в начале координат. Устанавливается характер этой особенности в зависимости от поведения функции на ∞.

Исследование существенным образом использует известный метод Леви (Lewy H., Bull. Amer. Math. Soc., 1946, **52**, № 9, 737—755).

Работа содержит очень подробный анализ общих вопросов этого метода и исследование разнообразных частных случаев, когда $\alpha=2\pi p/q$, где p и q — целые числа.

Рассмотрено много примеров, обсуждается возможность построения приближенных методов расчета параметров набегающих волн в отдельных частных случаях ($\alpha=2\pi/q$; $\alpha=1/2\pi$, $\alpha=\pi$ и т. д.).

Изложены основные результаты предшествующих исследований (Фридрихс, Леви, Изаксон, Стокер) и все их результаты выводятся единообразным методом. Одновременно устанавливается тождественность интуитивных методов Стокера и метода Леви и его принципиальное отличие от метода Изаксона.

Значительное место в работе занимают общие вопросы постановки задач. Проводятся необходимые упрощения (линеаризация и т. д.) и обсуждается смысл сделанных предположений. Н. Н. Моисеев

3139 Д. Устойчивость упругих тел с точки зрения математической теории упругости. Войцеховская К. Ф. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Объедин. уч. совет ин-тов физ., металлофиз. и матем. АН УССР, Киев, 1958

3140 Д. Нелинейные задачи перемещений и устойчивости гибких стержней. Горбовский Б. Е. Автореф. дисс. канд. техн. н., Моск. инж.-строит. ин-т, М., 1959

3141 Д. Граничные задачи равновесия некоторых призматических оболочек. Цховребадзе Д. С. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., АН ГрузССР, Тбилисск. матем. ин-т, Тбилиси, 1959

См. также: 2650, 2854, 3164, 3197, 3205, 3208, 3420, 3450—3462, 3508.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Редакторы *В. В. Немыцкий, Н. И. Мозжерова*

3142. Некоторые осцилляционные свойства линейных однородных уравнений. Зейналов С. С. Физ. вә рижазијјат инст. әсәрләри АзәрбССР Елмләр Акад., Тр. Ин-та физ. и матем. АН АзербССР, 1959, 8, 173—176 (рез. азерб.)

Известные свойства знакоопределенных матриц (см. книгу М. Г. Крейна и референта „Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем" 1950 г.) интерпретируются в применении к линейному интегральному уравнению с вырожденным интегральным ядром. Ф. Р. Гантмахер

3143. Об изменении резольвенты Фредгольма. Белман (On the variation of the Fredholm resolvent. Bellman Richard), Boll. Unione mat. ital., 1959, **14**, № 1, 78—81 (англ.; рез. итал.)

Устанавливается с помощью дифференцирования по параметру a, что если ядро $k(x, y)$ непрерывно относительно x и y для $0\leqslant x, y\leqslant 1$ и решение интегрально-

го уравнения $u(x) = v(x) + \int_a^1 k(x, y)\, u(y)\, dy$ можно записать в виде

$$u(x) = v(x) + \int_a^1 R(x, y, a)\, v(y)\, dy,$$

то резольвента $R(x, y, a)$ удовлетворяет уравнению

$$\partial R(x, y, a)/\partial a = -R(x, a, a)\, R(a, y, a).$$

Аналогично выводится формула:

$$\partial K(x, y, t)/\partial t = -\int_0^1 K(x, z, t)\, K(z, y, t)\, q(z)\, dz$$

для функции Грина $K(x, y, t)$ краевой задачи:

$u''(x) + [p(x) + tq(x)]\, u(x) = v(x); \quad u(0) = u(1) = 0.$

Ю. К. Ландо

3144. О распределении величин шаровых сечений в прозрачных средах конечной толщины. Бах (Über die Größenverteilung von Kugelschnitten in durchsichtigen Schnitten endlicher Dicke. Bach Günter. Mitt. Math. Semin. Giessen, 1959, № 57, 23 S., ill.) (нем.)

Решается важная для микроскопии задача о нахождении соотношения между распределением величин шариков в прозрачной среде и величин шаровых сечений в ее слое конечной толщины. Задача сводится к решению интегрального уравнения

$$g(r) = 2r \int_r^\infty \frac{G(R)\, dR}{\sqrt{R^2 - r^2}} + \delta G(r), \qquad (1)$$

где $G(R)$ — плотность распределения шариков радиуса R, $g(r)$ — плотность распределения круговых сечений радиуса r, δ — толщина слоя. Но $G(R)$ и $g(r)$, связанные уравнением (1), являются лишь приближениями „истинных" (принципиально всегда неизвестных) плотностей распределения $\bar{G}(R)$ и $\bar{g}(r)$. Поэтому дается оценка точности рассмотренных приближений. С помощью уравнения (1) получено также соотношение между средним значением и дисперсией плотностей распределения. Приведены примеры распределения плотностей. Даны графики кривых распределения и расчетные номограммы. Библ. 11 назв. А. Н. Хованский

3145. Некоторые вопросы теории бесконечных систем линейных интегральных уравнений и их приложения к математической физике. Коробейник Ю. Ф., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. 4. М., АН СССР, 1959, 26—27

3146. Об алгебраических интегральных уравнениях с неотрицательными коэффициентами. Шефер (Über algebraische Integralgleichungen mit nichtnegativen Koeffizienten. Schaefer Helmut), Math. Ann., 1959, 137, № 5, 385—391 (нем.)

Рассматривается нелинейное интегральное уравнение

$$\varkappa^n y^n(s) - \sum_{\beta=0}^{n-1} \varkappa^\beta y^\beta(s)\, a_\beta(s, y) = f(s), \qquad (I)$$

где

$$a_\beta(s, y) = \sum_{\alpha_1 + \ldots + \alpha_\nu = n-\beta} \int_\Omega \ldots \int_\Omega K_{\beta\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}(s, t_1, \ldots, t_\nu)\, y^{\alpha_1}(t_1) \ldots$$

$$\ldots y^{\alpha_\nu}(t_\nu)\, dt_1 \ldots dt_\nu,$$

причем $\varkappa$ — комплексный параметр, а аргумент s искомой функции $y(s)$ пробегает компактное множество Ω k-мерного евклидова пространства; $a_\beta(s, y)$ — однородные интегральные формы $n - \beta$-го порядка. Уравнение вида (I) называется алгебраическим интегральным уравнением n-й степени. Предполагается, что все ядра $K_{\beta\alpha_1 \ldots \alpha_\nu} \geqslant 0$ и непрерывны по всем переменным. Через $C(\Omega)$ обозначается пространство всех непрерывных вещественных функций $\varphi(s)$ на Ω, причем $\sup_{s \in \Omega} |\varphi(s)| = \|\varphi\|$ определяет расстояние φ от нуля. В пространстве $C(\Omega)$ выделяется положительный конус $K(\Omega)$, для которого $\varphi(s) \geqslant 0$. Для любого $\varkappa > 0$ наибольший положительный корень $y = F(\varkappa, w, f)$ уравнения

$$\varkappa^n y^n - \sum_{\beta=0}^{n-1} \varkappa^\beta y^\beta a_\beta(s, w) = f,$$

где $f \in \Omega$ и $w \in \Omega$, является монотонной функцией, т. е. $F(\varkappa_1, w_1, f_1) \leqq F(\varkappa_2, w_2, f_2)$, если $\varkappa_2 \leqslant \varkappa_1$, $w_1 \leqslant w_2$, $f_1 \leqslant f_2$. Составив последовательность $\{y_n\}$ с помощью рекуррентного уравнения

$$y_{m+1} = F(\varkappa, y_m, f), \quad y_0 = 0,$$

мы получим, что $y_m \leqslant y_{m+1}$. Доказывается, что всегда существует такое число $\varkappa_0 \geqslant 0$, что при $\varkappa > \varkappa_0$ имеет место равномерная сходимость последовательности y_m к предельной функции $\overset{*}{y}$, удовлетворяющей уравнению (1). Собственным значением $\varkappa$ называется то значение $\varkappa$, для которого уравнение (I) при $f = 0$ имеет нетривиальное положительное решение $y(s)$, которое мы назовем соответствующей собственной функцией. Если при некотором $\varkappa > 0$ и $f = 1$ последовательность y_m расходится, то существует собственное значение $\varkappa_0 \geqslant \varkappa$ уравнения (1). Если одно из ядер уравнения (I) $K_{\beta_0\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}$ удовлетворяет условию $K_{\beta_0\alpha_1 \ldots \alpha_\nu} \geqslant C > 0$, то последовательность y_m расходится при $f = 1$ и $\varkappa < (C^\nu m\Omega)^{\frac{1}{n-\beta_0}}$, где $m\Omega = \int_\Omega dt$. Отсюда следует, что в этом случае существует собственное значение $\varkappa_0 \geqslant (C^\nu m\Omega)^{\frac{1}{n-\beta_0}}$ уравнения (1).

Ю. Л. Рабинович

3147. Об обобщении теории нелинейных интегральных уравнений Н. Н. Назарова. Лобачев С. В., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. 4. М., АН СССР, 1959, 33—34

3148. Об интегральных уравнениях с экспоненциальными нелинейностями. Рутицкий Я. Б., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. 4. М., АН СССР, 1959, 37

3149. Об условиях разрешимости одного класса интегро-дифференциальных уравнений. Ким Е. И., Докл. АН СССР, 1959, 125, № 4, 723—726

Интегро-дифференциальное уравнение

$$\Psi(y, t) + \sum_{k=1}^m A_k \int_0^t d\tau \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} t^k \frac{\partial^k \Psi(\eta, \tau)}{\partial \eta^k} (t-\tau)^{\frac{k}{2}-1} G(y-\eta, t-\tau)\, d\eta = \varphi(y, t) \quad (1)$$

$$G(y, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{y^2}{4a^2 t}\right)$$

преобразованием Фурье переводится в интегральное уравнение

$$\tilde{\Psi}(s, t) + \int_0^t K_0(s, t-\tau)\, \tilde{\Psi}(s, \tau)\, d\tau = \tilde{\varphi}(s, t), \quad (2)$$

где $K_0(s, t) = \sum_{k=1}^m A_k s^k t^{\frac{k}{2}-1} \exp(-s^2 a^2 t)$. Уравнение

(2) решается операционным методом; результат имеет вид $\widetilde{\Psi}=\widetilde{\varphi}-\int_0^t \Gamma_0(s,t-\tau)\widetilde{\varphi}(s,\tau)\,d\tau$, где $\Gamma_0(s,t)$ — некоторая (явно выписанная) целая функция 2-го порядка роста. Поэтому (2) можно решать в функционалах на пространстве Z_r^r $(r>2)$ (РЖМат, 1955, 3291). Отсюда вытекает существование и единственность решения уравнения (1) в функционалах над пространством $Z_{r'}^{r'}$ $(r'<2)$ в частности, единственность в классе обычных функций, возрастающих при $|y|\to\infty$ не быстрее $\exp C|y|^{2-\varepsilon}$, $\varepsilon>0$.

В том случае, когда все корни уравнения $\sum_{k=0}^{m} A_{m-k}x^k=$ удовлетворяют условиям $\mathrm{Re}\,(x_k^2)>-1$, уравнение (1) имеет решение в классе обычных функций, интегрируемых вдоль оси вместе с некоторым числом производных. Г. Е. Шилов

3150. Решение одного класса интегро-дифференциальных уравнений с частными производными методом Фурье. Лихтарников Л. М., Мякишев В. П., Докл. АН СССР, 1959, **127**, № 3, 516—519

Рассматривается интегро-дифференциальное уравнение

$$L[u]=f(x,t)+\lambda\iint\limits_{(D)} k(x,t;z,\sigma)\,M[u]\,dzd\sigma \qquad (1)$$

при начальных условиях $u(x,0)=\varphi(x)$, $u_t'(x,0)=\psi(t)$ и краевых условиях $a_0u(a,t)+b_0u_x'(a,t)=0$, $a_1u(b,t)+b_1u_x'(b,t)=0$, где $L[u]$ — линейный дифференциальный оператор второго порядка гиперболического типа, $M[u]$ — линейный дифференциальный оператор первого порядка, область интегрирования (D) — прямоугольник $a\leqslant x\leqslant b$, $0\leqslant t\leqslant t_0$; все коэффициенты операторов $L[u]$ и $M[u]$, а также ядро $k(x,t;z,\sigma)$ — заданные непрерывные функции в $a\leqslant x\leqslant b$, $0\leqslant t\leqslant t_0$, $a\leqslant z\leqslant b$, $0\leqslant\sigma\leqslant t_0$, где a_0, b_0, a_1, b_1 — постоянные, λ — параметр.

Предполагается, что $k(x,t;z,\sigma)=\sum_{n=1}^{\infty}L_n(t,z,\sigma)X_n(x)$, $f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n(t)X_n(x)$. Интегро-дифференциальное уравнение (1) приводится к дифференциальному уравнению

$$L[u]=f(x,t)+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(t)X_n(x), \qquad (2)$$

$$a_n(t)=\lambda\iint\limits_{(D)}L_n(t,z,\sigma)\,M[u]\,dzd\sigma.$$

Решение уравнения (2) ищется в виде ряда $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)T_n(t)$, определение общего члена которого приводится к решению двумерного интегрального уравнения Фредгольма второго ряда. Приведено обоснование примененного в статье метода Фурье для случая, когда определитель Фредгольма $D(\lambda)\neq 0$. М. И. Розовский

3151. Интегральные уравнения обратных краевых задач. Андрианов С. Н., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956, **4**. М., АН СССР, 1959, 14

3152 Д. Об интегро-дифференциальном уравнении переноса частиц Владимиров В. С. Автореф. дисс. докт. физ.-матем. н., Матем. ин-та АН СССР, М., 1959

См. также: 3017, 3204, 3463, 3500.

АНАЛИЗ (ДРУГИЕ ВОПРОСЫ)

Редакторы *В. В. Немыцкий, В. К. Захаров*

3153. Логарифмические последовательности. Милкман (Logarithmic sequences. Milkman Joseph), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, **8**, № 6, 1114—1124 (англ.)

Последовательность из n вещественных чисел a_i $(i=1,\ldots,n)$ автор называет логарифмической последовательностью порядка n, если 1) $0<a_i\leqslant 1$, 2) $a_k+a_l<a_r+a_s$, когда $kl<rs$, 3) $a_k+a_l=a_r+a_s$, когда $kl=rs$. Пусть $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_t$ есть последовательность всевозможных произведений rs (где r и s — любые натуральные числа $\leqslant n$), расположенная в возрастающем порядке, а s_i при $i=rs$ есть сумма a_r+a_s. Логарифмическая последовательность $m_1, \ldots, m_n$ по определению является максимизирующей, если для любой логарифмической последовательности $a_1, \ldots, a_n$ справедливо неравенство $\Delta(m)\geqslant\Delta(a)$, где $\Delta(a)$ есть наименьшая из разностей $s_{i+1}-s_i$, соответствующих последовательности a.

Устанавливается ряд свойств логарифмических последовательностей, доказывается существование максимизирующей последовательности и исследуется процесс ее построения. А. Ф. Тиман

3154. Биномиальная теорема. (The binomial theorem), Electron. and Radio Engr, 1959, **36**, № 4, 140—142 (англ.)

3155. Два замечания об арифметической прогрессии. Перейра-Мунис (Duas notas sôbre progressões aritméticas. Pereira Muniz Paulo), Matematica, 1959, **4**, № 11, 49—51 (порт.)

3156. Вычисление объема шара. Алмейда-Брага (Cálculo do volume da esfera. Almeida Braga Nelson de), Matemática, 1958, **3**, № 10, 45—47 (порт.)

3157. Заметка о некоторых неравенствах. Цулауф (Note on some inequalities. Zulauf A.), Math. Gaz., 1959, **43**, № 343, 42—44 (англ.)

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_7$ — некоторые неотрицательные числа, $B_k=x_k+x_{k+1}$, где $x_k=x_{k-7}$, если $k>7$; числа $B_1, B_2, \ldots, B_7$ не равны нулю. Доказывается несколько неравенств, например, $\sum x_k/B_{k+1}\geqslant 3$. В. А. Голубев

3158. Комплексные корни действительных полиномов. Баллантайн (Complex roots of real polynomials. Ballantine J. P.), Amer. Math. Monthly, 1959, **66**, № 5, 411—414 (англ.)

Излагается метод приближенного вычисления комплексных корней. В. В. Немыцкий

3159. Новое доказательство теоремы разложения Лапласа. Гашпар (A Laplace-féle kifejtési tétel egy új bizonyítása. Gáspár Gyula), Magyar tud akad. mat. és fiz. tud. oszt. közl., 1956, **6**, № 3-4, 491—495 (венг.)

Доказательство основано на аксиоматическом рассмотрении детерминанта, введенного в одной прежней работе автора (РЖМат, 1957, 102). L. Fuchs

3160. Определение площади в полярных координатах. Зейтлин (On plane area in polar coordinates. Zeitlin David), Amer. Math. Monthly, 1959, **66**, № 2, 135—136 (англ.)

3161. Дифференцирование повторного интеграла. Кристиано (Diferentiation of the repeated integral.

Christiano John G.), Amer. Math. Monthly, 1959, **66**, № 2, 127—129 (англ.)

3162. Вычисление двойных интегралов при больших значениях параметра. Шако (Calcul d'intégrales doubles pour de grandes valeurs d'un paramètre. Chako Nicholas), C. r. Acad. sci., 1958, **247**, № 6, 637—639 (франц.)

Рассматривается вычисление встречающегося в физике и небесной механике интеграла

$$U(\kappa) = \iint_D g(x, y)\, e^{ik\varphi(x,y)}\, dxdy \qquad (1)$$

при больших значениях параметра k; $g(x, y)$ предполагается регулярной или дифференцируемой до N-го порядка в D; $\varphi(x, y)$ — несграниченно дифференцируемой; (x_0, y_0) — критическая точка стационарного типа внутри D, $\varphi_x = 0$, $\varphi_y = 0$. Метод, применяемый в этой работе (РЖМат, 1959, 3929), опирается на результаты Пуанкаре и Пикара для нахождения вычетов двойных интегралов от рациональных или алгебраических функций. Интеграл (1) переписывается в виде повторного интеграла и интегрируется по частям. При больших значениях k главная часть $U^{(1)}(k)$ полученного результата, которая на основании формулы, найденной Пуанкаре (Poincaré H., Acta Math., 1886 — 1887, **9**, 321), выражается следующим образом:

$$U^{(1)}(k) = 2\pi i\varepsilon e^{ik\varphi(x_0,y_0)} \frac{g(x_0, y_0)}{k\sqrt{|\Delta|}} \quad (\Delta = \varphi_{xx}\varphi_{yy} - \varphi_{xy}^2) \qquad (2)$$

представляет приближение (1), имеющее многочисленные приложения. Далее выводятся выражения членов высшего порядка в асимптотическом разложении $U(k)$.

А. Г. Школьник

3163. Независимость от пути криволинейных интегралов. Зиммерберг (Independence of path for line integrals. Zimmerberg H. J.), Amer. Math. Monthly, 1959, **66**, № 4, 303—306 (англ.)

3164. Обобщенные степени разностного оператора. Самнер (Generalized powers of the difference operator. Sumner D. B.), Trans. Amer. Math. Soc., 1958, **87**, № 2, 526—540 (англ.)

Дается обобщенное определение степеней $\Delta^\lambda f(x)$ разностного оператора $\Delta f(x) = [f(x + h) - f(x)]/h$ на случай любого вещественного показателя λ с теоретико-функциональным обоснованием области определения таких операторов. Для этой цели использована связь между оператором сдвига на шаг h и оператором дифференцирования $D : h\Delta f(x) = [\exp(hD) - 1] f(x)$, что дает возможность определить Δ^λ на основе некоторого представления функции $[\exp(ht) - 1]^\lambda$. Подробности следующие. Пусть $\alpha_0(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$, $\alpha_p(t) = \int_{t-1}^{t} \alpha_{p-1}(v)\, dv$, $(p = 1, 2, \ldots)$, $\alpha_\lambda(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\lambda}{n} \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} (-)^{n-p} \alpha_p(t)$ $(\lambda \geqslant 0)$, $\delta(t) = (e^t - 1)/t$. Тогда автор доказывает, что $\delta^\lambda(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tu} d\alpha_\lambda(u)$, и определяет оператор $\delta^\lambda(hD)$ в виде $\delta^\lambda(hD) f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x + hu)\, d\alpha_\lambda(u)$. Основное свойство оператора $\delta^\lambda(hD)$ выражено в теореме I: Если λ и μ — положительные числа и $f(x) \in \mathfrak{E}(h, k)$, т. е. $f(x)$ есть целая функция экспоненциального порядка k, такая, что $0 < k|h| < 2\pi$, то $\delta^\mu(hD) f(x)$ также имеет экспоненциальный порядок k и $\delta^\lambda(hD)\,[\delta^\mu(hD) f(x)] = \delta^{\lambda+\mu}(hD) f(x)$. Пусть теперь N — неотрицательное целое число, $0 \leqslant \lambda < 1$, и $f(x) \in \mathfrak{E}(h, k)$. Тогда любая неотрицательная степень оператора Δ определяется так:

$$\Delta^{N+\lambda} f(x) = D^{N+\lambda}\,[\delta^{N+\lambda}(hD) f(x)] =$$

$$= D^{N+\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} f(x + ht)\, d\alpha_{N+\lambda}(t),$$

где дифференциальный оператор $D^{N+\lambda}$ употребляется в известном из операторного исчисления смысле:

$$D^{N+\lambda} F(x) = D^{N+1}\,[D^{-(1-\lambda)} F(x)] =$$

$$= D^{N+1} \int_0^x \frac{(x - t)^{-\lambda} F(t)}{\Gamma(1 - \lambda)}\, dt$$

(см., например, стр. 110 работы Микусинского — РЖМат, 1957, 2475). Чтобы распространить определение степеней разностного оператора на случай отрицательных показателей, автор вводит функции $\varphi_1(y) = e^{\pi y}/(e^{\pi y} + e^{-\pi y})$, $\varphi_{n+1}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(y - v)\, d\varphi_1(y)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и доказывает, что

$$\delta^{-n}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[t\left(iy - \frac{n}{2}\right)\right] d\varphi_n(y), \quad (n = 1, 2, \ldots);$$

тогда вводится определение оператора

$$\delta^{-n}(hD) f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f[x + h(iy - n/2)]\, d\varphi_n(y) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

После этого вводится оператор $\Delta^{-N-\lambda}$ (N — целое неотрицательное, $0 \leqslant \lambda < 1$) по формальной схеме

$$\Delta^{-N-\lambda} = \left[\frac{hD}{\exp(hD) - 1}\right]^{N+\lambda} =$$

$$= \delta^{-N-1}(hD)\, \delta^{1-\lambda}(hD)\, D^{-N-\lambda},$$

где все три оператора, стоящие в композиции справа, уже определены и обоснованы. Оператор $\Delta^{-N-\lambda}$ является обращением ранее введенного оператора $\Delta^{N+\lambda}$, как это показывает теорема II: Пусть N — неотрицательное целое число, $0 \leqslant \lambda < 1$ и $f(x) \in \mathfrak{E}(h, k)$; тогда, если $F(x) = \Delta^{N+\lambda} f(x)$, то $\Delta^{-N-\lambda} F(x) = f(x)$. Автор отмечает, что $\lim_{h \to 0} \Delta^{-N-\lambda} F(x) = \int_0^x \frac{(x - t)^{N+\lambda-1} F(t)}{\Gamma(N + \lambda)}\, dt$, так что решение разностного уравнения $\Delta^{N+\lambda} f(x) = F(x)$ при предельном переходе $h \to 0$ переходит в решение соответствующего дифференциального уравнения; как указал Нёрлунд, этим свойством обладает введенное им „главное решение" (Hauptlösung) обычного уравнения $\Delta f(x) = F(x)$ (Nörlund N. E., Differenzenrechnung, Berlin, 1924, стр. 59). По ходу изложения автор пользуется обобщенными числами $B_n^{-\lambda}$ и полиномами $B_n^{-\lambda}(x)$ Бернулли любого вещественного порядка λ, которые вводятся автором путем разложения в ряды функций $\delta^\lambda(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n B_n^{-\lambda}/n!$, $\delta^\lambda(t) \exp(xt) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n B_n^{-\lambda}(x)/n!$, и доказывает для этих чисел и полиномов ряд важных свойств, обобщающих свойства обычных бернуллиевых чисел и полиномов. В статье имеются опечатки.

А. П. Шварцман

3165. Линейные функциональные уравнения с n-периодическим функциональным аргументом. Гермэнеску (Ecuații funcționale liniare cu argument funcțional n-periodic. Ghermănescu M.), Bul.

ştiinţ. Acad. RPR. Sec. mat. şi fiz., 1957, **9**, № 1, 43—78 (рум.; рез. русск., франц.)

Рассматриваются линейные функциональные уравнения с постоянными коэффициентами

$$E(f) = a_0 f + a_1 f' + \ldots + a_{n-1} f^{n-1} = 0, \quad (1)$$

$$E(f) = a_0 f + a_1 f' + \ldots + a_{n-1} f^{n-1} = g(M) \quad (2)$$

в многомерном пространстве с n-периодическим функциональным аргументом $\theta(M)$, т. е. воспроизводящим начальную точку M после n последовательных итераций.

Автор рассматривает функции, удовлетворяющие условиям $f^k = f^k(M) = f(M_k) = f[\theta(M_{k-1})]$, $f^{-k} = f^{-k}(M) = f(M_{-k}) = f[\theta(M_{-k-1})]$, которые он называет функционально непрерывными функциями относительно рассматриваемого функционального аргумента $\theta(M)$.

Сначала определяется множество функционально непрерывных решений уравнения (1), которому сопоставляется характеристическое уравнение

$$E(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} = 0. \quad (3)$$

Уравнение (1) разрешимо на множестве функционально непрерывных функций только тогда, когда уравнение (3) имеет общие корни с двучленным уравнением $1 - x^n = 0$. Множества функционально непрерывных решений уравнений, рассматриваемых во второй части работы, зависят от одной произвольной функции.

В третьей части определяется множество функционально непрерывных решений уравнения (2). В качестве приложения автор решает функциональные уравнения, которым удовлетворяют Г-функция Эйлера или ζ-функция Римана.

В последней части исследуются функционально разрывные решения (т. е. решения, не являющиеся функционально непрерывными) рассмотренных уравнений.

S. Marcus

3166. Интерполирование рядом по итерированным функциям. Таргонский (Interpolation durch Reihen iterierter Funktionen. Targonski Georg von. Comment. phys-math., 1957, **20**, № 9, 12 s., ill.) (нем.)

Как обычно, n-я итерированная функция функции $\varphi(x)$ обозначается через $\varphi_n(x)$, т. е. $\varphi_n(x) = \varphi[\varphi_{n-1}(x)]$. Для того чтобы результаты предстали в более изящной и обозримой форме, удобнее записывать функцию $\varphi(x)$ в виде $\varphi(x) = h[ch_{-1}(x)]$, где $h_{-1}(x)$ — функция, обратная к $h(x)$, а c — некоторая константа, отличная от единицы. При весьма общих предположениях относительно функции $\varphi(x)$ можно найти соответствующую функцию $h(x)$. В работе сначала рассматривается частный случай, когда $h(x) = \sin x$, а $c = 4$. Тогда $\varphi(x) = \sin(4 \arcsin x)$, $\varphi_n(x) = \sin(4^n \arcsin x)$. В качестве узлов интерполирования выбирается монотонно убывающая к нулю последовательность чисел

$$\alpha_n = \varphi_{-n}(1) = \sin \frac{\arcsin 1}{4^n} = \sin \frac{\pi}{2 \cdot 4^n}.$$

Ставится задача найти непрерывную на отрезке $[-1, +1]$ функцию $F(x)$ в виде

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \varphi_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \sin(4^n \arcsin x) \quad (1)$$

по условиям

$$F(\alpha_n) = \xi_n, \quad \xi_n = O\left(\frac{1}{R^n}\right), \quad R > 1. \quad (2)$$

Доказывается, что при указанных предположениях существует единственное решение, причем ряд (1) сходится абсолютно и равномерно на $[-1, +1]$. Автор отмечает, что результат остается в силе, если вместо функции $\varphi(x) = \sin x$ рассмотреть функцию $\Phi(x) = h[ch_{-1}(x)]$, $c > 1$, и подчинить $h(x)$ следующим условиям: $h(0) = 0$; $|h(x)| < x$ и $|h(x)| < M$ при $0 \leqslant x < \infty$; существует такое число α_0, что при всех $n \geqslant 1$ $h[c^n h_{-1}(\alpha_0)] = 0$; $h(x)$ непрерывна, положительна и строго монотонна в интервале $0 < x \leqslant \alpha_0$. Указывается широкий класс функций $h(x)$, обладающих требуемыми свойствами.

В. С. Виденский

3167. Геометрические тела вращения. Поргес (Solids of revolution. Porges Arthur), Amer. Math. Monthly, 1959, **66**, № 4, 302 (англ.)

3168. О точке, наименее уклоняющейся (в смысле П. Л. Чебышева) от данной конечной системы плоскостей и точек. Шефтель З. Г., Докл. АН СССР, 1959, **125**, № 2, 289—292

В n-мерном евклидовом пространстве рассматривается система плоскостей l_i и точек $x^{(j)}$:

$$l_i = a_{i1} x_1 + \ldots + a_{in} x_n - b_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, m_1), \quad (1)$$

$$x^{(j)} = (x_1^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)}) \quad (j = 1, \ldots, m_2)$$

и ищется точка, взвешенно наименее удаленная от этой системы, т. е. точка x_0, для которой достигается

$$\min_x \max_{i,j} \left\{ |a_{i1} x_1 + \ldots + a_{in} x_n - b_i|, \right.$$

$$\left. \lambda_j \left[\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_k^{(j)})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\},$$

где $\lambda_j > 0$ — вес точки $x^{(j)}$. Приводится характеристическое свойство точки x_0 и алгоритм для ее нахождения. Эти результаты обобщают соответствующие результаты референта (Зуховицкий С. И., Докл. АН УССР, 1959, № 6; (РЖМат, 1955, 1155, 1957, 6660), рассмотревшего случай системы (1), состоящей только из плоскостей или только из точек.

С. И. Зуховицкий

3169 К. Лекции по математическому анализу. Т. I. Пиньедоли (Lezioni di analisis matematica. Vol. I. Pignedoli Antonio. Padova, Ed. CEDAM, 1953, XV, 408 p., ill., 3500 L. Litogr.) (итал.)

Оглавление: 1. Введение действительного числа; 2. Комплексные числа; 3. Элементы комбинаторики и теории вероятностей; 4. Детерминанты; 5. Линейные уравнения и формы; 6. Элементы изучения точечных множеств; 7. Последовательности и пределы; 8. Вычисление пределов; 9. Числовые ряды; 10. Функции и их элементарные свойства; 11. Производная и дифференциал действительной функции одного действительного переменного; 12. Правила дифференцирования; 13. Основные теоремы дифференциального исчисления и их геометрические приложения; 14. Ряды Тейлора функций одного действительного переменного; 15. Алгебраические уравнения.

Настоящий первый том по подбору материала и системе изложения предназначен для начинающих инженеров и учителей. Определения и теоремы сформулированы ясно, однако преднамеренно доказаны не всегда точно; но в целом книга дает достаточно хорошую картину классических теорем анализа. Например, в п. 1 в основном только рассказывается, а в п. 15 рассматривается только элементарная теория алгебраических уравнений до 4-го порядка в области комплексных чисел; в п. 11 вводится также интегральное исчисление. В остальных пунктах нет недостатка в несистематических высказываниях из современного анализа.

G. Aumann

Перевод из Zbl. Math., 1955, **52**, № 1-5, 45.

3170 К. Лекции по математическому анализу. Т. I. 11-е изд. Сансоне, Конти (Lezioni di analisi matematica. Vol. I. 11a ed. Sansone Giovanni, Conti Roberto. Padova, C. E. D. A. M., 1958, XVI, 556 p., ill., 4000 L. — Litogr.), Bibliogr. naz. ital., 1958, **1**, № 3, 106 (итал.)

3171 К. Математический анализ. V. Пейович (Математичка анализа. V. Пејовић Т. Београд, Грађевинска књига, 1957, 220 с., ил. Bibliogr. Jugosl., 1957, 8, № 18, 742 (сербо-хорв.)

3172 К. Сборник задач по математическому анализу. 2-е изд. Берман (Zbierka úloh z matematickej analýzy. 2. vyd. Berman G. N. Prekl. z. ruš. Bratislava, SVTL, 1957, 459 s., il., 36. 50 Kčs.). Bibliogr. katal. ČSR. Slov. knihy, 1958, **9**, № 3, 88 (словацк.)
Перевод с русского (РЖМат, 1957, 7119 к).

3173 К. Интегральное исчисление. Ч. II. Применения. Кюлейн (Integralrechnung. Teil 2. Anwendungen. Kühlein Theo. Berlin, Mentor-Verl., 1958, 125 S., ill., 3.—DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1959, **A**, № 4, 302 (нем.)

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

3174. Об одном обобщении понятия монотонной последовательности. Винце (A monoton sorozat fogalmának egyik általánosítása. Vincze Endre), Nehézipari müsz. egyet. közl., 1957, № 1, 317—326 (венг.)
Обобщается определение монотонной последовательности. Последовательность $\{f(n)\}$ $(n=1,2,\ldots)$ называется p-монотонной (p — натуральное число), если имеет место $f(n+p)\geqslant f(n)$ $(n=1,2,\ldots)$ либо $f(n+p)\leqslant f(n)$ $(n=1,2,\ldots)$ (В первом случае $\{f(n)\}$ называется p-монотонно возрастающей, во втором — p-монотонно убывающей). Для $p=1$ это определение совпадает с определением монотонной последовательности. Указывается, что классические теоремы о монотонных последовательностях переносятся на p-монотонные последовательности. Далее доказывается следующая теорема: Если последовательность $\{f(n)\}$ $(n=1,2,\ldots)$ $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$-монотонна и ограничена, а числа $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$ взаимно простые, тогда $\{f(n)\}$ сходится. В конце статьи рассматривается числовой пример. P. Szűsz

3175. О суммируемости ограниченных последовательностей непрерывными методами. Орлич (On the summability of bounded sequences by continuous methods. Orlicz W.), Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1958, **6**, № 9, 549—556 (англ., рез. русск.)
Пусть даны функции $\varphi_n(\tau)$, непрерывные в промежутке $[0, T]$, где T может быть также бесконечным. Числовая последовательность $x=\{t_n\}$ называется суммируемой методом Φ к $\Phi(x)$, если: 1) ряды $\Phi(\tau, x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\varphi_\nu(\tau)\,t_\nu$ сходятся при $\tau\in[0, x]$ и 2) существует предел $\lim_{\tau\to T-}\Phi(\tau, x)=\Phi(x)$. Метод Φ называется непрерывным, если при каждой последовательности x, удовлетворяющей условию 1, ряды $\Phi(\tau, x)$ равномерно сходятся на сегменте $[0, t]$, где $0<t<T$. Общая теория непрерывных методов суммирования разработана Влодарским (РЖМат, 1956, 5305—5306), но понятие непрерывного метода у автора несколько более общее. Чисто функционально-аналитическими методами автор устанавливает разные необходимые и достаточные условия для того, чтобы непрерывный метод Φ не суммировал ни одной ограниченной расходящейся последовательности. Соответствующий вопрос для матричных методов суммирования исследовали Мазур и Орлич (РЖМат, 1956, 4607), а также Виланский и Целлер (РЖМат, 1956, 5939), но их доказательства содержат специальные леммы, не доказанные методами функционального анализа. Г. Ф. Кангро

3176. Теоремы о некоторых методах суммирования. Боруэйн (Theorems on some methods of summability. Borwein D.), Quart. J. Math., 1958, **9**, № 36, 310—316 (англ.)
Пусть s_n $(n=0, 1, 2, 3,\ldots)$ — произвольная последовательность комплексных чисел,

$$t_n=\sum_{r=0}s_r\binom{n}{r}\sum_{\nu=0}^{n-r}(-1)^\nu\binom{n-r}{\nu}\mu_{r+\nu} \qquad (1)$$

— ее средние Хаусдорфа, порожденные данной последовательностью μ_n $(n=0, 1, 2, 3,\ldots)$, а

$$(1-x)^{\lambda+1}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+\lambda}{n}s_n x^n \quad (0\leqslant x<1)$$

$$-\frac{1}{\ln(1-x)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s_n}{n+1}x^{n+1} \quad (0\leqslant x<1)$$

— ее A_λ — средние $(\lambda\geqslant 1)$ соответственно при $\lambda>-1$ и $\lambda=-1$.
Устанавливается ряд теорем о соотношениях между такими методами суммирования и их произведениями.
Специально рассматриваются случаи, когда $\mu_n=(n+1)^{-\alpha}$, $\mu_n=\binom{n+\alpha}{n}^{-1}$ $(\alpha>-1)$, соответствующие методам Гёльдера и Чезаро порядка α, а также некоторые другие, связанные с ними методы суммирования.
Отметим один из таких результатов. Если (C^*, α) есть метод суммирования (1), соответствующий системе чисел $\mu_n=\binom{n+\alpha}{n}^{-1}$, когда $\alpha>-1$ и $\mu_n=\binom{n-\alpha}{n}$, когда $\alpha\leqslant -1$, то каким бы ни было вещественное число γ при $\alpha>\beta$, всякая последовательность s_n, суммируемая методом (C^*, γ), будет суммируема методом $A_\lambda(C^*, \beta)$, $(A_\lambda(C^*, \beta)$ есть произведение методов (C^*, β) и $A_\lambda)$, а всякая последовательность s_n, суммируемая методом $A_\lambda(C^*, \beta)$, будет суммируема методом $A_\lambda(C^*, \alpha)$.
А. Ф. Тиман

3177. Матричные методы суммирования, регулярные для p-адического нормирования. Андри, Питерсен (Matrix methods of summation, regular for p-adic valuations. Andree Richard V., Petersen Gordon M.), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, **7**, № 2, 250—253 (англ.)
Устанавливаются условия регулярности для сходимости в смысле p-адического нормирования (Ван-дер-Варден, Современная алгебра, т. 2, ГТТИ, 1947).
Метод суммирования, определенный матрицей a_{mn}, регулярен в p-адическом поле Ω_p, если всякая сходящаяся последовательность $\{s_m\}$ равна своей преобразованной $t_m=\sum_{k=0}^{\infty}a_{mk}s_k$ в Ω_p. Последовательности $\{t_m\}$ и $\{s_m\}$ равны, если $\lim_{m\to\infty}\Phi(t_m-s_m)=0$, Φ обозначает p-адическую норму.
Теорема. Условия

$$\lim_{m\to\infty}\Phi(a_{mk})=0,$$

$$\lim_{m\to\infty}\Phi\left(\sum_{k=0}^{\infty}a_{mk}-1\right)=0,$$

$$\Phi(a_{mn})\leqslant M$$

необходимы и достаточны для p-регулярности матрицы $\{a_{mk}\}$. И. И. Огиевецкий

3178. Сумма произведений степеней. Мунк (Om potensproduktsummer. Munch Ove J.), Nord. mat. tidskr., 1959, **7**, № 1, 5—19 (датск.)

3179. Об обобщении некоторых итерационных последовательностей. Байрактаревич (Sur une généralisation de certaines suites itérées. Bajraktare-

vić M.), Publs Inst. math. Acad. serbe sci., 1958, **12**, 27—38 (франц.)

Обобщаются опубликованные ранее результаты автора (РЖМат, 1955, 1329; 1957, 1524, 1530). Рассматриваются некоторые свойства определенных функциональных последовательностей, предельные функции которых представляют собой решения системы функциональных уравнений $\xi_\mu(z,t)=\varepsilon f_\mu\{\xi_{\mu+1}(pz,t)\}$, где $0<\varepsilon\leqslant 1$, $|p|>1$, f_μ — неубывающие функции, $\mu=0,1,2\ldots$ Изменения переменных z, t ограничены некоторыми данными сегментами. И. П. Макаров

3180. Частные чезаровские суммы разложения в гармонический ряд. Робертсон (Cesaro partial sums of harmonic series expansions. Robertson M. S.), Pacif. J. Math., 1958, **8**, № 4, 829—846 (англ.)

Устанавливаются две теоремы, из которых приведем следующую:

Теорема 1. Пусть гармонический ряд $v(r,\theta)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k r^k\sin k\theta$ сходится для $0\leqslant r<1$ и $v(r,\theta)\geqslant 0$ при $0<\theta<\pi$, $0<r<1$.

Тогда при $k=0,1,2,3$ существует положительное число $R_n^{(k)}$, зависящее от n, что $S_n^{(k)}(r,\theta)\geqslant 0$ для $0<r<R_n^{(k)}$, $0\leqslant\theta<\pi$, но не всегда для $r>R_n^{(k)}$, где

$$R_n^{(k)}=1-(3-k)\frac{\log n}{n}+\frac{\log\log n}{n}-\frac{g_k+o(1)}{n},$$

$$k=0,\ 1,\ 2,$$

$$g_k=\log\left[\left\{1+\frac{k+1}{6}\left(1+(-1)^k\right)\right\}\mu\right],$$

причем

$$\mu=\begin{cases}1, & \text{если } n \text{ — четное},\\ \max\limits_{\pi<h<\frac{3\pi}{2}}\left|\dfrac{\sin h}{h}\right|=0.217\ldots, & \text{если } n \text{ — нечетное},\end{cases}$$

и $$R_{2n}^{(3)}=1,\quad R_{2n-1}^{(3)}>1,\quad n=1,2,3,\ldots;$$

$$\limsup(2n-1)\left(R_{2n-1}^{(3)}-1\right)\leqslant\alpha_0=1.07\ldots,$$

где α_0 — положительный корень уравнения $3-\alpha-3\mu e^{\alpha}=0$. Кроме того, $R_n^{(k)}$ является наибольшим значением r, для которого $\psi_n^{(k)}(r,\theta)$ неотрицательно для всех θ, где $\psi_n^{(k)}(r,\theta)$ определено для $k=0,1,2,3,\ldots$ некоторыми указанными в работе уравнениями. $S_n^{(k)}(r,\theta)$ обозначает n-ю чезаровскую сумму k-го порядка гармонического ряда.

Данная теорема обобщает результаты Саса (Szász O., Trans. Amer. Math. Soc., 1942, **52**, 12—22) и Фейера (Fejér L., J. London Math. Soc., 1933, **8**, 53—62).

И. И. Огиевецкий

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

3181. Ряды произведений бесселевых многочленов. Рагаб (Series of products of Bessel polynomials. Ragab F. M.), Canad. J. Math., 1959, **11**, № 1, 156—160 (англ.)

Многочленами Бесселя называются многочлены (РЖМат, 1953, 317, 2278) $\gamma_n(x,a,b)={}_2F_0\left(-n,a+n-1;\ -;\ -\frac{x}{b}\right)$, где ${}_pF_q$ — обозначение Похгамера для гипергеометрических функций ${}_pF_q(a_1,\ldots,a_p;\ b_1,\ldots,b_q;x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_1)_k\ldots(a_p)_k}{(b_1)_k\ldots(b_q)_k}\frac{x^k}{k!}$, причем $(a)_k=a(a+1)\ldots(a+k-1)$. В статье даны доказательства ряда формул, содержащих многочлены Бесселя, среди которых здесь укажем на две типичные:

$$\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}\frac{\Gamma(1-a-n-r)}{\Gamma(2-a-r)}(1-a-2r)\times$$

$$\times\gamma_r(x,a,b)\,\gamma_r(y,a,b)=\left(\frac{x}{b}+\frac{y}{b}\right)^n\gamma_n\left(\frac{xy}{x+y},a,b\right);$$

$$\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\frac{\Gamma(2-a)}{\Gamma(2-a-r)}\left(-\frac{2x}{b}\right)^r\gamma_r\left(\frac{1}{2}x,\ a,\ b\right)=$$

$$=\gamma_{2n}(x,\ a-2n,\ b).$$

А. К. Харадзе

3182. Полиномы Бесселя и числа Бернулли. Аль-Салам, Карлиц (Bessel polynomials and Bernoulli numbers. Al-Salam W. A., Carlitz L.), Arch. Math., 1958, **9**, № 6, 412—415 (англ.)

При помощи свойств чисел Бернулли доказываются соотношения ортогональности:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}U_m(x)\,U_n(x)\,d\alpha(x)=\delta_{mn}/(2n+1),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}V_m(x)\,V_n(x)\,d\beta(x)=3\delta_{mn}/(2n+3).$$

Первое из них было известно уже раньше (РЖМат, 1956, 1464). Здесь

$$U_n(x)=i^{-n}\sum_{2r\leqslant n}\frac{(2n-2r)!}{(2r)!\,(n-2r)!}\left(\frac{ix}{2}\right)^{n-2r}$$

$$V_n(x)=i^{-n}\sum_{2r\leqslant n}\frac{(2n-2r+1)!}{(2r+1)!\,(n-2r)!}\left(\frac{ix}{2}\right)^{n-2r}$$

$\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — кусочно-постоянные функции, имеющие соответственно скачки $4/[\pi(2k+1)]^2$ и $3/(\pi k)^2$ в точках $2/[\pi(2k+1)]$ и $1/(2\pi k)$. Результаты применяются для вычисления некоторого определителя, составленного из чисел Бернулли. Г. К. Энгелис

3183. Явная оценка выражений Турана-Сегё. Попов (L'evaluation explicite des expressions de Turan-Szegö. Popov Blagoj S.), C. r. Acad. sci., 1959, **248**, № 15, 2158—2159 (франц.)

Туран опубликовал недавно неравенство (Turán P., Časop. pěstov. mat. fys., 1950, **75**, 112—122), касающееся полиномов Лежандра $P_n(x)$, которому в последние годы были посвящены многочисленные исследования (Szegö G., Bull. Amer. Math. Soc., 1948, **54**, 401—405; Sansone G., Boll. Unione mat. ital., 1949, Ser. III, Anno IV, 221—223).

Оно имеет вид

$$\Delta_n(x)=[P_n(x)]^2-P_{n+1}(x)\,P_{n-1}(x)\geqslant 0,$$

где $n\geqslant 1$, $-1\leqslant x\leqslant 1$. Цель настоящей заметки дать новое доказательство этого неравенства.

Резюме автора

3184. Функциональные соотношения для обобщенных присоединенных функций Лежандра. Кёйперс, Мёленбелд (Related generalized Legendre's asso-

ciated functions. Kuipers L., Meulenbeld B.), Arch. Math., 1958, **9**, № 5, 394—400 (англ.)

В ранее опубликованных работах (РЖМат, 1958, 5676, 6675; 1959, 9216) авторы исследовали обобщенные присоединенные функции Лежандра $P_k^{m,n}(z)$ и $Q_k^{m,n}(z)$, образующие систему линейно независимых решений уравнения

$$(1-z^2)w'' - 2zw' + \left\{k(k+1) - \frac{m^2}{2(1-z)} - \frac{n^2}{2(1+z)}\right\}w = 0,$$

где z — комплексное переменное, принадлежащее плоскости с разрезом $(-\infty, 1)$, k, m и n — параметры, которые могут принимать любые вещественные или комплексные значения.

В настоящей заметке выводятся соотношения, дающие представления других интегралов рассматриваемого уравнения

$$P_k^{\pm m,\pm n}(z),\ Q_k^{\pm m,\pm n}(z),\ P_{-k-1}^{m,n}(z),\ Q_{-k-1}^{m,n}(z),$$
$$P_k^{n,m}(-z),\ Q_k^{n,m}(-z)$$

в виде линейной комбинации функций $P_k^{m,n}(z)$ и $Q_k^{m,n}(z)$.

Часть соотношений этого типа получена в последней из цитированных работ. Н. Н. Лебедев

3185. Замечание о некоторых специальных полиномах. Карлиц (A note on some special polynomials. Carlitz L.), Rev. mat. hisp.-amer., 1958, **18**, № 4, 140—145 (англ.)

Упомянутые полиномы $c_n(u, v)$ определяются при помощи производящей функции

$$(1+t)^u(1-t)^v = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(u, v)\, t^n.$$

Установлена их связь с полиномами Якоби: $c_n(u, v) = P_n^{(u-n,\, v-n)}(0)$ и получен ряд соотношений между этими полиномами. Исследуются некоторые свойства конгруэнтности для полиномов $C_n(u, v) = n!\, c_n(u, v)$.

Э. Я. Риекстыньш

3186. Неравенство Турана для общих функций Лагерра и Эрмита. Лакшмана-Рао (Turan's inequality for the general Laguerre and Hermite functions. Lakshmana Rao S. K.), Math. Student, 1958, **26**, № 1, 1—6 (англ.)

Доказывается, что для $n > 0$, $\alpha \geqslant 0$ функции $L_n^{\alpha}(x) \equiv \binom{n+\alpha}{\alpha}_1 F_1(-n; \alpha+1; x)$ и $H_n(x) \equiv 2^{n/2}\exp(x^2/2) \times D_n(\sqrt{2}\,x)$ удовлетворяют неравенству $\Delta(f_n) \equiv f_n^2(x) - f_{n+1}(x)\, f_{n-1}(x) \geqslant 0$ соответственно для $x > 0$ и для всех действительных x. Доказательство основывается на изучении экстремумов функций $e^{-x}x^{\alpha-1}\Delta(L_n^{\alpha})$ и $\exp(-x^2)\Delta(H_n)$. Попутно получаются некоторые рекуррентные соотношения, кот рые для целого n оказываются характерными для полиномов Эрмита и Лагерра. Например, если последовательность $\{f_n(x)\}$ полиномов обладает свойствами: 1) $f_n(x)$ имеет степень n;

2) $\frac{d}{dx}[\exp(-x^2)\Delta(f_n)] = -2\exp(-x^2)\, f_{n-1}(x)\, f_n(x)$;

3) $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = 2x$, то $f_n(x) \equiv H_n(x)$ для $n = 0, 1, 2, \ldots$ Г. К. Энгелис

3187. Заметка о приводимости двусторонних гипергеометрических рядов ${}_3H_3$. Джексон (A note on the reducibility of the bilateral hypergeometric series ${}_3H_3$. Jackson Margaret), J. London Math. Soc., 1958, **33**, № 4, 475—476 (англ.)

При помощи формулы, выражающей ${}_3H_3$ от единичного аргумента через ${}_3F_2$ (1) (Jackson M., J. London Math. Soc., 1948, **24**, 238—240), получено выражение для ${}_3H_3$ (1) при специализированных параметрах в виде линейной комбинации двух ${}_3F_2$ с аргументом -1; из него непосредственно следуют некоторые результаты Уиппла. М. Н. Олевский

3188. Некоторые тождества типа Кэли-Орра для базисных гипергеометрических рядов. Агарвал (Certain basic hypergeometric identities of the Cayley-Orr type. Agarwal Nirmala, Miss), J. London Math. Soc., 1959, **34**, № 1, 37—46 (англ.)

Даются базисные аналоги тождеств Чонди типа Кэли—Орра, найденных им для обычных гипергеометрических функций (Chaundy T. W., Proc. London Math. Soc., 1949, **50**, 56—74). Получены также некоторые общие разложения базисных гипергеометрических функций. М. Н. Олевский

3189. О произведении двух рядов Куммера. Хенричи (On the product of two Kummer series. Henrici Peter), Canad. J. Math., 1958, **10**, № 3, 463—467 (англ.)

Рассматривается разложение в степенной ряд функции

$$\Phi(z) \equiv {}_1F_1\left(\mu+\frac{1}{2}-\alpha;\ 2\mu+1;\ -z\right){}_1F_1\left(\nu+\frac{1}{2}-\beta;\ 2\nu+1;\ z\right) = \sum_0^{\infty} a_n z^n \qquad (1)$$

(α, β, μ, ν, z — комплексные, 2μ и 2ν не являются целыми отрицательными). Функция $\Phi(z)$, очевидно, инвариантна по отношению к преобразованию S: $(\alpha, \beta, \mu, \nu; z) \to (\beta, \alpha, \nu, \mu; -z)$, а также и к преобразованию T: $(\alpha, \beta, \mu, \nu; z) \to (-\alpha, -\beta, \mu, \nu; -z)$, что непосредственно не видно из (1). Автор задался целью найти образующую функцию для коэффициентов a_n, которая непосредственно отражала бы оба соотношения: $a_n(\beta, \alpha, \nu, \mu) = a_n(-\alpha, -\beta, \mu, \nu) = (-1)^n a_n(\alpha, \beta, \mu, \nu)$; фактически он находит 4 типа образующих функций вида $\psi(z) = \sum_0^{\infty} c_n a_n z^n$, где c_n — отношение произведений факториалов, а функция $\psi(z)$ представляет произведение обобщенных гипергеометрических функций. В одном из них факторизация функции $\psi(z)$ не отражает непосредственно инвариантность $\psi(z)$ ни относительно S, ни относительно T, в двух других она непосредственно видна только по отношению к S или только к T (к последним двум принадлежит (1) и соответственно следующее

$$F_1\left(\mu+\frac{1}{2}-\alpha;\ \mu+\nu-\alpha-\beta+1;\ -z\right){}_1F_1\left(\mu+\frac{1}{2}+\alpha,\ \mu+\nu+\alpha+\beta+1;\ z\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2\mu+1)_n\,(2\nu+1)_n}{(\mu+\nu+\alpha+\beta+1)_n\,(\mu+\nu-\alpha-\beta-1)_n}a_n z^n\Bigg);$$

в четвертом — очевидна инвариантность $\psi(z)$ относительно S и T. Она достигнута в записи

$${}_2F_0\left(\mu+\frac{1}{2}-\alpha,\ \nu+\frac{1}{2}+\beta;\ -z\right){}_2F_0\left(\mu+\frac{1}{2}+\alpha,\ \nu+\frac{1}{2}-\beta;\ z\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(2\mu+1)_n\,(2\nu+1)_n\,a_n z^n,$$

которая, впрочем, имеет формальный характер, поскольку ${}_2F_0$ — расходящийся ряд (если он не обрывается). Полученные формулы могут быть рассматриваемы как тождества типа Кэли—Орра. М. Н. Олевский

3190. Обобщенные выражения Турана для некоторых гипергеометрических рядов. Аль-Салам, Карлиц

(Generalized Turan expressions for certain hypergeometric series. Al-Salam W. A., Carlitz L.), Portug. math., 1957, **16**, № 3-4, 119—127 (англ.)

Устанавливается следующая формула:

$$\sum_{r=-m}^{m}(-1)^r\binom{2m}{m-r}{}_1F_1(a+r;c;x)\,{}_1F_1(a-r;c;x)=$$

$$=\sum_{k=m}^{\infty}A_k(m;a;c)\,x^{2k}\,[{}_1F_1(a+k;c+2k;x)]^2,$$

где

$$A_k(m;a,c)=$$

$$=(-1)^{k+m}\frac{(2m)!\,(c-1)_m\,(c+m-1)_k(a)_k(c-a)_k}{m!\,(c-a)_m\,(a)_m\,(c-1)_{2k}\,(c)_k\,(c)_{2k}}\binom{k-1}{m-1}.$$

Аналогичная формула получена и для функции ${}_2F_1$. Отмечены соответствующие частные случаи для полиномов Лагерра и Якоби. Приведены также два доказательства аналогичной формулы Тосано (РЖМат, 1958, 2163), относящейся к полиномам Эрмита.

М. Н. Олевский

3191. Интегралы, содержащие гипергеометрические функции и E-функции. Макроберт (Integrals involving hypergeometric functions and E-functions. Macrobert T. M.), Proc. Glasgow Math. Assoc., 1958, **3**, № 4, 196—198 (англ.)

Вычислен ряд интегралов, содержащих гипергеометрические и E-функции. Так, например, интеграл

$$\int_0^1\lambda^{\beta-1}(1-\lambda)^{\beta-\rho}\,F(\alpha,1-\alpha;\rho;\lambda)\times$$

$$\times E\{p;\alpha_r:q;\rho_s:z\lambda^{-l}(1-\lambda)^{-l}\}\,d\lambda$$

выражен опять через E-функцию от большего числа параметров (l — целое >0, $R(\beta)>0$, $R(\beta-\rho)>-1$, $|\arg z|<\pi$).

М. Н. Олевский

3192. Интегрирование E-функций и родственных функций по их параметрам. Рагаб (Integration of E-functions and related functions with respect to their parameters. Ragab F. M.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wet. 1958, **A61**, № 3, 335—340; Indagationes math., 1958, **20**, № 3, 335—340 (англ.)

В дополнение к предыдущей работе (РЖМат, 1959, 533) автор вычисляет еще 3 интеграла, содержащих произведения показательной функции на E-функцию и произведение комбинации Г-функций на показательную и гипергеометрическую функции. Так, например, интеграл

$$\int u^{-\xi}E(\alpha_1,\ldots,\alpha_p;\alpha+\xi,\beta-\xi:q;\rho_s:z)\,d\xi,\quad u>0,$$

взятый по мнимой оси, выражен также через E-функцию от большего числа параметров; путь интегрирования деформируется (если необходимо) так, чтобы точка $-\alpha$ лежала слева от него.

М. Н. Олевский

3193. Разложение E-функции в ряды из произведений E-функций. Рагаб (Expansion of an E-function in a series of products of E-functions. Ragab F. M.), Proc. Glasgow. Math. Assoc., 1958, **3**, № 4, 194—195 (англ.)

Устанавливается следующая формула:

$$E(\alpha,\beta,\gamma:\delta:z)=k\sum_{r=0}^{\infty}\frac{z^{-2r}}{r!\,\Gamma(\gamma+r)}\times$$

$$\times E(\gamma+r,\alpha+\beta-\delta+r:z)\,E(\gamma+r,\alpha_1+r,\beta_1+r:\delta+r:z),$$

где

$\alpha_1=\delta-\alpha$, $\beta_1=\delta-\beta$; $\Gamma(\alpha_1)\,\Gamma(\beta_1)\,\Gamma(\alpha+\beta-\delta)k=\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)$;

$z\neq0$, $|\arg z|<\pi$, $R(\alpha+\beta)>R(\delta)>R(\alpha)>0$,

$R(\delta-\beta)>0$.

М. Н. Олевский

3194. Интегралы, содержащие E-функции. Мак-Роберт (Integrals involving E-functions. MacRobert T. M.), Math. Z., 1958, **69**, № 3, 234—236 (англ.)

Вычислен интеграл

$$\int_0^1\lambda^{\alpha-1}(1-\lambda)^{\beta-1}\,E(p;\alpha_r:q;\rho_s:z\lambda^{-m}(1-\lambda)^{-n})\,d\lambda$$

при целых положительных m и n, $R(\alpha)>0$, $R(\beta)>0$; он выражен также через E-функцию от большего числа параметров. Этот интеграл при $p\geqslant q+1$ вычислен и при m и n целых отрицательных в предположении, что $R(\alpha+m\alpha_r)>0$, $R(\beta+n\alpha_r)>0$, $r=1,\ldots,p$; в этом случае его значение имеет более громоздкую форму.

М. Н. Олевский

3195. Разложение, содержащее вырожденные гипергеометрические функции. Рагаб (An expansion involving confluent hypergeometric functions. Ragab F. M.), Nieuw arch. wiskunde, 1958, **6**, № 2, 52—54 (англ.)

Доказывается следующая формула:

$$\frac{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\alpha-\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha-\gamma)\,\Gamma(\beta+\gamma)}E(\alpha-\gamma,\beta+\gamma::z)=$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\gamma;r)\,z^{-2r}}{r!\,\Gamma(\alpha+r)\,\Gamma(\gamma+r)}\times$$

$$\times E(\alpha+r,\beta+r::z)\,E(\gamma+r,\alpha-\beta-\gamma+r::z),$$

$$z\neq0,\quad|\arg z|<\pi;$$

ее легко записать в обозначениях, связанных с вырожденной гипергеометрической функцией.

М. Н. Олевский

3196. Базисные аналоги тождеств Кэли—Орра. Сингх (The basic analogues of identities of the Cayley—Orr type. Singh V. N.), J. London Math. Soc., 1959, **34**, № 1, 15—22 (англ.)

Для тождеств Кэли — Орра (Bailey W. N., Generalized hypergeometric series, 1935, гл. 10) и тождеств Хенричи (РЖМат, 1955, 2286) получены соответствующие базисные аналоги. Так, например, аналог тождеству Кэли получен в следующей форме: если

$${}_1\Phi_0(q^{\gamma-\alpha-\beta};z)\;{}_2\Phi_1(x^{2\alpha},x^{2\beta};x^{2\gamma};zx^{2\gamma-2\alpha-2\beta})=\sum_0^{\infty}a_nz^n,\ \text{то}$$

$${}_2\Phi_1(q^{\gamma-\alpha},q^{\gamma-\beta};q^{\gamma+1/2};z)\;{}_2\Phi_1(q^{\alpha},q^{\beta};q^{\gamma+1/2};zq^{\gamma+1/2-\alpha-\beta})=$$

$$=\sum_0^{\infty}\frac{(q\gamma;n)}{(q^{\gamma+1/2};n)}a_nz^n,$$

где

$$(q^{\alpha};n)=(1-q^{\alpha})(1-q^{\alpha+1})\ldots(1-q^{\alpha+n-1});\quad(q^{\alpha};0)=1.$$

М. Н. Олевский

3197. О свойствах n-параболических функций. Эйдельман (Про властивості n-параболічних функцій. Ейдельман С. Д.), Наук. зап. Чернівецьк. ун-т, 1955, **12**, 87—96 (укр.; рез. русск.)

Результаты данной работы, хотя и полученные автором независимо, содержатся, в основном, в вышедшей несколько ранее работе М. Николеску (РЖМат, 1958, 364).

А. Д. Мышкис

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

3198. Обобщенные преобразования Меллина. I. Фын Кан (Generalized Mellin transforms. I. Fung Kang), Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1957, 7, № 2, 242—267 (кит.; рез. англ.)

Реферат на перевод этой статьи см. РЖМат, 1959, 3925.

3199. Обращение обобщенных преобразований. Рунн (On the inversion of general transformations. Rooney P. G.), Canad. Math. Bull., 1959, 2, № 1, 19—24 (англ.)

Рассматривается обобщенное интегральное преобразование Фурье

$$g(x)=\frac{d}{dx}\int_0^\infty k(xy)\,f(y)\,\frac{dy}{y},\quad \frac{k(x)}{x}\in L_2(0,\infty),$$
$$f\in L_2(0,\infty).$$

Двойственной формулой служит

$$f(x)=\frac{d}{dx}\int_0^\infty k(xy)\,g(y)\,\frac{dy}{y}.$$

Последняя часто оказывается трудной для использования. В связи с этим предлагается техника нахождения конкретных формул обращения для обобщенных преобразований указанного вида с помощью применения преобразования Лапласа. Приводится ряд примеров.

А. П. Прудников

3200. Некоторые тауберовы свойства преобразований Гёльдера. Дополнение. Якимовский (Some Tauberian properties of Hölder transformations. Addendum. Jakimovski Amnon), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 3, 487—488 (англ.)

Даются дополнения к одноименной статье автора РЖМат, 1957, 4114). В. К. Захаров

ПРИЛОЖЕНИЯ ОБЩИХ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

3201. Математическая формулировка кардиоваскулярной динамики с помощью преобразования Лапласа. Ростон (Mathematical formulation of cardiovascular dynamics by use of the Laplace transform. Roston Sidney), Bull. Math. Biophys., 1959, 21, № 1, 1—11 (англ.)

3202. Основные положения теории зеркальных функций. Радциг Ю. А., Тр. Казанск. авиац. ин-та, 1958, 33—34, 139—199

Функцию $f(x)=|x-a|$ автор заменяет выражением

$$[2\Phi(a)-1](x-a), \qquad (1)$$

где $\Phi(a)=\frac{1}{2}\left[1+\frac{|x-a|}{x-a}\right]$. Выражение (1), по терминологии автора, называется зеркальной формой. В статье показано применение этого и других подобных выражений для представления разрывных функций в плоских и пространственных задачах строительной механики. Математически новых результатов статья не содержит. И. П. Макаров

3203. Расчет упругих балок, изогнутых под давлением. Цанабони (Soluzione mediante serie delle travi snelle pressoinflesse. Zanaboni Osvaldo), Ann. mat. pura ed appl., 1957, 44, 293—315 (итал.)

Устанавливается ортогональность некоторых функций, выведенных из форм безразличного равновесия стержня, на который действуют изгибающие и сжимающие усилия. Представление прогибов в виде рядов по этим функциям позволяет решить задачу изгиба балки при большой гибкости, находящейся под действием изгибающего и осевого напряжения. Из резюме автора

3204. Решение интегрального уравнения, встречающегося в задачах о распространении волновых импульсов. Пекерис (Solution of an integral equation occurring in impulsive wave propagation problems. Pekeris C. L.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1956, 42, № 7, 439—443 (англ.)

Распространение волн вблизи от мгновенного источника описывается так называемой „лучевой теорией“ и сводится к определению функции W из интегрального уравнения

$$\int_0^\infty e^{-pt}W(t,r,H)\,dt=$$
$$=\frac{p}{c}\int_0^\infty J_0\left(\frac{p}{c}rx\right)f(x)\,e^{-(p/c)H\sqrt{x^2+a^2}}\,xdx,$$

где $p=\frac{\partial}{\partial t}$, а $f(x)$ — заданная рациональная функция от аргументов x^2, $\sqrt{x^2+a^2}$, $\sqrt{x^2+\lambda^2}$, не имеющая полюсов в правой x-полуплоскости, включая мнимую ось. Указываются точные решения этого уравнения для случаев I. $\lambda>a$; II. $\lambda<a$, $r<\frac{H\lambda}{a}\left(1-\frac{\lambda^2}{a^2}\right)^{-1/2}$; III. $\lambda<a$, $r>\frac{H\lambda}{a}\left(1-\frac{\lambda^2}{a^2}\right)^{-1/2}$. Рассматривается также уравнение, отличающееся от предыдущего заменой $J_0\left(\frac{p}{c}rx\right)$ на $xJ_1\left(\frac{p}{c}rx\right)$, и указываются его точные решения для тех же трех случаев. А. С. Монин

3205. Об одном необходимом признаке монотонности. Блох З. Ш., Научн. докл. высш. школы. Электромехан. и автоматика, 1958, № 1, 13—15

Рассматривается динамическая система, описываемая линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами при нулевых начальных условиях и при предположении, что движение вызвано внешним возмущением вида единичной функции Хависайда. Преобразование Лапласа для одной из координат системы записывается в виде

$$L[\varphi(t)]=\frac{F_0(z)}{zF_1(z)},$$

где z — комплексное переменное, F_0 и F_1 — полиномы (степень F_0 меньше степени F_1). Предполагается, что все нули F_1 расположены слева от мнимой оси и что ближайшим к ней является действительный нуль $z=z_1$. Доказывается, что для того чтобы $\varphi(t)$ была монотонной функцией при $t>0$, необходимо, чтобы все действительные нули $F_0(z)$ были меньше, чем z_1.

М. А. Айзерман

3206. Исследования по импульсной модуляции. Часть I. Хёникке (Untersuchungen an Pulsmodulationsverfahren. Teil I. Hönicke H.), Nachrichtentechnik, 1958, 8, № 10, 456—460 (нем.)

Даются определения и вкратце излагаются свойства преобразования Фурье и дельта-функции. Выводятся преобразования Фурье дельта-функции, периодических последовательностей единичных и прямоугольных импульсов, постоянной и синусоидальной функций, а также правила функциональных преобразований при помощи дельта-функции. Дается таблица соответствующих формул. А. С. Монин

3207. Исследования по импульсной модуляции. Часть II. Хёникке (Untersuchungen an Pulsmodulationsverfahren. Teil II. Hönicke H.), Nachrichtentechnik, 1958, 8, № 11, 501—510 (нем.)

Часть I см. реф. 3206.

Выводятся формулы для спектров последовательностей импульсов, модулированных различными способами. Амплитудная модуляция приводит к периодической последовательности импульсов одинаковой формы (например, прямоугольных), высоты которых определяются модулирующей функцией $f(t)$. При этом различаются случаи, когда значения $f(t)$ приписываются лишь некоторой характерной ординате импульса (например, в его центральной точке или в момент его вступления), без изменения его формы или же в случае прямоугольных импульсов, их вершины обрезаются по кривым, соответствующим значениям $f(t)$.

Фазовая модуляция приводит к замене периодической последовательности импульсов $\sigma(t-nT)$ на последовательность $\sigma(t-t_{n_1})-\sigma(t-t_{n_2})$, где t_{n_1} и t_{n_2} — функции от номера импульса n, определяемые модулирующей функцией $f(t)$. Так, например, при фазовой модуляции синусоидальной функцией $f(t)=U_M \sin \omega t$ по методу „однородных выборок" полагается $t_{n_1}=t_n+\frac{\tau_0}{2}$, $t_{n_2}=t_n-\frac{\tau_0}{2}$, где $t_n=nT+T_0(1+M\sin n\omega T)$, T_0 и M зависят от U_M. При фазовой модуляции по методу „естественных выборок" полагается $t_{n_1,\,n_2}=nT\pm\frac{\tau_0}{2}+T_0\left[1+M\sin\omega\left(t\pm\frac{\tau_0}{2}\right)\right]$.

Модуляция продолжительности импульсов приводит к замене последовательности $\sigma(t-n\tau)$ на последовательность $\sigma(t-n\tau)-\sigma(t-t_n)$, где t_n определяется аналогично тому, как в случае фазовой модуляции. В заключение вкратце излагаются радиотехнические способы импульсной модуляции и измерения получающихся спектров. А. С. Монин

3208. О расчете периодических режимов в линейных системах. Якаб И. Г., Научн. докл. высш. школы. Электромехан. и автоматика, 1958, № 2, 46—53

Интеграл Дюамеля используется для определения периодического решения линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и с периодической правой частью. Периодические решения получаются в замкнутой форме, не требующей представления правой части уравнения рядом Фурье. М. А. Айзерман

3209. Общие вопросы теории передающих систем. Куликовский (General aspects of transmission systems theory. Kulikowski R.), Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. techn., 1958, **6**, № 5, 265—270, XXI (англ.; рез. русск.)

Задача о прохождении сигнала через динамическую систему формулируется как вариационная задача. Оператор фильтра определяется из условия минимизации функционала, характеризующего качество передачи сигнала. М. А. Айзерман

3210. Две теоремы о числе действительных корней характеристического уравнения любой устойчивой линейной физической системы. Кёниг (Two theorems on the number of real roots of the characteristic equation of any stable linear physical system Koenig J. F.), Applic. and Ind., 1959, № 40, 670—673 (англ.)

3211 Д. О методах математического исследования переходных процессов в асинхронных машинах при параллельной работе с конденсаторной батареей. Аллик К. К., Тр. Таллинск. политехн. ин-та, 1958, **А**, № 154, 19 стр., илл.

См. также: 2806, 2807, 2837, 2940, 2957, 2992.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Редактор *М. А. Наймарк*

3212. Теорема о распределениях, интегрируемых в некоторой четной степени. Урбаник (A theorem on distributions integrable with even power. Urbanik K.), Studia math., 1958, **17**, № 3, 323—333 (англ.)

Введем обозначения: D_N — пространство бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем в N-мерном евклидовом пространстве. В пространстве D_N вводится сходимость: $\varphi_j \to 0$, если эти функции сосредоточены на некотором общем для них компакте и сходятся на нем к нулю равномерно со всеми производными. D'_N — сопряженное к D_N пространство распределений Шварца (обобщенных функций).

Если $T \in D'_N$, то $(\overline{T}, \varphi) = \overline{(T, \bar{\varphi})}$, где $\varphi \in D_N$. Символом $|T|^{2p}$ обозначим прямое произведение

$$\underbrace{T\times T\times \ldots \times T}_{p \text{ раз}}\times\underbrace{\overline{T}\times\overline{T}\times\ldots\times\overline{T}}_{p \text{ раз}}.$$

Для любой пары действительных чисел ω_1 и ω_2 и $T \in D'_1$ определяется интеграл $\int_{\omega_1}^{\omega_2} |T|^{2p}$ по формуле

$$\left(\int_{\omega_1}^{\omega_2} |T|^{2p}, \varphi\right) = \left(|T|^{2p}, \int_{\omega_1}^{\omega_2} \varphi(x_1-x, \ldots, x_{2p}-x)\,dx\right).$$

Если семейство $\int_{\omega_1}^{\omega_2} |T|^{2p}$ сходится при $\omega_1 \to -\infty$, $\omega_2 \to \infty$, то предел обозначается символом $\int_{-\infty}^{\infty} |T|^{2p}$. D_{L^q} — пространство бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ таких, что $\frac{d^k\varphi}{dx^k} \in L^q$, $(k=0, 1, 2, \ldots)$ φ_j $(j=1, 2, \ldots)$ по определению сходится к нулю, если для всякого неотрицательного k последовательность $d^k\varphi_j/dx^k$ сходится к нулю в метрике L^q.

D'_{L^r} обозначает пространство распределений, сопряженное к D_{L^q}, где $q=r/(r-1)$, $r>1$. (Для каждого $r>1$, $D_{L^r} \subset D'_1$).

Целью статьи является доказательство следующего утверждения: Пусть $T \in D'_1$. Тогда $T \in D'_{L^{2p}}$ в том и только в том случае, если $\int_{-\infty}^{\infty} |T|^{2p}$ существует. Е. А. Горин

3213. Функции, частные производные которых являются мерами. Флеминг (Functions whose partial derivatives are measures. Fleming Wendell H.), Bull. Amer. Math. Soc., 1958, № 6, 364—365 (англ.)

Приводятся некоторые свойства суммируемых на E^n функций, частные производные которых, в смысле теории обобщенных функций, являются мерами. А. Я. Дубовицкий

3214. Новые классы обобщенных распределений. Румьё (Nouvelles classes de distributions généralisées. Roumieu Charles), C. r. Acad. sci., 1959, **248**, № 3, 346—348 (франц.)

Пусть $\{M_p\}$, $\{N_p\}$ — две положительные логарифмически выпуклые последовательности, удовлетворяющие условиям

$$\overline{\lim_{p\to\infty}}\frac{1}{p}\frac{M_p}{M_{p-1}}>0;\ \sum_{p=1}^{\infty}(N_p)^{-\frac{a}{p}}<\infty$$

с некоторым a. $L^2(\{M_p\},\{N_p\})$ означает векторное пространство бесконечно дифференцируемых функций на прямой, удовлетворяющих условию:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f^{(p)}(x)|^2 e^{2q|x|}dx\leqslant Ah^{2p}e^{2\gamma q}(M_p)^2(N_q)^2$$

$$(p,\ q=0,\ 1,\ 2,\ldots),$$

A, h, γ — некоторые константы. В заметке указано несколько теорем о таких пространствах и о двойственных к ним $L'^2(\{M_p\},\{N_p\})$, например, такая: Всякое обобщенное распределение $\varphi\in L'^2(\{M_p\},\{N_p\})$ представляется в виде

$$\varphi=\lim_{\substack{\eta>0\\ \eta\to 0}}[\varphi_I(x-i\eta)-\varphi_S(x+i\eta)],$$

где $\varphi_S(x+y)$ и $\varphi_I(x+iy)$ — голоморфные функции соответственно в полуплоскостях $y>0$ и $y<0$, удовлетворяющие условию

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(x+iy)|^2\exp[-2N(|x|-\gamma)]dx\leqslant A$$

$\left(\frac{1}{H}<|y|<\frac{1}{h}\right)$ при некоторых h, H, γ и A

$(\varphi=\varphi_I;\ \varphi=\varphi_S)$, где $N(x)=\sup\limits_{p\geqslant 0}\left(px-\ln\frac{N_p}{N_0}\right)$.

Более того, $\varphi=0$ тогда и только тогда, когда φ_S и φ_I — одна и та же целая функция. Е. А. Горин

3215. О некоторых формулах композиции. Хорват (On some composition formulas. Horváth J.), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, **10**, № 3, 433—437 (англ.)

Пусть $x=(x_1,\ldots,x_n)$ — точка n-мерного вещественного пространства R^n, $r=\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$. R_α — ядро М. Рисса (Acta., math., 1949, **81**, 1—223), определенное формулой

$$R_\alpha=\frac{\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)}{\pi^{\frac{n}{2}}2^\alpha\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\cdot\frac{1}{r^{n-\alpha}},\qquad(1$$

если $\alpha\neq -2\nu$, $\alpha\neq n+2\nu$ ($\nu=0,1,2\ldots$). Для исключительных α ядро R_α определяется с помощью аналитического продолжения. В частности, $R_{-2\nu}=(-\Delta)^\nu\delta$, где Δ — оператор Лапласа, δ — дельта-функция. Справедлива формула композиции $R_\alpha * R_\beta=R_{\alpha+\beta}$. Пусть $e_1,\ldots,e_n$ — канонический базис в R^n, $\nabla=\sum_{i=1}^n e_i\frac{\partial}{\partial x_i}$. Для векторнозначного ядра $N_\alpha=-\nabla R_{\alpha+1}$ справедлива формула композиции $N_\alpha * V_\beta=-R_{\alpha+\beta}$, обобщающая ранее известные формулы (РЖМат, 1957, 2173; 1959, 1648). R^n вкладывается в коммутативную алгебру Q над полем вещественных чисел, базисными элементами которой являются всевозможные конечные произведения элементов $e_1,\ldots,e_n$, причем $e_1^2+\ldots+e_n^2=0$. Операция ∇ определена в пространстве обобщенных функций со значениями в Q, причем $\nabla x=0$. Для ядер $K_{\alpha,j}=(-\nabla)^j R_{\alpha+j}$ справедлива формула композиции $K_{\alpha,j}*K_{\beta,l}=K_{\alpha+\beta,j+l}$, где свертка $*$ понимается в смысле умножения в Q. Отмечается связь со сферическими функциями и однородными гармоническими многочленами. По этому поводу см. работы автора: РЖМат, 1956, 5359; 1957, 5730. Указывается на возможность доказательства формул композиции при помощи преобразования Фурье. Ю. Л. Шмульян

3216. Об обобщенных функциях. Долежал, Курцвейль (O distribucích. Doležal Václav, Kurzweil Jaroslav), Slaboproudý obzor, 1959, **20**, № 1, 13—20 (чешск.; рез. русск., нем., англ., франц.)

Задача статьи — дать читателю в элементарной форме основные сведения об обобщенных функциях (распределениях), теория которых является одной из новых областей математики, находящей все большее и большее применение, в особенности для решения задач радиотехники и электроники.

В первой части приводится понятие распределений Л. Шварца. Показаны выгодные свойства распределений по сравнению с функциями, например существование производных всех порядков у распределений, возможность почленного дифференцирования сходящихся рядов и др. Применение этих свойств видно на многих примерах.

Во второй части вкратце упомянуты распределения Микусинского. В частности, приводится способ введения преобразования Лапласа для распределения, что позволяет алгебраизировать задачи с дифференциальными уравнениями. В заключение при помощи распределений решается пример электрической цепи, на которую действует импульс напряжения. Резюме авторов

3217. Эквивалентность норм. Виноград (Equivalence of norms. Vinograde Bernard), Iowa State Coll. J. Sci., 1958, **33**, № 2, 117—118 (англ.)

Пусть V — конечномерное линейное пространство над нормированным полем F, полным относительно вещественной нормы φ (по поводу понятия нормированного поля см. Ван-дер-Варден Б. Л., Современная алгебра, 1947, гл. X). Пусть f — норма в пространстве V, удовлетворяющая условиям:

1) f принимает вещественные значения;
2) $f(u)>0$, если $u\neq 0$, $f(0)=0$, $u\in V$;
3) $f(cu)=\varphi(c)f(u)$, $c\in F$;
4) $f(u+v)\leqslant f(u)+f(v)$.

Доказывается, что все такие нормы эквивалентны, т. е. если u_n — последовательность элементов V, то условие $f(u_n)\to 0$ выполняется или не выполняется сразу для всех норм. Ю. А. Шашкин

3218. Вполне непрерывные спектры локально выпуклых пространств. Райков Д. А., Тр. Моск. матем. о-ва, 1958, **7**, 413—438

Изучаются проективные и индуктивные пределы преимущественно несчетных систем линейных локально выпуклых топологических пространств с вполне непрерывными вложениями. Работа примыкает к статье Себаштьяно-и-Силва (РЖМат, 1957, 1586). §§ 1—3 носят вводный характер, в § 4 излагаются некоторые результаты Гротендика о пространствах Шварца или пространствах типа (S) (РЖМат, 1958, 8985). В § 5—6 вводятся пространства типа $(\bar{S})$ и $(\bar{S}')$, являющиеся проективными, соответственно индуктивными, пределами несчетных систем локально выпуклых пространств с вполне непрерывными вложениями. Показывается, что пространства типа $(\bar{S})$ — полные, что ограниченные замкнутые множества в них бикомпактны, что класс пространств типа $(\bar{S})$ совпадает с классом пространств Шварца. Доказывается, что каждое пространство (X,τ) типа $(\bar{S}')$ представимо в виде индуктивного предела банаховых пространств с вполне непрерывными вложениями и что класс пространств типа $(\bar{S}')$ совпадает с классом пространств (β), введенных Гротендиком (РЖМат, 1957, 7153). Наконец, доказывается, что фактор-пространство

типа $(\overline{S}')$ по его замкнутому подпространству есть снова пространство типа $(\overline{S}')$. Следующие параграфы посвящены теории двойственности проективных и индуктивных пределов с вполне непрерывными вложениями. После ряда лемм, устанавливающих некоторые свойства отображений, сопряженных к линейным отображениям локально выпуклых пространств, автор доказывает, что:

1. Пространство (X', b), сопряженное к пространству X типа $(\overline{S})$ и снабженное сильной топологией, есть пространство типа $(\overline{S}')$;

2. Каждое пространство (X, τ) типа $(\overline{S}')$ есть сильно сопряженное к некоторому пространству типа $(\overline{S}')$;

3. Пространство, сильно сопряженное к пространству X типа $(\overline{S}')$, есть пространство типа $(\overline{S})$ тогда и только тогда, когда каждое множество, ограниченное в X, усиленно вполне ограничено, т. е. вполне ограничено относительно некоторого абсолютно выпуклого ограниченного множества $c \subset X$. В последнем параграфе исследуется вопрос о невырожденности проективных и индуктивных пределов несчетных систем локально выпуклых пространств с вполне непрерывными вложениями.

В. И. Соболев

3219. Об изоморфизме пространств m и M. Пелчинский (On the isomorphism of the spaces m and M. Pełczyński A.), Bull. Acad. polon. sci. math., astron. et phys., 1958, **6**, № 11, 695—696, LV (англ.; рез. русск.)

Доказывается теорема: Пусть X и Y — такие нормированные пространства, что в любом нормированном пространстве подпространство, линейно гомеоморфное (изоморфное) X или Y, имеет топологическое дополнение; пусть, кроме того, X изоморфно $X \times X$ и Y изоморфно $Y \times Y$. Если X и Y имеют одинаковые линейные размерности (в смысле Банаха), то X и Y изоморфны. Проверяется выполнение условий теоремы для пространств m и M.

Примечание референта. Легко проверить, что пространства m и M не изометричны.

В. Н. Судаков

3220. Итерационный метод решения задач на собственные значения для линейных дифференциальных и интегральных операторов. Ланцош (An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators. Lanczos C.), Proc. Sympos. Spectral Theory and Different. Probl., Stillwater, Oklahoma, 1955, 1—65 (англ.)

Излагаются основные результаты следующих разделов функционального анализа: 1) Спектральный анализ конечномерных матриц (эрмитовых и неэрмитовых), 2) Пространства Банаха (основные теоремы приводятся без доказательств), 3) Аналитические функции со значениями из банахова пространства и резольвенты, 4) Нормированные, коммутативные кольца, 5) Теорема Вейерштрасса—Стоуна, 6) Теория Гельфанда—Наймарка—*колец, 7) Общая теорема Рисса о представлении линейного непрерывного функционала для случая пространства непрерывных функций, определенных на бикомпактном пространстве, 8) Вычисление разложения единицы для коммутативных B^*-алгебр (колец) и операторов в пространстве Гильберта. Перечисленные выше разделы (в особенности пункт 8) применяются к следующим вопросам: 9) Преобразования Фурье и Дирихле и их простейшие свойства и 10) Преобразование свертки

$$Tf = \int_{-\infty}^{\infty} H(s-t) f(t)\, dt, \quad H(x) \in L_1(-\infty, \infty),$$
$$f(t) \in L_2(-\infty, \infty).$$

Для этого оператора (который в L_2 ограничении нормален) дается характеристика спектра и вычисляется разложение единицы (в терминах преобразования Фурье ядра H). В начале статьи автор утверждает, что изложенный им метод вычисления разложения единицы для абстрактного (нормального) оператора может быть применен для приближенного вычисления собственных функций интегральных операторов.

Б. М. Левитан

3221. О базисах и безусловной сходимости рядов в пространствах Банаха. Бессага, Пелчинский (On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces. Bessaga C., Pełczyński A.), Studia math., 1958, **17**, № 2, 151—164 (англ.)

Пусть X — пространство Банаха, а X^* — сопряженное к X пространство. Символом $[x_n]$ авторы обозначают замкнутую линейную оболочку элементов $(x_n) \subset X$. Последовательность (x_n) называется базисной, если (x_n) есть базис пространства $[x_n]$. Система вида

$$z_n = \sum_{i=p_n+1}^{p_{n+1}} t_i x_i, \quad z_n \neq 0, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где (x_n) — базисная последовательность, а (t_n) — действительные числа, называется блок-базисом. Каждый блок-базис образует базисную последовательность. Базисные последовательности (x_n) и (y_n) называются эквивалентными, если

$$\{(t_n) : \textstyle\sum_{i=1}^{\infty} t_i x_i \text{ сходится}\} \rightleftarrows \{(t_n) : \textstyle\sum_{i=1}^{\infty} t_i y_i \text{ сходится}\}$$

Основной результат § 1:

Теорема 3. Пусть (x_n) — базис пространства X. Если последовательность $(y_n) \subset X$ удовлетворяет условиям

$$\inf \| y_n \| = \varepsilon > 0 \text{ и } f_i(y_n) \to 0, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

где $f_i(x_n) = \delta_{in}$, то существует подпоследовательность (y_{p_n}), которая является базисной. Эта базисная последовательность (y_{p_n}) эквивалентна некоторому блок-базису, порожденному (x_n).

Следствия, вытекающие из теоремы 3, представляют собой различные обобщения и модификации известного предложения С. Банаха:

Каждое банахово пространство бесконечной размерности содержит бесконечной размерности подпространство с базисом.

§ 1 содержит также ряд приложений „теории базисов" к изучению проекций в банаховых пространствах. Среди них следует отметить теорему 4.

Теорема 4. Если X^* содержит подпространство, изоморфное c_0, то существует проекция X на пространство Y, изоморфное l; отсюда следует, что X^* содержит подпространство, изоморфное пространству m (т. е. все три условия эквивалентны).

В § 2 рассматриваются вопросы, связанные с безусловной сходимостью рядов в пространствах Банаха. При этом используются результаты § 1. Определения:

1) Ряд $\sum x_n$ называется слабо безусловно сходящимся (сл. б. с.), если при всякой перестановке индексов (k_n) ряд $\sum x_{k_n}$ слабо сходится.

2) Ряд $\sum x_n$ сходится безусловно (с. б.), если при любой перестановке индексов (k_n) ряд $\sum x_{k_n}$ сходится.

Теорема 5. Следующие предложения эквивалентны:

(α) существуют в X сл. б. с. ряды, которые не являются б. с.;

(β) существуют в X сл. б. с. ряды $\sum x_n$ такие, что $\inf \| x_n \| > 0$;

(γ) X содержит подпространство, изоморфное c_0.

Другими словами, в каждом X сл. б. сходимость эквивалентна б. сходимости тогда и только тогда, когда

в X нет подпространств, изоморфных c_0. Отсюда, как следствие, вытекает теорема Орлича (Если X слабо полное, то каждый сл. б. с. ряд в X есть б. с.), а также ряд других, известных и новых, предложений о безусловной сходимости.

В последней части работы „Обобщения" формулируются теоремы §§ 1—2 для некоторых классов пространств типа F (в частности, для счетно-нормированных пространств). Библ. 25 назв. Ю. А. Казьмин

3222. Обобщение результатов Джемса о безусловных базисах в пространствах Банаха. Бессага, Пелчинский (A generalization of results of R. C. James concerning absolute bases in Banach spaces. Bessaga C., Pełczyński A.), Studia math., 1958, **17**, № 2, 165—174 (англ.)

Работа непосредственно примыкает к предыдущей статье тех же авторов (реф. 3221). Доказываются теоремы.

Теорема 1. Если Y — подпространство пространства Банаха X с безусловным базисом (x_n), $\| x_n \| = 1$, $n = 1, 2, \ldots$, то следующие условия эквивалентны: а) каждое ограниченное множество Z в Y условно слабо компактно ($Z \subset Y$ условно слабо компактно, если каждая ограниченная последовательность элементов из Z содержит слабо сходящуюся подпоследовательность); б) в Y не существует подпространства, изоморфного l; в) в Y^* не существует подпространства, изоморфного c_0; г) каждый элемент $g' \in Y^*$ представим в виде

$$g' = \sum_{i=1}^{\infty} t_i f_i',$$

где $f_i'(x) = f_i(x)$ для $x \in Y$ ($f_i(x_n) = \delta_{in}$).

Теорема 2. Пусть Y — подпространство пространства Банаха X с безусловным базисом (x_n). Тогда Y слабо полно в том и только в том случае, когда Y не содержит подпространства, изоморфного c_0.

Теоремы 1 и 2 являются некоторым обобщением результатов Джеймса (R. C. James, Ann. Math., 1950, **52**, 518—527). Из сформулированных теорем авторы выводят ряд интересных следствий, среди которых отметим:

Следствие 1. Пусть Y — подпространство пространства Банаха X с безусловным базисом. Для того чтобы Y было рефлексивным, необходимо и достаточно, чтобы Y не содержало подпространств, изоморфных c_0 и m.

Следствие 3. Пространства C и m не могут быть погружены в пространство Банаха с безусловным базисом. В конце работы приведен список нерешенных проблем. В частности, неизвестно, содержит ли каждое пространство Банаха бесконечной размерности подпространство бесконечной размерности с безусловным базисом. Ю. А. Казьмин

3223. Об одном классе положительных операторов. Бахтин И. А., Тр. Семинара по функц. анализу. Воронежск. ун-т, 1958, вып. 6, 12—18

Дается обобщение некоторых предложений теории линейных положительных операторов на случай, когда эти операторы действуют в пространстве с двумя конусами. K, K_1 ($K \subset K_1$) — два конуса в вещественном банаховом пространстве E, где действует некоторый оператор B. Полуупорядоченность, порожденная конусом K_1, обозначается обычным знаком не авенства. Оператор B называется положительным, если $BK \subset K$, и монотонным, если из $\varphi \leqslant \psi$ следует $B\varphi \leqslant B\psi$.

Теорема 1. Пусть B — положительный монотонный вполне непрерывный однородный оператор, действующий в E. Если для некоторого элемента $u = v - w$, где v, $w \in K$, $-u \notin K$, выполняется соотношение $cB^p u \geqslant u$ ($c > 0$), то оператор B имеет в конусе K собственный вектор x_0: $x_0 = \mu B x_0$, причем $\mu \leqslant \sqrt[p]{c}$. Пусть A — линейный оператор, оставляющий инвариантным конус K_1.

Теорема 3. Если φ_0 и φ_1 — собственные векторы A, а λ_0 и λ_1 — собственные значения, отвечающие им, причем $\varphi_1 \leqslant \varphi_0$ и $-\varphi_1 \notin K_1$, то $|\lambda_1| \leqslant |\lambda_0|$. Кроме того, в статье доказана теорема, сформулированная автором в более ранней работе (РЖМат, 1958, 7924).

Е. А. Горин

3224. Последовательности операций, зависящие от параметра. Орлич В., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956, 4, М., АН СССР, 1959, 185—188

3225. Функционалы на множестве непрерывных ограниченных функций, определенных в топологическом пространстве. Маржик (Les fonctionnelles sur l'ensemble des fonctions continues bornées définies dans un espace topologique. Mařík Jan), Studia math., 1957, **16**, № 1, 86—94 (франц.)

Пусть P — топологическое пространство; Y — множество всех действительных функций, конечных и непрерывных на P; Z — множество всех ограниченных функций из Y; $\mathfrak{F}^*$ — семейство всех множеств $E[x: f(x) = 0]$; $\mathfrak{L}^*$ — наименьшая σ-алгебра, содержащая $\mathfrak{F}^*$. Множество $A \subset P$ называется относительно псевдокомпактным, если каждая $f \in Y$ ограничена на A. Доказываются следующие предложения:

1. Если U — не пустое семейство относительно псевдокомпактных подмножеств в P, а функционал J непрерывен на Z, снабженном топологией $T_\infty(U)$ (в которой базой окрестностей нуля являются всевозможные множества, определенные неравенствами вида $|f(x)| < a_n$ при $x \in A_n$, где $a_n > 0$, $A_n \subset P$, $n = 1, 2, 3, \ldots$), то существует σ-аддитивная над $\mathfrak{L}^*$ функция φ такая, что $J(f) = \int f d\varphi$ для $f \in Z$. Если J не отрицателен, то φ — мера.

2. Если P — топологическое локально компактное хаусдорфово пространство, являющееся объединением счетного семейства компактных подмножеств, и если функционал J над Z таков, что $J(f_n) \to 0$, как только $f_n \in Z$ ($n = 1, 2, \ldots$), $f_n(x) \to 0$ равномерно на каждом относительно псевдокомпактном множестве, то существует компактное множество $K \in \mathfrak{F}^*$ и σ-аддитивная на $\mathfrak{L}^*$ функция φ такая, что $J(f) = \int_K f d\varphi$ для всех $f \in Z$.

Л. А. Ходакова

3226. О теореме Хилла. Ямамото (On E. Hille's theorem. Yamamoto Nobuko), Scient. Papers. Coll. Gen. Educ. Univ. Tokyo, 1957, **7**, № 1, 13—17 (англ.)

Хиллом („Функциональный анализ и полугруппы", И. Л., 1951; теор. 17. 3. 1. и 18. 4. 1) выяснена структура линейных операторов и полугрупп операторов, действующих в $L(-\infty, \infty)$ или $L(-\pi, \pi)$ и перестановочных со сдвигами. В реферируемой статье эти результаты переносятся на операторы в пространстве функций от элементов группы.

Пусть G — локально компактная абелева группа, $\hat{G}$ — дуальная группа; $L^1(G)$ — пространство функций, определенных на G и интегрируемых по мере Хара.

Характерные результаты статьи таковы: а) Для любого ограниченного линейного оператора T, действующего в $L^1(G)$ и перестановочного со всеми сдвигами, существует единственная функция $\mu(\hat{x})$ („функциональный множитель"), непрерывная в $\hat{G}$ и такая, что

$$\hat{Tf}(\hat{x}) = \mu(\hat{x}) \cdot \hat{f}(\hat{x})$$

(здесь $\hat{\varphi}(\hat{x})$ — преобразование Фурье функции $\varphi(x)$, (РЖМат, 1957, 7189)). б) Если G — дискретная абелева группа, то существует ограниченная мера Радона $\mathfrak{M}(x)$ такая, что

$$\hat{\mathfrak{M}}(\hat{x}) = \mu(\hat{x}) \text{ и } Tf = \int \overline{f(xy^{-1})}\, d\mathfrak{M}(y).$$

М. З. Соломяк

3227. Распространение теоремы Мандельбройта. (Кунце (An extension of a theorem of Mandelbrojt. Kunze R. A.), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**, № 4, 553—557 (англ.)

Пусть G — n-мерная вещественная векторная группа, C — замкнутый выпуклый конус в G с вершиной в O, содержащий внутреннюю точку, $\hat{C}$ — конус в двойственной группе $\hat{G}$, состоящий из всех x таких, что $(x \cdot t) \geqslant 0$ для всех $t \in C$, Γ — множество комплексных векторов $x + iy$, где $x \in \hat{C}$, $y \in \hat{G}$. Основной результат (теорема 3. 1.): Пусть $F \in L_\infty(\hat{G})$, a — фиксированный элемент из C. Предположим, что для каждого t, не принадлежащего $C - a$, существует функция K из $L_1(\hat{G})$ такая, что $K * F \equiv 0$ и $k(t) \neq 0$, где k — (обратное) преобразование Фурье функции K. Тогда существует „аналитическое продолжение функции F на Γ", т. е. функция F_0, аналитическая внутри Γ и обладающая свойством

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in \operatorname{int} \hat{C}}} \int_D | F_0(x+iy) - F(y) |^2 dy = 0,$$

где D — произвольное компактное множество $\hat{G}$. Кроме того,

$$| F_0(x+iy) | \leqslant \| F \|_\infty e^{a \cdot x} (x \in \operatorname{int} \hat{C},\ y \in \hat{G}).$$

В одномерном случае эта теорема была установлена Мандельбройтом (РЖМат, 1959, 3715). В общем случае автор сводит теорему к результату Фуреса и Сигала (РЖМат, 1957, 4966). Для этого вводится ограниченный оператор T на $L_2(G)$, определяемый соотношением $T = U^{-1} M_F U$, где U — оператор Планшереля ($U : L_2(G) \to L_2(\hat{G})$), а M_F — оператор умножения на функцию F. Показывается, что при $a = 0$ оператор T есть однородная система в $L_2(G)$, причинная относительно данного конуса C (терминология Фуреса и Сигала).

Б. И. Коренблюм

3228. Об оценке собственных значений линейных операторов в гильбертовом пространстве. Рапопорт И. М., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956, **4**, М., АН СССР, 1959, 99—100

3229. О свойствах оператора, отображающего в себя неотрицательную часть пространства с индефинитной метрикой. Бродский М. Л., Успехи матем. наук, 1959, **14**, № 1, 147—152

Пусть E — комплексное рефлексивное банахово пространство, P — p-мерный проектор в E ($0 < p < \infty$), $Q = I - P$. Для каждого $x \in E$ определена функция $\mu(x) = \| Px \|^2 - \| Qx \|^2$ — „индефинитная метрика" в E. Множество $T \subseteq E$ всех элементов $x \in E$, для которых $\mu(x) \geqslant 0$, называется неотрицательной частью E. Соответственно определяются T^+-положительная и T^--отрицательная части E.

Основной результат. Пусть A — ограниченный линейный оператор, определенный всюду в E и обладающий свойствами: $AT^+ \subseteq T^+$, $A(T \setminus \{0\}) \subseteq T \setminus \{0\}$. Тогда A имеет p-мерное инвариантное подпространство $L_1 \subseteq T$, а также инвариантное подпространство $L_2 \subseteq E \setminus T^+$ такое, что $\dim E/L_2 = p$. Существует $r > 0$ такое, что спектр A в L_1 лежит в области $| \lambda | \geqslant r$, а весь остальной спектр A в E — в замкнутом круге $| \lambda | \leqslant r$. При этом точки спектра, лежащие вне упомянутого круга, являются собственными значениями с нормально отщепляющимися корневыми подпространствами, содержащимися в L_1.

Если известно, что $A(T \setminus \{0\}) \subseteq T^+$, то $L_1 \subseteq T^+ \cup \{0\}$, $L_2 \subseteq T^- \cup \{0\}$, $E = L_1 + L_2$.

Сформулированная теорема обобщает некоторые результаты М. Г. Крейна и референта (РЖМат, 1958, 2185), полученные ими для случая, когда E — гильбертово пространство, а также Ф. Бонсалла (РЖМат, 1956, 7452), рассматривавшего банахово пространство E, но только в случае $p = 1$.

В частном случае, когда E — гильбертово пространство, теорема усиливается следующим образом: достаточно требовать, чтобы A был линейным оператором с плотной в E областью определения D_A и $A(D_A \cap T) \subseteq T$. При этом в дополнение к основному результату оказывается, что либо A конечномерен (не более чем p-мерен) и $R_A = AD_A \subseteq T$, либо A ограничен и, кроме того, существует $c > 0$ такое, что $\mu(Ax) \geqslant c\mu(x)$ при $\mu(x) > 0$.

И. С. Иохвидов

3230. Унитарные инварианты представлений операторных алгебр. Кейдисон (Unitary invariants for representations of operator algebras. Kadison Richard V.), Ann. Math., 1957, **66**, № 2, 304—379 (англ.)

Изучаются C^*-алгебры. (В соответствии с известной теоремой И. М. Гельфанда и М. А. Наймарка всякая C^*-алгебра эквивалентна некоторому самосопряженному, равномерно замкнутому кольцу операторов с единицей в гильбертовом пространстве).

Пусть X — компактное хаусдорфово пространство и $\mathfrak{L}$ — линейное комплексное или вещественное подпространство пространства $C(X)$ комплекснозначных (вещественных) непрерывных функций, заданных на X, причем предполагается, что $\mathfrak{L}$ содержит все константы и вместе с каждой функцией содержит также комплексно-сопряженную функцию. Пара X, $\mathfrak{L}$ называется системой функций $(\mathfrak{L}, X)$ и „порядок" в $\mathfrak{L}$ понимается в смысле обычного точечного частичного упорядочения множества вещественных функций. В соответствии с более ранним результатом автора (Mem. Amer. Math. Soc., 1951, № 7) всякое частично упорядоченное векторное пространство может быть реализовано в виде некоторой системы функций $(\mathfrak{L}, X)$. При этом компактное хаусдорфово пространство X строится как слабое замыкание совокупности экстремальных точек выпуклого множества, образованного основными функционалами, заданными на рассматриваемом частично упорядоченном пространстве. (Основной функционал (the state) — линейный, неотрицательный на положительных элементах, равный 1 на единичном элементе). Используя соотношение порядка для самосопряженных элементов C^*-алгебры, автор сопоставляет всякой такой алгебре некоторую „представляющую" систему функций $(\mathfrak{L}, X)$.

Множество $S \subseteq X$ называется перманентно ρ-нуль множеством, где ρ — некоторый основной функционал на $\mathfrak{L}$, если всякое положительное продолжение функционала ρ на пространство $C(X)$ индуцирует регулярную борелевскую меру на X, принимающую на S значение нуль. Совокупность всех перманентно ρ-нуль множеств называется ρ-нуль идеалом. Каждому представлению C^*-алгебры естественным образом ставится в соответствие убывающая цепочка идеалов множеств пространства X представляющей системы функций $(\mathfrak{L}, X)$. Основной результат работы со тоит, грубо говоря, в том, что указанная цепочка идеалов описывает представление C^*-алгебры с точностью до унитарной эквивалентности (ср. с условиями унитарной эквивалентности самосопряженных операторов). В работе содержатся примеры, иллюстрирующие полученные автором результаты.

В. Э. Лянце

3231. Локальная теория колец операторов. I. Оно (Local theory of rings of operators. I. Ono Tamio), J. Math. Soc. Japan, 1958, **10**, № 2, 184—216 (англ.)

Рассматривается B^*-алгебра R с единицей (B^*-алгебра — нормированное кольцо с инволюцией, удовлетворяющей условию $\| x^* x \| = \| x \|^2$). R_0 — обозначение центра R, Ω — обозначение спектра кольца R_0. R_0 отождествляется с кольцом $C(\Omega)$ непрерывных функций заданных на Ω. E_0 — множество проекций (эрмитовых'

идемпотентных элементов) из R_0. Предполагается, что E_0 порождает R_0.

Рассматриваются свойства (L), относящиеся к системам $\mathfrak{a}$ элементов R. Если $\mathfrak{a} \subset R$ и (L) — свойство, то $E_0(\mathfrak{a}, (L))$ — обозначение множества всех тех проекций $e_0 \in E_0$, для которых система $e_0\mathfrak{a}$ обладает свойством (L): $e_0\mathfrak{a} \in (L)$. Глобальным называется каждое свойство (L) такое, что для всякой системы $\mathfrak{a}$ элементов R множество $E_0(\mathfrak{a}, (L))$ образует идеал в E_0 (Множество E_0 рассматривается как булева структура, в которой $e_{01} \subset e_{02}$ означает: $e_{01}(\lambda) \leqslant e_{02}(\lambda)$ для всех $\lambda \in \Omega$. Идеал в E_0 вместе с e_{01} и e_{02} содержит $e_{01} \cup e_{02}$ и $e_{01} \cap e'_{01}$ для любого $e'_{01} \in E_0$). Для данного $\lambda \in \Omega$ $E_0(\lambda)$ обозначает множество всех $e_0 \in E_0$, для которых $e_0(\lambda) = 1$. Саойство (L_λ) называется локальным относительно точки $\lambda \in \Omega$, если для всякой системы $\mathfrak{A} \subset R$, $E_0(\mathfrak{A}, (L_\lambda)) = E_0$ или $E_0 \setminus E_0(\lambda)$.

Всякому глобальному свойству (L) соответствует семейство $\eta(L)$ локальных относительно λ свойств $(L)_\lambda$ систем $\mathfrak{A} \subset R$, состоящих в том, что пересечение множеств $E_0(\lambda)$ и $E_0(\mathfrak{A}, (L))$ непусто. Доказывается, что система $\mathfrak{A}$ обладает глобальным свойством (L) тогда и только тогда, когда она обладает свойством $(L)_\lambda$ для всех $\lambda \in \Omega$. Доказывается также, что логическое произведение любого семейства $((L_\lambda)$, λ пробегает $\Omega)$ локальных свойств является глобальным свойством. Нормальным называется такое глобальное свойство (L), что для всякой системы $\mathfrak{A} \subset R$ множество $E_0(\mathfrak{A}, (L))$ является идеалом в E_0 вида e_0E_0, $e_0 \in E_0$ (главным идеалом).

Доказывается ряд предложений о связях, имеющихся между глобальными, нормальными и локальными свойствами. Предыдущие понятия и предложения применяются к AW^*-алгебрам. (AW^*-алгебра есть B*-алгебра, в которой всякая система попарно ортогональных проекций имеет точную верхнюю грань и в которой всякая максимальная коммутативная подалгебра порождается некоторой проекцией). Свойство семейства проекций в AW^*-алгебре быть эквивалентным друг другу, быть конечными, быть неприводимыми являются нормальными. Нормальным является свойство семейства частично изометричных элементов AW^*-алгебры иметь точную верхнюю грань. Развитая автором теория локальных свойств позволяет несколько сократить доказательство теорем И. Капланского, согласно которым множество E всех проекций AW^*-алгебры образуют полную структуру и всякая система попарно ортогональных частично изометрических элементов AW^*-алгебры имеет точную верхнюю грань, являющуюся также частично изометрическим элементом, а также доказательсто некоторых других теорем.

Эквивалентности проекций $e_1 \sim e_2$ как некоторому глобальному свойству (L) соответствует семейство локальных свойств $(L)_\lambda$, локальных эквивалентностей $e_1 \sim \lambda e_2$. Это понятие позволяет автору провести локальную классификацию AW^*-алгебр на 6 локальных типов: $(\mathrm{I}_n)_\lambda$, $(\mathrm{I}_0)_\lambda$, $(\mathrm{I}_\infty)_\lambda$, $(\mathrm{II}_1)_\lambda$, $(\mathrm{II}_\infty)_\lambda$, $(\mathrm{III}_\infty)_\lambda$, и вновь доказать теорему о разложении в AW^*-алгебрах.

Автор вводит также понятия локального следа, локальной относительной размерности и получает необходимые и достаточные условия для существования локального следа в конечной AW^*-алгебре, а также некоторые достаточные условия для существования следа в конечной AW^*-алгебре.

Отметим следующий способ введения операции $\natural$. Пусть R_1 — AW^*-подалгебра AW^*-алгебры R и e_1 — проекция в R_1. Согласно Диксмье (Dixmier) $e_1^\natural = \mathrm{U}(s_1^* e_1 s_1$; s_1 — унитарный элемент в R_1). Согласно автору $e_1^\natural$ — минимальная проекция $e \in R_1$, обладающая тем свойством, что $ae = a$ для всех $a \in e_1 R_1$. Такое определение позволило перенести некоторые результаты Диксмье, полученные им для конечных W^*-алгебр, и Янь Ди (Yen Ti) — для конечных AW^*-алгебр, на произвольные AW^*-алгебры. В. Э. Лянце

3232. **Локальная теория колец операторов. II. Оно** (Local theory of rings of operators. II. Ono Tamio), J. Math. Soc. Japan, 1958, **10**, № 4, 438—458 (англ.)

Используя результаты, полученные в первой части реферируемой работы (реф. 3231), автор доказывает следующую теорему: Пусть R — полуконечная AW^*-алгебра операторов, действующих в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Если для всякого вектора $x \in \mathfrak{H}$, $\|x\| = 1$ и всякой системы $\{E_i, i \in I\}$ попарно ортогональных проекций из R имеем $(\oplus(E_i, i \in I)x, x) = \sum((E_i x, x), i \in I)$, то R является W^*-алгеброй, действующей в этом же пространстве $\mathfrak{H}$. Это обобщение результата Фелдмана (J. Feldman), который рассматривал конечные, а не полуконечные AW^*-алгебры.

Кроме того, получены необходимые и достаточные условия для того, чтобы алгебраический $*$-изоморфизм AW^*-алгебр (подчиненных некоторым условиям) был пространственным изоморфизмом (т. е. осуществлялся изометрическим отображением гильбертовых пространств, в которых действуют рассматриваемые AW^*-алгебры). Условия, о которых идет речь, налагаются на коммутанты соответствующих AW^*-алгебр. В. Э. Лянце

3233. **Неполные бесконечные прямые произведения W^*-алгебр. Сайто** (On incomplete infinite direct product of W^*-algebras. Saito Teishiro), Tôhoku Math. J., 1958, **10**, № 2, 165—171 (англ.)

Вводится определение неполного бесконечного прямого произведения W^*-алгебр операторов, заданных на гильбертовом пространстве, аналогичное определению, введенному фон Нейманом (J. von Neumann) для полных операторных алгебр. Доказывается, что такое произведение является фактором, если все сомножители — факторы. Доказывается существование пространственного изоморфизма между прямыми произведениями (в смысле автора) W^*-алгебр и прямыми произведениями в смысле Такэда (Takeda) (РЖМат, 1957, 1588) этих же W^*-алгебр. Изучается вопрос о том, к какому типу принадлежат рассматриваемые прямые произведения. В. Э. Лянце

3234. **Некоторые ожидания в AW^*-алгебрах. Накаи** (Some expectations in AW*-algebras. Nakai Mitsuru), Proc. Japan Acad., 1958, **34**, № 7, 411—416 (англ.)

Доказывается следующая теорема типа теоремы Хана — Банаха: Пусть A — коммутативная AW^*-алгебра с множеством B самосопряженных элементов. Пусть M — левый модуль над B. Пусть n — отображение модуля M в B такое, что

$$n(x+y) \leqslant n(x) + n(y) \quad (x, y \in M) \tag{1}$$

(так как B изоморфно кольцу вещественных непрерывных функций на спектре S алгебры A, то неравенства определяются естественным образом),

$$n(ax) = an(x) \quad (x \in M;\ a \in B;\ a \geqslant 0). \tag{2}$$

Пусть $D(f)$ — подмодуль модуля M, на котором задан гомоморфизм f, отображающий $D(f)$ в B и удовлетворяющий условию:

$$f(x) \leqslant n(x). \tag{3}$$

Тогда f может быть продолжен до гомоморфизма, отображающего весь модуль M в B с сохранением условия (3).

Рассматриваются применения этой теоремы:

Пусть M — B^*-алгебра и A — B*-подалгебра (с единицей) центра алгебры M. Пусть N (соответственно B) —

совокупность всех самосопряженных элементов алгебры M (соответственно A). При $x\in N$ неравенство $x\geqslant 0$ означает, что x имеет неотрицательный спектр. Следуя Накамура и Турумару (Nakamura, Turumaru), ожиданием автор называет отображение e алгебры M, удовлетворяющее следующим условиям:

$$e(\alpha x+\beta y)=\alpha e(x)+\beta e(y);$$
$$e(x^*)=e(x)^*;\ e(x)\geqslant 0,\quad \text{если}\quad x\geqslant 0;$$
$$e(e(x)y)=e(x)e(y);\quad e(1)=1,$$

и обозначает через $E(M;A)$ совокупность всех ожиданий e, для которых $e(M)=A$. При $x\in N$ обозначим через $n(x)$ точную нижнюю грань всех $a\in B$, $x\leqslant a$. Оказывается, что для того чтобы из условия $n(y)=0$ ($y\in N$, $y\geqslant 0$) вытекало $y=0$, необходимо и достаточно, чтобы для всякой ортогональной системы $(e_i,\ i\in I)$ проекционных элементов с точной верхней гранью, равной единице, из $e_ix=0$ для всех $i\in I$ вытекало $x=0$, ($x\in M$). В свою очередь последнее условие оказывается необходимым и достаточным для того, чтобы множество $E(M,A)$ было тотальным, т. е., чтобы из $x\in M$ и $e(x^*x)=0$ для всех $e\in E(M,A)$ вытекало $x=0$. Кроме того, если указанное условие выполнено, то множество $H(M,A)$ оказывается алгебраически натянутым на множество $QE(M,B)$. При этом $QE(M,A)$ — множество всех квазиожиданий e таких, что $e(M)=A$ (квазиожидание определяется также как ожидание, с той разницей, что не предполагается выполненным равенство $e(1)=1$), а $H(M,A)$ — множество всех гоморфизмов M в A, непрерывных в смысле нормы. В. Э. Лянце

3235. **Замечание об инвариантах W^*-алгебр. Томияма** (A remark on the invariants of W^*-algebras. Tomiyama Jun), Tohoku Math. J., 1958, **10**, № 1, 37—41 (англ.)

Найдены некоторые условия, достаточные для того, чтобы симметрический изоморфизм слабо замкнутых симметрических колец ограниченных операторов в гильбертовом пространстве был пространственным изоморфизмом. Соответствующие условия сформированы в терминах инвариантов W^*-алгебр, введенных Паллю-де-ла Барьер (R. Pallu de la Barrière) (РЖМат, 1958, 6909). В. Э. Лянце

3236. **Элементарные замечания о коммутативных C^*-алгебрах (Доказательство предположения Дирака). Морен** (Elementare Bemerkungen über kommutative C^*-Algebren (Beweis einer Vermutung von Dirac). Maurin K.), Studia math., 1957, **16**, № 1, 74—79 (нем.)

Рассматривается коммутативная банахова алгебра R ограниченных операторов в сепарабельном комплексном гильбертовом пространстве H, содержащая вместе с оператором A оператор A^* и содержащая тождественный оператор. Такая алгебра называется C^*-алгеброй. C^*-алгебра называется максимальной, если она не является существенной нетривиальной подалгеброй никакой другой C^*-алгебры. Используя элементарные средства, автор доказывает следующие две теоремы.

Теорема 1. Для каждой максимальной коммутативной C^*-алгебры R имеется циклический вектор $v\in H$, т. е. $[Rv]=H$, где $Rv=\{Av: A\in R\}$ и $[Rv]$ есть линейная замкнутая оболочка множества Rv.

По теореме Гельфанда и Наймарка коммутативная C^*-алгебра R изоморфна пространству $C(\Lambda)$, где Λ — множество максимальных идеалов R.

Теорема 2. Пусть R обладает циклическим вектором. Тогда на Λ можно так ввести неотрицательную меру μ, что существует унитарное отображение F пространства H на $L^2(\mu)$, удовлетворяющее условию

$$FAF^{-1}u(\lambda)=a(\lambda)u(\lambda),\ \text{где}\ \begin{cases}u(\lambda)\in L^2(\mu),\\ a(\lambda)\in C(\Delta),\ A\in R\end{cases}$$

Другими словами, алгебра R приводится к диагональному виду. Из теорем 1 и 2 немедленно следует уже известная теорема Наймарка и Фомина.

Полученные результаты автор применяет для доказательства утверждения, развивающего предположение Дирака о включении семейства коммутирующих эрмитовых операторов в семейство таких же операторов, полное в определенном смысле. Указанное утверждение Дирака играет важную роль в квантовой механике. Е. А. Горин

3237. **Теория представлений и теория автоморфных функций. Гельфанд И. М., Пятецкий-Шапиро И. И.**, Успехи матем. наук, 1959, **14**, № 2, 171—194

Пусть $X=G/K$ — однородное пространство с группой движений G и стационарной подгруппой K, E — некоторое пространство функций $f(x)$ на X, в котором действует представление группы G следующего вида: $T_gf(x)=\alpha(g,x)f(xg)$. Здесь xg означает сдвиг точки x из X элементом g группы G, $\alpha(g,x)$ — некоторая функция g и x. Автоморфными формами в пространстве E относительно дискретной подгруппы Γ называются функции $f(x)$, для которых $T_\gamma f=f$, $\gamma\in\Gamma$. Авторы рассматривают два подхода к теории автоморфных форм.

1. Пусть H — гильбертово пространство, в котором реализуется неприводимое унитарное представление G, Ω_0 — линейное топологическое пространство, вложенное в H (с топологией более сильной, чем в H) и инвариантное относительно G. Пусть Ω_1 — пространство функционалов на Ω_0. Тогда $\Omega_0\subset H\subset\Omega_1$. В Ω_1 естественным образом определяется представление G. Автоморфными формами называются векторы из Ω_1, инвариантные относительно Γ.

2. Рассмотрим пространство $X_1=G/\Gamma$ и пространство $\mathfrak{H}$ функций с суммируемым квадратом на X_1. В пространстве $\mathfrak{H}$ действует унитарное представление G: $T_gf(x_1)=f(x_1g)$. Пусть K — компактная подгруппа G. Автоморфными формами называются векторы из $\mathfrak{H}$, преобразующиеся по некоторому представлению K. Задача нахождения автоморфных форм тесно связана с разложением пространства $\mathfrak{H}$ на неприводимые относительно G подпространства. Разбирается случай, когда G — группа вещественных матриц второго порядка с определителем 1, Γ — дискретная подгруппа, для которой G/Γ компактно. Доказывается, что $\mathfrak{H}$ в этом случае разлагается в счетную сумму представлений первой основной, дополнительной и дискретной серий, причем кратность, с которой входит то или иное представление, равна размерности пространства соответствующих автоморфных форм. Для случая, когда G/Γ компактно, авторы доказывают, что $\mathfrak{H}$ разлагается в прямую сумму счетного числа неприводимых подпространств $H_1,\dots,H_k,\dots$ и выводят формулу следа

$$\int_F\left(\sum_{\gamma\in\Gamma}\varphi(g^{-1}\gamma g)\right)dg=\sum_{k=1}^{\infty}N_k\int_G\varphi(g)\pi_k(g)\,dg,$$

где F — фундаментальная область для Γ, N_k — кратность вхождения H_k, $\pi_k(g)$ — характер представления в H_k, $\varphi(g)$ — любая финитная функция на G. С помощью этой формулы получаются асимптотические выражения для параметров, определяющих представления H_k, входящие в $\mathfrak{H}$. Для полупростых групп G доказывается теорема двойственности: если G/Γ компактно, то представление H столько раз входит в $\mathfrak{H}$, сколько существует линейно независимых векторов в Ω, инвариантных относительно Γ. Пространство Ω строится следующим образом. Пусть ξ_0 — вектор из H такой, что для всех g, принадлежащих максимальной компактной подгруппе K, векторы $T_g\xi_0$ лежат в некотором конечномерном пространстве. Каждому элементу η из H поставим в соответствие функцию $\varphi_\eta(g)=(T_g\xi_0,\eta)$. При этом H пере-

ходит в некоторое множество $\widetilde{H}$ непрерывных функций на G. В пространстве непрерывных функций на G имеется естественная топология, определяемая равномерной сходимостью на каждом компакте. Пространство Ω получается пополнением $\widetilde{H}$ по этой топологии. Можно показать, что Ω всегда реализуется в виде пространства вектор-функций на ${}^{G}/_{K}$.

А. А. Кириллов

3238. Гармонический анализ для некоторых полугрупп. Хьюитт, Цуккерман (Harmonic analysis for certain semigroups. Hewitt Edwin, Zuckerman Herbert S.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1956, **42**, № 5, 253—255 (англ.)

Пусть G — коммутативная полугруппа, а $l_1(G)$ — нормированное кольцо всех комплексных функций f на G, удовлетворяющих условию $\sum_{u\in G} |f(u)| = \|f\| < \infty$, где умножение функций определяется как свертка $(f*g)(x) = \sum_{u,v;\,(uv=x)} f(u)\,g(u)$ $(x, u, v \in G)$. Пусть для элемента $x\in G$

$$T_x = \{y,\ y\in G,\ xy^n = y^{n+1},\ yx^n = x^{n+1}\}$$

(n — некоторое натуральное число). Формулируется ряд теорем о связи между алгебраическими свойствами алгебры $l_1(G)$ и полугруппы G. Типичными являются следующие результаты: Алгебра $l_1(G)$ полупроста тогда и только тогда, когда из равенства $x^2 = y^2 = xy$ вытекает, что $x = y$, причем радикал этой алгебры состоит из всех таких функций $f\in l_1(G)$, что $\sum_{y\in T_x} f(y) = 0$ (для всех T_x).

$l_1(G)$ обладает единицей тогда и только тогда, когда G содержит такое конечное подмножество A, что для каждого элемента $x\in G$ имеет место равенство $xa = x$, где a — некоторый элемент из A.

С. Д. Берман

3239. Отделимость и аппроксимация в топологических векторных структурах. Лидер (Separation and approximation in topological vector lattices. Leader Solomon), Canad. J. Math., 1959, **11**, № 2, 286—296 (англ.)

Положительный элемент u топологической векторной структуры L называется предельной единицей, если каждое нормальное подпространство L, содержащее u, плотно в L. Говорят, что семейство операторов $\mathfrak{C}$ на L отделяет элементы f и g, если для любой окрестности нуля $\mathfrak{N}$ в L существуют $P\in\mathfrak{C}$, $Q\in\mathfrak{C}$ такие, что $f - Pf\in\mathfrak{N}$, $Pg\in\mathfrak{N}$, $g - Qg\in\mathfrak{N}$ и $Qf\in\mathfrak{N}$. Доказывается основная лемма:

Пусть u — предельная единица L и $\mathfrak{C}$ — семейство операторов P, $0 \leqslant P \leqslant 1$, отделяющих любые два дизъюнктных элемента. Множество элементов вида $P(I-Q)u$, $P, Q\in\mathfrak{C}$ плотно в L. В частности, если R — булевское кольцо проекторов в L, то Ru плотно в L, если R разделяет дизъюнктные элементы. Аналогичным образом, подалгебра $\mathfrak{B}$ топологической алгебры с структурными операциями $\mathfrak{A}$ плотна в $\mathfrak{A}$, если она отделяет (в указанном смысле) любые два элемента с нулевым произведением. Беря в качестве L пространство $\mathfrak{B}$ конечно-аддитивных функций f на булевой алгебре B, абсолютно непрерывных относительно некоторой неотрицательной конечно-аддитивной меры u, являющейся в этом случае предельной единицей, находим, что Bu плотно в $\mathfrak{B}$ $((Xu)(Y) = u(X\cap Y),\ X, Y\in B)$ — результат, из которого можно получить теорему Радона — Никодима. Подобно этому же доказывается теорема Лебега, характеризующая функции, интегрируемые по Риману. Большинство тщательно доказываемых вспомогательных утверждений автора хорошо известно.

В. Н. Судаков

3240. «Нетрики» на множествах и линейных пространствах. Грейветт ('Netrics' of sets and linear spaces. Gravett K. A. H.), Quart. J. Math., 1959, **10**, № 37, 9—16 (англ.)

Пусть Δ — частично упорядоченное множество, T-семейство совершенно неупорядоченных подмножеств $t\subset\Delta$. „Нетрикой" на множестве E называется отображение $d: E\times E\to T$, если для любых $x, y, z\in E$, $\delta\in\Delta$:

1) $d(x, y) = \varnothing$ равносильно $x = y$,

2) $d(x, y) = d(y, x)$,

3) если для всякого $\delta'\in d(x, y)\cup d(y, z)$ $\delta \not\leqslant \delta'$, то для всякого $\delta''\in d(x, z)$ $\delta \leqslant \delta''$. Изучаются свойства „нетрических" пространств-подмножеств произведения семейства множеств L_δ $\delta\in\Delta$ с определенным образом введенной на них „нетрикой". Подобным же образом определяется „нетрика" d^* на линейном пространстве: $d^*(x-y) = d(x, y)$, $d^*(kx) = d^*(x)$ $(k\neq 0)$. Пусть даны два нетрических пространства $\{E_1, d_1\}$ и $\{E_2, d_2\}$, причем $E_1\supset E_2$ и сужение d_2 на $E_1\times E_1\supset E_2\times E_2$ совпадает с d_1; $\{E_2, d_2\}$ называется непосредственным расширением $\{E_1, d_1\}$, если каждым $y\in E_2\setminus E_1$, $x\in E_1$ и $\delta\in d(x, y)$ соответствует $x'\in E_1$ такой, что $\delta \not\leqslant d(x', y)$. „Нетрическое" пространство $\{E, d\}$ называется полным, если для него не существует собственного непосредственного расширения. Подмножество $A\supset E\times\Delta$ называется покрытием E, если из $(x_i, \delta_i)\in A$, $\delta\in\Delta$, $\delta \geqslant \delta_i$ $(i = 1, 2)$ следует $\delta \not\leqslant \delta'$, где $\delta'\in d(x, y)$ — любое; $x_0\in E$ называется пределом A, если для каждого $(x, \delta)\in A$, $\delta \not\leqslant \delta'\in d(x, x_0)$. E называется полным по покрытиям, если каждое покрытие имеет предел в E.

Теорема 8. „Нетрическое" пространство, полное по покрытиям, полно.

В. Н. Судаков

3241. Вещественные функции на булевских алгебрах с мерой. Ривкинд Я. И., Уч. зап. Гродненск. пед. ин-та, 1957, вып. 2, 89—101

Пусть $\mathcal{B}(\Omega, \mu)$ — булева алгебра с мерой (РЖМат, 1958, 177; терминология в основном та же, что и в этой статье автора). Если каждому элементу плотной подструктуры $\mathcal{B}^*(\Omega, \mu)\supset\mathcal{B}(\Omega, \mu)$ поставлено в соответствие действительное число, то этим определяется вещественная функция $G(e)$ на $\mathcal{B}(\Omega, \mu)$. Функция $G(e)$, заданная на $\mathcal{B}(\Omega, \mu)$, называется средней функцией при основании $\mu(e)$, если $G(e)$ может быть представлена в виде $\frac{\nu(e)}{\mu(e)}$, где $\nu(e)$ — аддитивная функция, определенная на $\mathcal{B}(\Omega, \mu)$ и абсолютно непрерывная относительно меры $\mu(e)$. Применяется обозначение $G(e) = \frac{\mu}{\nu}(e)$. Функция $G(e)$ называется ε-постоянной на элементе $e_0\in\mathcal{B}(\Omega, \mu)$, если $\omega\left(G, \mathcal{B}^*_{e_0}\right) = \sup_{e\in\mathcal{B}^*_{e_0}} G(e) - \inf_{e\in\mathcal{B}^*_{e_0}} G(e) < \varepsilon$. Функция $G(e)$ обладает свойством $(\widetilde{C})$ на $\mathcal{B}(\Omega, \mu)$, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое плотное подмножество $M^*_\varepsilon\supset\mathcal{B}(\Omega, \mu)$, на элементах которого она ε-постоянна.

Автор доказал ранее (РЖМат, 1958, 177), что средние функции, заданные на $\mathcal{B}(\Omega, \mu)$, и функции им эквивалентные, обладают свойством $(\widetilde{C})$. Устанавливается, что верно и обратное утверждение. При доказательстве применяется понятие дифференциальной эквивалентности функций. Вещественные функции $\Phi_1(e)$ и $\Phi_2(e)$ на $\mathcal{B}(\Omega, \mu)$ называются дифференциально эквивалентными на элементе e плотной подструктуры $\mathcal{B}^*(\Omega, \mu)$, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует подразделение $D_\varepsilon e$ элемента e $\left(e = \sum_{k-1}^{n} e_k,\ e_k\in\mathcal{B}^*(\Omega, \mu)\right)$, для которого выполняет-

ся неравенство $\sum_{k=1}^{n} |\Phi_1(e_k) - \Phi_2(e_k)| < \varepsilon$, причем аналогичное неравенство остается в силе и для всякого продолжения разложения $D_\varepsilon e$. Для двух функций $\Phi_1(e)$ и $\Phi_2(e)$, определенных на $\mathcal{B}(\Omega, \mu)$, следующие условия равносильны:

а) функции $\Phi_1(e)$ и $\Phi_2(e)$ дифференциально эквивалентны на элементах плотной подструктуры $\mathcal{B}^*(\Omega, \mu) \subset \mathcal{B}(\Omega, \mu)$;

б) функции $\frac{\Phi_1(e)}{\mu(e)}$ и $\frac{\Phi_2(e)}{\mu(e)}$ эквивалентны на $\mathcal{B}(\Omega, \mu)$.

Пусть даны средние функции $\frac{\nu_1}{\mu_1}(e)$, причем $\mu_1 \sim \mu_2 \sim \mu$ (эти функции абсолютно непрерывны друг относительно друга). Для того чтобы средние функции $\frac{\nu_1}{\mu_1}(e)$ и $\frac{\nu_2}{\mu_2}(e)$ были эквивалентны на $\mathcal{B}(\Omega, \mu)$, необходимо и достаточно выполнение каждого из условий:

а) $\nu_1(e) = \int_e \frac{\nu_2(de)\,\mu_1(de)}{\mu_2(de)}$ или

б) $\nu_2(e) = \int \frac{\nu_1(de)\,\mu_2(de)}{\mu_1(de)}$, причем каждое из этих равенств должно иметь место на плотной подструктуре алгебры $\mathcal{B}(\Omega, \mu)$. (Интегралы берутся в смысле Колмогорова). Последовательность вещественных функций $\{G_n(e)\}$ называется равномерно сходящейся к функции $G(e)$ на плотной подструктуре $\mathcal{B}^*(\Omega, \mu) \subset \mathcal{B}(\Omega, \mu)$, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое N_ε, что для $n > N_\varepsilon$ выполняется неравенство $|G_n(e) - G(e)| < \varepsilon$ для всех элементов подструктуры $\mathcal{B}^*(\Omega, \mu)$. Пусть (Ω, μ) — сепарабельное и неатомическое пространство с мерой и $\mathcal{B}(\Omega, \mu)$ — алгебра его метрических типов. Пусть в (Ω, μ) определен неприводимый автоморфизм Γ с инвариантной мерой $\mu(e)$. Определим в $\mathcal{B}(\Omega, \mu)$ функцию $s_k(a, e) = \mu(\Gamma^k a_i e) - \mu(a)\,\mu(e)$ и положим

$$B_n(a, e) = \frac{1}{n\mu(e)} \sum_{k=1}^{n} |s_k(a, e)|.$$

Говорят, что Γ есть автоморфизм с перемешиванием в среднем относительно плотной подструктуры, если для любого фиксированного $a \in \mathcal{B}(\Omega, \mu)$ существует плотная подструктура $\mathcal{B}_a^*(\Omega, \mu)$, на которой $\lim B_n(a, e) = 0$ равномерно. Доказывается, что такие автоморфизмы в булевской алгебре $\mathcal{B}(\Omega, \mu)$ невозможны. Я. В. Хион

3242. **Теория представлений мер на булевых алгебрах.** Хейдер (A representation theory for measures on Boolean algebras. Heider L. J.), Michigan. Math. J., 1958, 5, № 2, 213—221 (англ.)

Рассматриваются конечные конечно-аддитивные меры на булевых алгебрах. Каждая такая мера φ однозначно разлагается на счетно-аддитивную и чисто конечно-аддитивную составляющие. При этом неотрицательная мера называется чисто конечно-аддитивной, если каждая меньшая (по естественной упорядоченности в пространстве мер) неотрицательная вполне аддитивная мера тождественно равна нулю. Пусть X — пространство булевой алгебры $\mathfrak{B}$. Счетно-аддитивной компоненте φ соответствует бэровская мера на X, аннулирующая на каждом бэровском множестве I категории; чисто конечно-аддитивной составляющей соответствует бэровская мера, обращающая в нуль вне некоторого бэровского множества I категории. Ввиду возможности подобного разложения общей меры, второе сопряженное пространство к L-пространству со слабой единицей разлагается в произведение исходного L-пространства (счетно-аддитивные компоненты) и L-пространства чисто конечно-аддитивных мер. Далее рассматриваются булевы σ-алгебры $\mathfrak{B}$, в которых каждая система попарно дизъюнктных элементов не более чем счетна. Положительная мера называется строго положительной, если она обращается в нуль только на нулевом элементе. Существует элемент $B \in \mathfrak{B}$ и такая положительная счетно-аддитивная мера φ на $\mathfrak{B}$, что сужение φ на B строго положительно, и любая счетно-аддитивная мера на $\mathfrak{B}$ аннулируется вне B. Пусть $\mathfrak{M}$ — σ-алгебра подмножеств множества Y, разделяющая точки Y. Класс ограниченных $\mathfrak{M}$-измеримых функций на Y есть в точности класс непрерывных функций на булевском пространстве $X(\mathfrak{M})$; это соответствие влечет и совпадение сопряженных (в топологии равномерной сходимости) пространств пространства мер на $\mathfrak{M}$ и бэровских мер на $X(\mathfrak{M})$. Аналогичные результаты справедливы и для пространства $L^\infty(Y, \mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ ($\mathfrak{N}$ — σ-идеал на $\mathfrak{M}$, $\|f\|_{L_\infty} = \inf\{r : \{p : p \in Y,\ |f(p)| > r\} \in \mathfrak{N}\}$) и $C(X(\mathfrak{N}))$, где $X(\mathfrak{N})$ — подпространство $X(\mathfrak{M})$, соответствующее дуальному идеалу к $\mathfrak{N}$. Некоторые теоремы представляют главным образом методологический интерес, так как соответствующие результаты известны. В. Н. Судаков

3243. **Теоремы о представлении некоторых булевых алгебр.** Пирс (Representation theorems for certain Boolean algebras. Pierce R. S.), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, 10, № 1, 42—50 (англ.)

Изучается вопрос о представлении некоторых классов булевых алгебр (б. алгебр) как гомоморфных (в определенных смыслах) образов полных или α-полных тел подмножеств. Подмножество T булевого пространства X б. алгебры B называется α-нигде не плотным (α-разряженным), если существует покрытие (соответственно разбиение) A б. алгебры B мощности не выше α такое, что $T \subset \bigcup_{a \in A} (\sim X(a))$; здесь $X(a)$ — компонента X, соответствующая при каноническом отображении элементу $a \in B$. Б. алгебра B называется $C_{\alpha\beta}$-алгеброй (соответственно $D_{\alpha\beta}$-алгеброй), если никакое объединение β-нигде не плотных (β-разряженных) подмножеств X в количестве, не превосходящем α, не содержит непустого открытого в X подмножества. Гомоморфизм б. алгебр $h : B \to \overline{B}$ называется α-гомоморфизмом (соответственно слабым α-гомоморфизмом), если из существования $b = \sup A$ ($A \subset B$, мощность A не выше α, в случае слабого α-гомоморфизма элементы A попарно дизъюнктны) следует $h(b) = \sup h(A)$. Взаимно однозначный α-гомоморфизм называется α-изоморфизмом. Подалгебра $\overline{B} \subset \overline{B}$ называется α-подалгеброй, если вложение есть α-изоморфизм. Пусть I — идеал б. алгебры B; говорят, что гомоморфизм $h : B \to B/I$ факторизуем, если существует такой гомоморфизм $g : \overline{B} \to B$, что $h = p \circ g$ (p — канонический гомоморфизм $B \to B/I$).

Теорема 3. 6. Пусть B — $D_{\alpha\beta}$-алгебра; существует факторизуемый слабый β-изоморфизм B в б. алгебру $\overline{B}$, являющуюся α-гомоморфным образом полного тела подмножеств. Из теоремы 3. 6., в частности, следует: Если B — β-полная $C_{\alpha\beta}$-алгебра, то она изоморфна β-подалгебре α-гомоморфного образа полного тела; α-полная $C_{\alpha\beta}$-алгебра B допускает факторизуемое изоморфное представление как α-гомоморфный образ α-тела подмножеств; каждая б. алгебра изоморфна ∞-подалгебре $\aleph_0$-гомоморфного образа полного тела подмножеств.

Доказывается обратная теорема. Пусть B — $\alpha \vee \beta$ — полная булева $D_{\alpha\beta}$-алгебра, I — α-идеал B; p — канони-

ческий гомоморфизм $B \to B/I$; $\overline{B}$ — б. алгебра, $h: \overline{B} \to B/I$ — слабый β-изоморфизм, обладающий свойством: если $\overline{A}$ есть β-разбиение $\overline{B}$, существует такое β-разбиение B, что $h(\overline{A}) = p(A)$; при выполнении этих условий $\overline{B}$ обладает свойством $D_{\alpha\beta}$. С помощью последней теоремы доказываются в числе других утверждения: чтобы б. алгебра B обладала свойством $D_{\alpha\beta}$, необходимо и достаточно, чтобы существовало полное тело $\mathfrak{B}$, его α-идеал J и факторизуемый слабый β-изоморфизм B в $\mathfrak{B}/J$; алгебра $\overline{B}$ обладает свойством $D_{\alpha\beta}$, если существует слабый β-изоморфизм $h: \overline{B} \to B/I$, где B — α ∨ β-полная $D_{\alpha\beta}$-алгебра и I — α ∨ β-идеал B. С использованием упомянутых теорем просто получаются некоторые результаты, установленные ранее другими авторами, в частности, критерий изоморфности б. алгебры α-телу подмножеств, критерий α-представимости (Скотт и Тарский, Чанг). Некоторые результаты пересекаются с результатами Люмиса о представлении $\aleph_0$-полных алгебр.

В. Н. Судаков

3244. Локально *o*-выпуклые пространства. Кист (Locally *o*-convex spaces. Kist Joseph), Duke Math. J., 1958, 25, № 4, 569—582 (англ.)

Множество S из частично упорядоченного векторного пространства называется *o*-выпуклым, если оно выпукло и если из $s \in S$, $s' \in S'$ и $s \leqslant x \leqslant s'$ следует $x \in S$.

В работе исследуются так называемые *o*-локально выпуклые пространства, т. е. те частично упорядоченные векторные пространства (ч. у. в. п.), в которых топология задана фундаментальной системой *o*-выпуклых и симметричных окрестностей нуля.

Если P — конус в векторном пространстве E и если $P \cap (-P) = \{0\}$, то конус E частично упорядочивает E; полученное так ч. у. в. п. обозначается через (E, P).

Пусть P' — множество всех линейных функционалов на E. Если E есть ч. у. в. п. с локально выпуклой топологией I, то с ним естественно связывается локально *o*-выпуклая топология I_η. Гомоморфизм ч. у. в. п. в локально выпуклое пространство I-непрерывен тогда и только тогда, когда он I_η-непрерывен.

Пусть (E, P) имеет локально выпуклую топологию I. Тогда I_η отделимо в том и только в том случае, когда P' есть полное множество в E'.

Если (E, P) — отделимое локально *o*-выпуклое пространство, то $E' = P' - P'$ (Обобщение известного результата М. Г. Крейна, Докл. АН СССР, 1940, 28, 13 — 17).

Автор определяет естественным образом понятие *o*-бочечного пространства (E — *o*-бочечно, если оно локально *o*-выпукло и любой гомоморфизм в *o*-локально выпуклое пространство, который отображает ограниченное множество в ограниченное — непрерывен).

Основной результат: Пусть (E, P) — *o*-бочечное пространство, в котором ограниченные множества ограничены также относительно порядка и такое, что $E = P - P$. Тогда любой гомоморфизм из E со значениями в некотором локально *o*-выпуклом пространстве — непрерывен.

В заключение приводятся обобщение понятия *o*-бочечного пространства и некоторые соображения относительно топологии, совместимой с векторной структурой.

G. Gussi

3245. О мерах, инвариантных относительно заданной группы гомеоморфизмов равномерного пространства (Обобщение меры Хара). Мибу (On measures invariant under given homeomorphism group of a uniform space (A generalization of Haar measure.) Mibu Yoshimichi), J. Math. Soc. Japan, 1958, **10**, № 4, 405 429 (англ.)

Подробное изложение ранее опубликованных результатов (Mibu Y., Proc. Imp. Acad. Tokyo, 1946, **20**).

В. А. Рохлин

3246. Об аналитическом продолжении случайных рядов. Ионеску-Тулча (Sur le prolongement analytique des séries aléatoires. Ionescu Tulcea Alexandra), C. r. Acad. sci., 1959, **248**, № 24, 3396—3397 (франц.)

Пусть $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ — пространство с неатомической мерой, $\mu X = 1$, τ — отображение X в X, сохраняющее меру, $f \in L^1(X, \mathfrak{B}, \mu)$. Рассматривается ряд $F(f; x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(\tau^n x) z^n$, $x \in X$, $|z| < 1$. Для эргодичности τ необходимо и достаточно, чтобы для любой f, не равной почти всюду нулю, радиус сходимости F был равен единице почти для всех $x \in X$. Пусть $E(\mathfrak{B})$ — множество $\mathfrak{B}$-измеримых комплексно-значных функций, принимающих каждая конечное множество значений и не равных почти всюду константе, $E_r(\mathfrak{B})$ — плотное в топологии $L^\infty(x, \mathfrak{B}, \mu)$ подмножество в $E(\mathfrak{B})$ функций f, для которых существует комплексное число β_f такое, что $\mu(f^{-1}(\{\beta_f\}))$ иррационально. Если τ — эргодическое преобразование, то для любой $f \in E_r(\mathfrak{B})$ окружность единичного радиуса C есть купюра для $F(f; x, z)$ для почти всех x; если же τ^n эргодичны при каждом $n = 1, \ldots$, то C обладает тем же свойством для каждой $f \in E(\mathfrak{B})$.

Пусть τ — сохраняющее меру преобразование $(X, \mathfrak{B}, \mu)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Множество функций $f \in L^p(x, \mathfrak{B}, \mu)$, имеющих C купюрой для $F(f; x, z)$ почти для всех x, есть множество типа G_δ, плотное в $L^p(x, \mathfrak{B}, \mu)$. В частности, спектр унитарного оператора U на $L^2(X, \mathfrak{B}, \mu)$, порожденного эргодическим обратимым преобразованием τ, совпадает с C. Наконец, рассматривается семейство унитарных операторов $U \in \mathfrak{U}$ на гильбертовом пространстве H бесконечной размерности. Пусть $U \in \mathfrak{U}$, $f \in H$; определяется $F(U; f, z) = \sum_{n=0}^{\infty} U^{n+1} f \cdot z^n$, $|z| < 1$. Следующие условия эквивалентны: 1. Множество $\{V^{-1}UV : V \in \mathfrak{U}\}$ сильно плотно в $\mathfrak{U}$. 2. Спектр U совпадает с C. 3. Множество таких $f \in H$, что C есть купюра $F(U; f, z)$, является плотным подмножеством H типа G_δ. Доказательства отсутствуют.

В. Н. Судаков

3247. Анализ аддитивных функций множеств в евклидовом пространстве. Роджерс, Тейлор (The analysis of additive set functions in Euclidean space. Rogers C. A., Taylor S. J.), Acta math., 1959, **101**, № 3-4, 273—302 (англ.)

Рассматривается класс $\mathfrak{F}$ счетно-аддитивных конечных функций F, заданных на борелевских подмножествах некоторого параллелепипеда I_0 n-мерного евклидова пространства R^n. Пусть $h(t)$, $t \geqslant 0$, — непрерывная монотонно возрастающая функция, $h(0) = 0$. Внешней h-мерой (хаусдорфовой мерой) hm^* множества $E \subset R^n$ называется

$$\lim_{\delta \to 0} \left(\inf_{\{c_j\}} \sum_{j=1}^{\infty} h(d(c_j)) \right), \quad d(c_j) < \delta,$$

где $\{c_j\}$ — покрытие E выпуклыми множествами, $d(c_j)$ — диаметр c_j. В качестве стандартного набора функций h берутся t^α; в этом случае пишут $hm(E) = \Lambda^\alpha(E)$. Конечную ненулевую меру Λ^α имеют множества размерности α по Безиковичу. Пусть hm — некоторая хаусдорфова мера. $F \in \mathfrak{F}$ называется h-непрерывной, если $hm(E) = 0$ влечет $F(E) = 0$. F называется строго h-непрерывной, если $F(E) = 0$ для всех E σ-конечной h-меры; F называется h-сингулярной, если существует такое борелевское множество E_0 нулевой h-меры, что $F(E) = F(E \mid E_0)$ для всех измеримых E. F почти h-сингу-

лярна, если существует борелевское множество E_0, σ-конечной h-меры такое, что $F(E) = F(E|_{E_0})$ для каждого борелевского E.

Теорема I. Каждая $F \in \mathfrak{F}$ единственным образом представляется в виде: $F = F_1 + F_2 + F_3$, где F_1 строго h-непрерывна, F_2 h-непрерывна и почти h-сингулярна, F_3 — h-сингулярна. Если $F_2 \not\equiv 0$, то существует такое измеримое множество S положительной σ-конечной h-меры и на S такая неаннулирующаяся функция f, что $F_2(E) = \int\limits_{E \cap S} f(x)\, dhm(x)$. Теорема I обобщает теорему Лебега о разложении меры на абсолютно непрерывную, сингулярную непрерывную и атомическую составляющие.

Теорема 3. Каждая $F \in \mathfrak{F}$ единственным образом представляется в виде: $F = F_d + F^{(\alpha_1)} + F^{(\alpha_2)} + \ldots 0 \leqslant \alpha_l \leqslant n_1$, $\alpha_l \neq \alpha_j$ при $l \neq j$, где каждая мера F^{α_k} есть h-непрерывная компонента F_2 из разложения F по теореме I для $hm = \Lambda^{\alpha_k}$, а F_d такова, что при каждом $\alpha \in [0, n]$ ее h-непрерывная почти h-сингулярная компонента есть нулевая мера. Показывается, что для компоненты каждого типа существуют $F \in \mathfrak{F}$, для которых эта компонента не тождественный нуль. Теорема о разбиении, вполне аналогичная теореме 3, справедлива, если семейство Λ^α заменить произвольным максимальным совершенно упорядоченным семейством хаусдорфовых мер. В. Н. Судаков

3248. Чисто теоретико-множественная точечная эргодическая теорема. Ренье (Un théorème ergodique ponctuel purement ensembliste. Régnier André), C. r. Acad. sci., 1959, 248, № 19, 2700—2701 (франц).

Пусть $\mathfrak{L}$ — некоторая σ-алгебра подмножеств множества E, T — σ-гомоморфизм $\mathfrak{L}$ в $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{B}$ — совокупность всех $\mathfrak{L}$-измеримых ограниченных функций f на E,

$$S^r(x) = \frac{1}{r}\sum_{t=0}^{r-1} T^t f,\quad H(X, \varepsilon) =$$

$$= \{x : \varlimsup_{r\to\infty} \frac{1}{r}\sum_{t=0}^{r-1} I(T^t X)(x) \geqslant \varepsilon\}$$

($X \in \mathfrak{L}$, IX — характеристическая функция X, $T(f(x)) = f(Tx)$).

Теорема 1. Пусть C — множество тех $x \in E$, для которых $S^r(x)$ не сходится при $r \to \infty$. Существует счетное семейство $X^{m,l}$ и счетное множество $\{\varepsilon_l\} \subset \left]0, \frac{1}{2}\right]$ такие, что:

1) $X^{m,i} \in \mathfrak{L}$ для всех m и i;

2) $X^{m,i} \searrow \varnothing$ для каждого i, когда $m \to \infty$;

3) $H(X^{m,i}, \varepsilon_l)$ не зависит от m; $C = \bigcup\limits_i H(X^{m,i}, \varepsilon_l)$ для каждого m.

Теорема 2. Пусть семейство множеств I таково, что 1) $I \subset \mathfrak{L}$, 2) $\mathfrak{L} \in Y \subset X \in I$ влечет $Y \in I$, 3) $X^i \in I$ ($i = 1, \ldots$) влечет $\bigcup\limits_i X^i \in I$. Если для каждого $\varepsilon > 0$ и каждого семейства $X^m \in \mathfrak{L}$, $X^m \searrow \varnothing$ выполнено $\bigcup\limits_m H(X^m, \varepsilon) \in I$, то для каждой $f \in \mathfrak{B}$ $S^r(x)$ сходятся всюду, кроме точек некоторого множества из I.

Теорема 3. Пусть $m(x)$ — конечная мера, определенная на $\mathfrak{L}$. Следующие утверждения эквивалентны:

1) Если $X \searrow \varnothing$, то $\varlimsup\limits_{t\to\infty} \frac{1}{r}\sum\limits_{t=0}^{r-1} m(T^t X) \searrow 0$.

2) Для каждой $f \in \mathfrak{B}$ множество точек, на котором S^r не сходится, имеет меру нуль. Доказательства отсутствуют. В. Н. Судаков

3249. Квантовая электродинамика. Келлен (L'électrodynamique quantique. Källén Gunnar), Problèmes math. théorie quantique champs. Paris, CNRS, 1959, 109—117 (франц.)

Рассматривается квантовая теория взаимодействия частиц спинна $1/2$ с электромагнитным полем. В качестве исходного пункта берутся два уравнения движения:

$$\left(\gamma \frac{\partial}{\partial x} + m\right) \Psi(x) = ie\gamma A(x)\, \Psi(x), \tag{1}$$

$$\Box A_\mu(x) = -j_\mu(x). \tag{2}$$

Эти уравнения написаны по аналогии с классической теорией электромагнетизма и теорией Дирака для электрона во внешнем поле, но поля Ψ и A интерпретируются как операторы в гильбертовом пространстве. Используя так называемые „канонические соотношения коммутации“ для гильбертова пространства, с помощью хорошо известного метода (см., например, Wentzel G., Einführung in die Quantentheorie der Wellenfelden, Wien, 1943, § 2) построены четыре „оператора смещения“ (operateurs de déplacement), обладающие свойствами:

$$[P_\mu, P_\nu] = 0,$$

$$[P_\mu, F(x)] = i\frac{\partial F(x)}{\partial x_\mu} \tag{3}$$

($F(x)$ — произвольная функция операторов $\Psi(x)$ и $A_\mu(x)$). Физически эти операторы являются операторами общих энергии и импульса системы; здесь они используются для классификации векторов состояний с помощью собственных значений величин P_μ. Поскольку операторы P_μ коммутируют между собой, оказывается возможным ввести в гильбертовом пространстве представление, в котором каждое состояние является собственным состоянием всех P_μ. В этом частном представлении можно с помощью соотношения (3) определить зависимость от x матричных элементов полей:

$$\langle a | [P_\mu, F(x)] | b\rangle = (P_\mu^{(a)} - P_\mu^{(b)}) \langle a | F(x) | b\rangle =$$

$$= i\frac{\partial}{\partial x_\mu}\langle a | F(x) | b\rangle =$$

$$= i\frac{\partial}{\partial x_\mu}\langle a | F | b\rangle e^{i(p^{(b)} - p^{(a)})x},$$

где $\langle a | F | b\rangle$ не зависит от x, а величины $p_\mu^{(a)}$ и $P_\mu^{(b)}$ суть собственные значения операторов P_μ для состояний $|a\rangle$ и $|b\rangle$. Автор подчеркивает, что рассматриваемая теория не ограничивается предположением о том, что существует лишь одно состояние, соответствующее каждому собственному значению операторов P_μ. Чтобы полностью определить состояние, необходимо, следовательно, приписать ему другие квантовые числа. Использован следующий метод: дифференциальные уравнения движения записываются в интегральной форме:

$$\Psi(x) = \Psi^{(0)}(x) - \int S_R(x - x')\, ie\gamma A(x')\, \Psi(x')\, dx', \tag{4}$$

$$A_\mu(x) = A_\mu^{(0)}(x) + \int D_R(x - x')\frac{ie}{2}[\overline{\Psi}(x'), \gamma_\mu \Psi(x')]\, dx'. \tag{5}$$

Две новые величины $\Psi^{(0)}(x)$ и $A_\mu^{(0)}(x)$, введенные здесь, удовлетворяют дифференциальным уравнениям для свободных полей. Функции $S_R(x)$ и $D_R(x)$ определены соотношениями:

$$\left(\gamma\frac{\partial}{\partial x}+m\right)S_R(x)=-\delta(x);$$
$$S_R(x)=0 \text{ для } x_0<0,$$
$$\Box D_R(x)=-\delta(x);\quad D_R(x)=0 \text{ для } x_0<0.$$

Формально поля $\Psi^{(0)}$ и $A_\mu^{(0)}$ являются предельными значениями полей Гайзенберга Ψ и A_μ для $t\to-\infty$. Их называют предельными полями. Далее показано, что уравнения движения (4) и (5) вместе с условиями на величину $\Psi^{(0)}$, $A_\mu^{(0)}$, S_R, D_R определяют в принципе поля для любого момента времени в зависимости от начальных полей. Таким образом, при помощи начальных полей легко построить ансамбль состояний, характеризующихся ансамблем „чисел заполнения", описывающий ансамбль „начальных частиц". Детальное изучение уравнений (4) и (5) показывает, что с точки зрения практического интереса эта теория встречает значительные трудности в смысле сходимостей. Относительно возможности использования фундаментальных уравнений для практических расчетов приведены следующие соображения: Простая идея о перенормировке оказывается достаточной для того, чтобы все наблюдаемые величины были конечными для любого порядка теории возмущений. По мнению автора, программу перенормировки можно также провести, не обращаясь к теории возмущений. Для этого он предлагает добавить к уравнениям движения контрчлены, построенные из формально бесконечных констант, назначение которых компенсировать бесконечности, получающиеся при интегрировании по промежуточным состояниям.

Н. А. Тихонов

3250. Несохранение четности и алгебра элементарных частиц. Сэкинэ (Parity non-conservation and the algebra of elementary particles. Sekine Katsuhiko), Nucl. Phys., 1959, **11**, № 3, 604—614 (англ.)

Строится вариант теории взаимодействия (на примере теории β-распада), учитывающий эффект несохранения четности. При этом уравнения движения оказываются инвариантными относительно полной группы Лоренца, а перестановочные соотношения — только относительно собственной группы Лоренца (без отражений). Математический формализм основан на включении алгебры γ-матриц Дирака в некоторую более широкую алгебру.

Д. П. Желобенко

3251. Обращение в нуль перенормированных зарядов в теориях с точечным взаимодействием. Померанчук И. Я., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. 4. М., АН СССР, 1959, 120

3252. Сингулярные функции квантовой теории поля в n-мерном псевдоевклидовом пространстве. Ходжаев Л. Ш., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. 4. М., АН СССР, 1959, 124—125

3253 Д. Некоторые вопросы теории нормально разрешимых операторов в банаховых пространствах. Маркус А. С. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Азерб. ун-т, Баку, 1959

3254 Д. Условия сходимости последовательности линейных положительных операторов в пространстве непрерывных 2π-периодических функций двух переменных. Морозов Э. Н. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Моск. гор. пед. ин-т им. В. П. Потемкина, М., 1959

3255 Д. Некоторые асимптотические формулы для спектральных функций и следов дифференциальных операторов второго порядка. Ломоносов М. И. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Харьковск. ун-т, Харьков, 1959

3256 Д. О дискретности спектра и полноте системы собственных и присоединенных функций несамосопряженных дифференциальных операторов. Максудов Ф. Г. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Азерб. ун-т, Баку, 1959

См. также: 2809, 2811, 2907, 2917, 3010, 3026, 3036

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Редакторы *Н. В. Смирнов*, *Н. Н. Воробьев*

3257. Задача коллекционера. Шартье (Le problème du collectionneur. Chartier F.), Rev. statist. appl., 1959, **7**, № 1, 63—82 (франц.)

В каждом из продаваемых пакетов с равной вероятностью содержится 1 из n различных предметов. Подсчитана вероятность того, что после покупки $p>n$ пакетов будет собрано лишь $n-x$ различных предметов; та же вероятность при дополнительном условии, что k лишних для коллекции предметов можно обменять на 1 недостающий. Имеется 9 графиков и 4 таблицы, где подытожены результаты, частью точные, частью полученные приближением по закону Пуассона.

С. С. Кислицын

3258. Приближенные формулы для гипергеометрического распределения. Эйдельнант М. И., УзССР Фанлар Акад. ахбороти. Физ.-матем. фанлари сер., Изв. АН УзССР. Сер., физ.-матем. н., 1958, № 5, 79—92 (рез. узб.)

Приведен ряд (довольно громоздких для воспроизведения) приближенных формул для гипергеометрического распределения при различных предположениях о величине целочисленных аргументов. В тексте перед формулами (1) следует поменять местами M и n.

В. В. Петров

3259. О покрытии окружности дугами, расположенными случайно. Кахан (Sur le recouvrement d'un cercle par des arcs disposés au hasard. Kahane Jean-Pierre), C. r. Acad. sci., 1959, **248**, № 2, 184—186 (франц.)

На окружности T единичной длины располагаются случайно, следуя равномерному закону, и независимо одна от другой дуги $L_1, L_2, \ldots, L_n, \ldots$ длины $l_1, l_2, \ldots, l_n, \ldots$, $(1>l_1\geqslant l_2\geqslant\ldots\geqslant l_n\geqslant\ldots)$. Расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$ является необходимым и достаточным условием, чтобы с вероятностью 1 T покрывалась почти всюду суммой $\bigcup L_n$. Кахан ищет условия, при которых $\bigcup L_n$ полностью покрывает T с вероятностью 1. Основные результаты:

1. Если

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\,[(\log t)^{-1}\sum_{l_n>1/t} l_n]>1,$$

то $T=\bigcup L_n$ с вероятностью 1.

2. Каково бы ни было $\varepsilon>0$, существует последовательность $\{l_n\}$ такая, что для всех t, начиная с некоторо-

то, $(\log t)^{-1}\sum_{l_n>\frac{1}{t}} l_n > 1-\varepsilon$, а $T=\bigcup L_n$ не выполняется с вероятностью 1.

3. Условие $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, l_n n \log\log n > 0$ является необходимым для $T=\bigcup L_n$.

Для $l_n=\frac{\alpha}{n}$ $(\alpha<1)$ полученные результаты не позволяют сказать, выполняется ли $T=\bigcup L_n$ с вероятностью 1. В. П. Чистяков

3260. О вероятностях, связанных в цепь. Прапорджеску (Asupra probabilităţilor înlănţuite. Prapor-gescu N.), Studii şi cercetări mat. Acad. RPR, 1958, 9, № 2, 439—480 (рум.; рез. русск., франц.)

Рассматривается последовательность случайных величин, принимающих одно и то же конечное множество значений, связанных цепной зависимостью (как простой, так и сложной). Изучаются различные предельные закономерности (поведение вероятностей перехода, центральная предельная теорема, значения моментов и др.) методом характеристических функций. В § 2 изучаются условия, при которых эти результаты переносятся на неоднородные цепи, а в § 3 — на случай величин, принимающих континуум значений в некотором интервале. Б. В. Гнеденко

3261. Краевые задачи для условных вероятностей. Келлерхальс (Randwertprobleme bedingter Wahrscheinlichkeiten. Kellerhals Gerhard), Math. Z., 1959, 71, № 1, 1—30 (нем.)

Рассматривается "последовательность соседей" — упорядоченное множество $n+1$ случайных величин A^x, $x=0,1,\ldots,n$, каждая из которых может принимать два значения A_0^x, A_1^x и является статистически связанной лишь со своими ближайшими соседями справа и слева. Последовательность соседей называется открытой, если $P(A^0 \mid A^x, A^n) = P(A^0 \mid A^x)$ при любом $x \neq 0, n$, и замкнутой, если указанное соотношение не выполняется ни при какой циклической перестановке индексов $0,1,\ldots,n$ (в последнем случае точки x можно считать заданными на круге). Рассматриваются величины $Q(A)=P(A)/P(\overline{A})$ и $Q(B \mid A)=P(AB)/P(\overline{AB})$, и в этих терминах изучаются свойства последовательностей соседей. Во второй части работы рассматривается случай непрерывного аргумента $0 \leqslant x \leqslant d$, $A^x = A^{x+nd}$, и последовательность соседей определяется условием

$$P(A^{x_m} \mid A^{x_0},\ldots,A^{x_{m-1}}, A^{x_{m+1}},\ldots,A^{x_n}) = P(A^{x_m} \mid A^{x_{m-1}}, A^{x_{m+1}}).$$

Вводятся величины

$$q_{lk}(y \mid x, z) = P\left(A_1^y \mid A_l^x, A_k^z\right)/\left[1-P\left(A_1^y \mid A_l^x, A_k^z\right)\right],$$

которые при $x<y<z$ представимы в виде $K_l(y,x)L_k(y,z)$. Выводятся и изучаются дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют функции K_l и L_k, и исследуется вопрос о нахождении безусловных вероятностей. А. С. Мони

3262. К теории броуновского движения. Мазур (On the theory of Brownian motion. Mazur P.), Physica, 1959, 25, № 2, 149—162 (англ.)

В обычной феноменологической теории принимается, что броуновское движение описывается гауссовским-марковским процессом (в пространстве скоростей), причем движение в координатном пространстве обратимо, а в пространстве скоростей необратимо. Пригожин, Балеску и Филиппот, развив статистическую механику системы слабо взаимодействующих осцилляторов и рассматривая случай, когда лишь одна степень свободы находится в неравновесном состоянии (т. е. совершает броуновское движение), установили, что ее эволюция описывается негауссовским марковским процессом в пространстве энергии и угловой координаты и оказывается необратимой в обеих этих переменных.

Устанавливается тождественность этих результатов. Именно, для двумерного броуновского движения свободной частицы по гауссовской функции распределения скоростей V_x, V_y определяется функция распределения переменных $\varepsilon=\frac{m}{2}\left(V_x^2+V_y^2\right)$; $\alpha=\arccos\frac{V_x}{\sqrt{V_x^2+V_y^2}}$ и уравнение Фоккера — Планка, которому она удовлетворяет. Частная функция распределения для ε совпадает с полученной Пригожиным и Балеску. Аналогично рассматривается броуновское движение заряженной частицы в присутствии магнитного поля и броуновское движение одномерного гармонического осциллятора. А. С. Монин

3263. Проблема коммутативности в теории цепей Маркова. Вер-Джонс, Кендалл (A commutativity problem in the theory of Markov chains. Vere-Jones D., Kendall David G.), Теория вероятностей и ее применения, 1959, 4, № 1, 97—100 (англ.; рез. русск.)

Пусть $P \equiv \{p_{ij} : i, j = 1, 2, \ldots, N\}$ — матрица переходных вероятностей простой однородной цепи Маркова с N состояниями, $f(\lambda) \equiv \det(\lambda I - P)$ — характеристический полином. Тогда $f(\lambda) = a(\lambda-1)^d \varphi(\lambda)$, где $\varphi(\lambda)$ — некоторый полином, коэффициенты которого легко вычисляются.

Если π — матрица, определенная как $(C,1)$-предел степеней матрицы P, т. е. если $\pi_{jk} \equiv (C,1)\lim_{n\to\infty} p_{jk}^n$, то $\pi = \varphi(P)$. Отсюда следует, что для конечных цепей Маркова π перестановочна с любой матрицей A, которая перестановочна с P.

В случае счетной цепи Маркова проблема коммутативности решается так. Бесконечные матрицы P и π идентифицируются с ограниченными линейными операторами, действующими в банаховом пространстве l абсолютно сходящихся последовательностей $x \equiv (x_1, x_2, \ldots)$ с нормой $\| x \| \equiv \sum_\alpha | x_\alpha | < \infty$.

Цепь Маркова называется строго эргодичной, если

$$\lim_{n\to\infty} \| (Px + P^2x + \ldots + P^n x)/n - \pi x \| = 0$$

для каждого x из l. Пусть A — ограниченный линейный оператор в l, перестановочный с P. Оказывается, что оператор π перестановочен с оператором A тогда и только тогда, когда либо $\pi = 0$, либо цепь строго эргодична. В. М. Волков

3264. Классификация всех процессов размножения и гибели. Ван Цзы-кун, Научн. докл. высш. школы. Физ.-матем. н., 1958, № 4, 19—25

Определяя Q-процесс как однородный дифференцируемый марковский процесс со счетным числом состояний $(0, 1, 2, \ldots; 0 \leqslant t < \infty)$ и матрицей плотностей вероятностей перехода $Q = (q_{ij})$, $q_{ij} = \lim_{t\to 0+} \frac{p_{ij}(t) - \delta_{ij}}{t}$, для которой $\sum_j q_{ij} = 0$, автор ставит вопрос об отыскании всех Q-процессов, отвечающих заданной Q-матрице. Если матрица Q удовлетворяет известному условию регулярности Феллера, то соответствующий Q-процесс определяется однозначно. Если же Q нерегулярна, то соответствующих Q-процессов, как показал Дуб, су-

ществует бесконечно. Но класс Q-процессов Дуба уже класса всех Q-процессов.

Ограничиваясь процессами размножения и гибели, для которых матрица плотностей вероятностей перехода имеет вид

$$Q=\begin{pmatrix} -b_0 & b_0 & & & 0 \\ a_1-(a_1+b_1) & b_1 & & & \\ & \cdots & \cdots & & \\ & & a_n-(a_n+b_n) & b_n & \\ 0 & & & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

автор находит способы описания всех Q-процессов, отвечающих нерегулярной матрице, с помощью так называемых инфинитезимальных характеристик.

Приведены три теоремы, описывающие условия, которым подчиняются инфинитезимальные характеристики процессов размножения и гибели. Установлена связь этих инфинитезимальных характеристик с переходными вероятностями Q-процесса. Доказательства в работе не приводятся. В. М. Волков

3265. О цепях бесконечного порядка. Гаррис (On chains of infinite order. Harris T. E.), Pacif. J. Math., 1955, **5**, Suppl. № 1, 707—724 (англ.)

Пусть Z_n $(n=0, \pm 1, \ldots)$ — стохастический процесс, принимающий значения $0, 1, \ldots D-1$. Пусть $Q_i(u)=P\{Z_n=i \mid Z_{n-1}=u_1,\ Z_{n-2}=u_2, \ldots\}$. Введем $X_n=\sum_{j=1}^{\infty} Z_{n-j}D^{-j}$. Устанавливая точное соотношение между процессами Z и X, автор показывает, что если Q_i удовлетворяют некоторым условиям, процесс Z определяется единственным образом. Это обобщает результат Дёблина и Форте (Bull Soc. math. France, 1937, **65**, 132—148). При некоторых ограничениях распределение X_n имеет одну из трех форм. Наконец, автор рассматривает марковские цепи конечного порядка и показывает, как определить соответствующие $Q_i(u)$ и переходные вероятности при заданных $Z_{n-1}, \ldots, Z_{n-k}$.

K. L. Chung

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 7, 755.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

3266. Среднее отклонение, с рассмотрением случая выборок из совокупности с распределением Пирсона III типа. Джонсон (The mean deviation, with special reference to samples from a Pearson type III population. Johnson N. L.), Biometrika, 1958, **45**, № 3-4, 478—483 (англ.)

Среднее отклонение выборки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ определяется равенством $m=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i-\bar{x}|$, где $\bar{x}$ — выборочное среднее. В случае выбора из генеральной совокупности с плотностью

$$f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-x}\ (x>0)$$

предлагаются приближенные формулы для математического ожидания и дисперсии среднего отклонения. Приведены таблицы значений $E(m)/\sqrt{\alpha}$, $D(m)$. Аналогичные результаты получены для случая выбора из совокупности, имеющей распределение Пирсона второго или седьмого типов. В. В. Петров

3267. Многомерный квантовый анализ. Кларинг-болд (Multivariate quantal analysis. Claringbold P. J.), J. Roy. Statist. Soc., 1958, **B20**, № 2, 398—405 (англ.)

Пусть $y=(y_1, y_2, \ldots, y_k)$ — вектор реакций животного на некоторое раздражение, причем $y_i=0$ или 1 $(i=1, 2, \ldots, k)$. Подобные данные называются квантовыми. Излагается и иллюстрируется примером одна схема анализа квантовых данных. В. В. Петров

3268. Некоторые оценки, которые минимизируют наименьшую верхнюю границу вероятности вместе со стоимостью наблюдений. Конейи (Some estimates which minimize the least upper bound of a probability together with the cost of observation. Konijn H. S.), Ann. Inst. Statist. Math., 1956, **7**, № 3, 143—158 (англ.)

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_N$ — выборка из генеральной совокупности, распределенной нормально с неизвестным средним θ и известной дисперсией;

$$S_N=[\delta_1(x_1, \ldots, x_N), \delta_2(x_1, \ldots, x_N)]$$

— доверительный интервал для θ. Выбор N может иметь случайный характер. Пусть, далее,

$$W_0(\theta, S_N)=1-P\{\delta_1(x_1, \ldots, x_N) \leqslant \theta \leqslant \delta_2(x_1, \ldots, x_N)\},$$

$$W_1(\theta, S_N)=P\{|\delta_2(x_1, \ldots, x_N)-\theta|>\alpha_1\},$$

$$W_2(\theta, S_N)=P\{|\theta-\delta_1(x_1, \ldots, x_N)|>\alpha_2\},$$

где $\alpha_1>0$, $\alpha_2>0$; $c(N)$ — возрастающая непрерывная функция N, означающая стоимость выборки объема N, причем $\lim_{N\to\infty} c(N)=\infty$. В качестве одной из задач рассматривается задача об отыскании $N=N(\lambda)$ и $S_n=S_n(\lambda)$ таких, что

$$\sup_{\theta} W\{\theta, S_N(\lambda); \lambda\}=\min_{N, S_N} \sup_{\theta} W\{\theta, S_N(\lambda); \lambda\},$$

где

$$W\{\theta, S_N(\lambda); \lambda\}=$$

$$=\lambda_0 W_0(\theta, S_N)+\lambda_1 W_1(\theta, S_N)+\lambda_2 W_2(\theta, S_N)+c(N),$$

$\lambda=(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$, $\lambda_0>0$, $\lambda_1>0$, $\lambda_2>0$. Доказывается, в частности, что существует решение, для которого $N(\lambda)$ — несобственная случайная величина, значение которой в некоторых случаях легко вычисляется. Предлагаются также минимаксные точечные оценки для неизвестного среднего значения нормально распределенной совокупности, дисперсия которой известна. В. В. Петров

3269. Двухвыборочный критерий значимости при большом числе измерений. Демпстер (A high dimensional two sample significance test. Dempster A. P.), Ann. Math. Statistics, 1958, **29**, № 4, 995—1010 (англ.)

Имеются две k-мерные генеральные совокупности, распределенные нормально с векторами средних значений m_1 и m_2 соответственно и одной и той же матрицей вторых моментов. Из этих совокупностей извлечены выборки объема n_1 и n_2. Рассматривается задача проверки гипотезы $m_1=m_2$. Классический метод ее решения (Hotelling H., Ann. Math. Statistics, 1931, **2**, 360; Fisher R. A., Ann. Eugenics, 1936, **7**, 179) применим лишь в случае, если $k \leqslant n_1+n_2-2$. Предлагается новый метод решения задачи, свободный от указанного ограничения. В. В. Петров

3270. Некоторые свойства критериев симметрии. Вальтер (Einige Eigenschaften von Symmetrietests. Walter Edward), Math. Ann., 1959, **137**, № 5, 433—453 (нем.)

Класс Ф критериев называется допустимым относительно множества ω значений параметра θ, если для каждого $\theta\in\omega$ и α $(0<\alpha<1)$ найдется критерий $\varphi\in\Phi$ такой, что максимальная вероятность ошибки первого типа не превосходит α, а мощность критерия больше α. Рассматривается вопрос о выборе подходящего критерия из данного класса критериев. Основная часть работы посвящена задаче испытания гипотезы о симметрии относительно нуля вероятностной меры выборочного пространства. Приводится доказательство нескольких теорем о допустимости

в ранее указанном смысле некоторых классов критериев симметрии. В. В. Петров

3271. О выборе наилучшей среди трех нормально распределенных совокупностей с известными дисперсиями. Зингер, Сент-Пьер (On the choice of the best amongst three normal populations with known variances. Zinger A., St-Pierre J.), Biometrika, 1958, **45**, № 3-4, 436—446 (англ.)

Рассматривается процедура выбора совокупности с наибольшим средним, основанная на стандартизованной разности двух бо́льших результатов. Рассчитываются вероятности правильного и ложного решений и необходимое число наблюдений. Приводится сравнение с другими способами. Результаты иллюстрированы таблицами. Библ. 9 названий. Л. Я. Савельев

3272. Два дальнейших приложения модели бинарной регрессии. Кокс (Two further applications of a model for binary regression. Cox D. R.), Biometrika, 1958, **45**, № 3-4, 562—565 (англ.)

На основе модели бинарной регрессии анализируются: 1) 2×2-случайная таблица „сравнения монет", 2) критерий согласия между наблюдаемой последовательностью независимых бинарных случайных величин и соответствующей последовательностью вероятностей. В заключение указывается связь рассматриваемой схемы с шенноновской концепцией информации. Б. С. Флейшман

3273. Некоторые многомерные распределения при наличии внутриклассовой корреляции. Беннетт (Certain multivariate distributions in the presence of intraclass correlation. Bennett B. M.), J. Indian Soc. Agric. Statist., 1955, **7**, № 1-2, 70—72 (англ.)

Пусть $\{y_{i\alpha}\}$, $i=1,2,\ldots,p$; $\alpha=1,2,\ldots,n$, — последовательность n (p-мерных) наблюдений, таких, что

$$y_{i\alpha}=u_i+v_{i\alpha}. \qquad (1)$$

Здесь $\{u_i\}$, $i=1,2,\ldots,p$, — последовательность независимых случайных величин, распределенных нормально со средними ξ_i и одинаковой дисперсией; $\{v_{i\alpha}\}$, $\alpha=1,2,\ldots,n$, — последовательность наблюдений, извлеченных из p-мерной генеральной совокупности, распределенной нормально с нулевыми средними. Слагаемые в правой части равенства (1) предполагаются независимыми. Пусть, далее, $D(y_{i\alpha})=\sigma_{ii}$, $E[(y_{i\alpha}-Ey_{i\alpha})(y_{i\beta}-Ey_{i\beta})]=\rho_i\sigma_{ii}$ при $\alpha\neq\beta$. Формулируются две теоремы о совместном распределении некоторых статистик, связанных с наблюдениями $y_{i\alpha}$ и внутриклассовыми коэффициентами корреляции ρ_i. Доказательства не приведены. Отсутствует необходимое для справедливости равенств (6) условие некоррелированности случайных величин $v_{i\alpha}$, $\alpha=1,2,\ldots,n$.

В. В. Петров

3274. Использование последовательных оценок в практике машинного моделирования и Монте-Карло. Мошман (The application of sequential estimation to computer simulation and Monte Carlo procedures. Moshman Jack), J. Assoc. Comput. Machinery, 1958, **5**, № 4, 343—352 (англ.)

Кратко описываются некоторые, предложенные ранее различными авторами, способы оценки параметров нормального и биномиального распределений, основанные на методе последовательного анализа.

Подчеркивается, что такие способы позволяют значительно сократить объемы выборок, а некоторые дополнительные расчеты, которые при этом необходимы, легко могут быть выполнены на быстродействующих машинах. В. М. Волков

3275. Формулы для вычисления оперативной характеристики и среднего объема выборки некоторых последовательных критериев. Кемп (Formulae for calculating the operating characteristic and the average sample number of some sequential tests. Kemp K. W.), J. Roy. Statist. Soc., 1958, **B20**, № 2, 379—386 (англ.)

Для вычисления оперативной характеристики $P(z)$ и среднего объема выборки $N(z)$ в последовательном статистическом анализе с горизонтальной решающей линией $x=h$ и плотностью $f(x)$ в каждом отдельном испытании предлагаются следующие аппроксимации:

$$P(z)=A+Be^{wz},\quad N(z)=\frac{1}{\theta}[c+De^{wz}-z],$$

где w ($\neq 0$) таково, что $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{wx}f(x)dx=1$, а $\theta=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$; коэффициенты A, B и C, D определяются по значениям $P(z)$ и $N(z)$ при $z=0$ и $z=h$ из соответствующих интегральных уравнений для $P(z)$ и $N(z)$. Приведены графики $P(0)$, $P(h)$ и $N(0)$, $N(h)$ как функций θ при различных значениях h. В. С. Королюк

3276. Выигрыш при последовательном выборе из гамма-распределенной совокупности. Адке, Дхармадхикари (Gain due to sequential sampling from gamma population. Adke S. R., Dharmadhikari S. W.), Calcutta Statist. Assoc. Bull., 1958, **8**, № 30—31, 91—94 (англ.)

Рассматривается совокупность с плотностью распределения:

$$f(x,\sigma)=\frac{1}{\sigma^l\Gamma(l)}e^{-x/\sigma}x^{l-1}\quad(0<x<\infty).$$

Испытываются гипотезы $H_0:\sigma=\sigma_0$, $H_1:\sigma=\sigma_1$ в предположении, что l известно. Выведено отношение среднего числа наблюдений при использовании последовательного выбора к соответствующему числу наблюдений для критерия Неймана—Пирсона с теми же вероятностями ошибок 1-го и 2-го рода. Результат иллюстрирован таблицей. Л. Я. Савельев

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫХ И СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

3277. К проблеме эксцентриситета. Бастьен (Contribution à un problème d'excentricité. Bastien M.), Rev. Statist. appl., 1958, **6**, № 4, 41—58 (франц.)

Рассматривается задача об обнаружении и оценке эксцентриситета в партии стандартных деталей. Центры предполагаются двумерными гауссовскими случайными величинами со средним $(m, 0)$. Испытывается гипотеза $H_0: m=0$ против гипотезы $H_1: m>0$. Рассматривается вопрос оценки параметра m. Приводятся графики для практических расчетов. Л. Я. Савельев

3278. О прочности классических нитей и связок нитей. Колман (On the strength of classical fibres and fibre bundles. Coleman B. D.), J. Mech. and Phys. Solids, 1958, **7**, № 1, 60—70 (англ.)

Нить называется классической, если ее прочность на растяжение не зависит от скорости увеличения нагрузки. Пусть $G_l(f^*)$ — вероятность того, что нить длины l разрывается раньше, чем приложенная сила достигает значения $s^*=f^*A$ (A — начальное поперечное сечение нити). Показывается, что для $G_l(f^*)$ правдоподобно принять распределение Вейбула $G_l(f^*)=1-\exp[-(f^*/t_l)^w]$. Для этого распределения дается таблица значений коэффициента вариации и коэффициента асимметрии как функций от параметра w. Удельная прочность связки из N нитей $f^*=S^*/NA$ (S^* — максимальная нагрузка на связку) при большом N имеет нормальное распределение с математическим ожиданием $f_\tau[1-G_l(f_\tau)]$ и стандартным отклонением $\sigma_\infty=f_\tau\{G_l(f_\tau)[1-G_l(f_\tau)]/N\}^{1/2}$, где f_τ — значение f, обращающее $f[1-G_l(f)]$ в максимум. Отношение средней

удельной прочности связки к средней прочности отдельной нити оказывается равным $\varepsilon = \left[\omega^{\frac{1}{\omega}} e^{-\frac{1}{\omega}} \Gamma\left(1+\frac{1}{\omega}\right)\right]^{-1}$; оно не зависит от t_l и от l. Дается график зависимости ε от коэффициента вариации прочности отдельной нити, показывающий, что при возрастании аргумента ε монотонно уменьшается, имея значение 1 лишь при нулевой дисперсии прочности нитей. Таким образом, средняя удельная прочность связки оказывается меньше средней прочности отдельной нити. А. С. Монин

3279. Сокращенный выбор для величин. Гарнер (Curtailed sampling for variables. Garner Norman R.), J. Amer. Statist. Assoc., 1958, **53**, № 284, 862—867 (англ.)

Изучается возможность сокращения объема выборки в приемочном контроле изделий по некоторому количественно измеримому признаку. Пусть партия принимается после проверки выборки в n изделий, если $\bar{x} + ks \leqslant L$, и бракуется в противном случае. Здесь $\bar{x}$ — выборочное среднее, s — выборочное стандартное отклонение, k и L — заданные постоянные. Показано, что достаточным условием браковки партии после проверки r изделий ($r < n$) является условие $\bar{x}_r + M > L$, где $M = \sqrt{V_r B\,(k^2C - A^2)/C}$, $\bar{x}_r$ и V_r — среднее и дисперсия для r наблюдений, $A = \frac{n-r}{n}$, $B = (r-1)(n-1)$, $C = \frac{r(n-r)}{n(n-1)}$. Если партия принимается в случае $\bar{x} + ks \geqslant L$, то браковку партии можно произвести после проверки r изделий ($r < n$), если $\bar{x}_r - M < L$. В. В. Петров

3280. Анализ подходящих уровней запаса. Сопка (An analysis of adequate inventory levels. Sopka J. J.), IBM J. Res. and Developm., 1959, **3**, № 1, 54—57 (англ.)

Вероятность того, что спрос d_t за t дней будет не меньше D предметов, выражается формулой

$$P_D(d_t \geqslant D) = \sum_{n=[D-At]} e^{-Lt} \frac{(Lt)^n}{n!},$$

где A, L — известные параметры. В начальный момент имеется I предметов. Подсчитана вероятность $P_N(m_t \leqslant M)$ того, что после t дней на складе останется не более M единиц, если с вероятностью, равной 0 при $t < t_0$ и $1 - e^{-\alpha(t-t_0)}$ при $t \geqslant t_0$, на t-й день он пополняется не менее чем $\bar{s}$ предметами, причем $P(d_t \geqslant I - M + \bar{s}) = 0$. Затем $P_N(m_t \leqslant M)$ аппроксимируется непрерывной функцией и отыскивается максимум этой функции по t. С. С. Кислицын

3281. Статистические выводы относительно истинного числа баллов. Лорд (Statistical inferences about true scores. Lord Frederic M.), Psychometrika, 1959, 24, № 1, 1—17 (англ.)

Каждый из группы экзаменующихся должен дать ответы на вопросы некоторого теста. Ответы оцениваются числом баллов, равным отношению числа правильных ответов к числу всех предложенных вопросов. Группа экзаменующихся рассматривается как случайная выборка из обширной совокупности экзаменующихся, а тест — как случайная выборка вопросов из обширной совокупности вопросов. Число баллов, полученное каждым экзаменующимся, есть сумма истинного числа баллов (среднего числа баллов по всем возможным тестам для данного экзаменующегося) и случайной ошибки измерения, вызванной применением данного теста. Путем применения стандартных средств изучается вопрос об оценке по наблюдениям истинного числа баллов для каждого экзаменующегося. Приводится вывод несмещенных оценок для моментов распределения истинного числа баллов в полной совокупности экзаменующихся. В. В. Петров

3282. Обобщение модели Буша-Мостеллера с некоторыми критериями значимости. Ханания (A generalization of the Bush—Mosteller model with some significance tests. Hanania Mary I.), Psychometrika, 1959, 24, № 1, 53—68 (англ.)

Рассматривается ситуация обучения при двух альтернативах, состоящая из последовательности m испытаний, в каждом из которых каждый из имеющихся r субъектов делает выбор между двумя ответами A (ответ, которому нужно научить) и B. Выбирающий A поощряется, выбирающий B не поощряется. Исход эксперимента, состоящего из m испытаний, описывается rm величинами X_{ij} ($i = 1, 2, \ldots, r$; $j = 1, 2, \ldots, m$), определяемыми следующим образом: X_{ij} равно 1 или 0, если i-й субъект в j-м испытании дает ответ A или B соответственно. Пусть

$$q_{ij} = P\{X_{ij} = 0 \mid x_{i1}, \ldots, x_{i,\,j-1}\},$$

где x_{ik} ($k = 1, 2, \ldots, j-1$) — наблюденные значения величин X_{ik}. Пусть, далее, выполнены следующие условия:

1) $q_{i1} = u_1 > 0$ для всех i ($i = 1, 2, \ldots, r$);
2) X_{ij} взаимно независимы при различных i;
3) $q_{ij} = \theta^{\sum_{k=1}^{j-1} x_{ik}} u_j$ ($i = 1, \ldots, r$; $j = 1, \ldots, m$),

где $0 < \theta \leqslant 1$, $0 < u_j \leqslant 1$, $x_{i0} = 0$. Значения u_j не предполагаются известными. Эта модель обучения является обобщением модели Буша — Мостеллера (РЖМат, 1957, 5810). Рассматривается задача проверки сложной гипотезы $\theta = 1$, означающей, что поощрение и отсутствие поощрения имеют одинаковое влияние на поведение обучаемых, против альтернативной гипотезы $0 < \theta < 1$. Предлагается асимптотически локально наиболее мощный критерий, применение которого требует, наряду с небольшими вычислениями, лишь таблицы значений нормальной функции распределения. В заключение рассматривается задача проверки гипотезы $\theta = 1$ против альтернативной гипотезы $1 < \theta < \theta_1$, где $\theta_1 = 1/\max_j u_j$. В. В. Петров

3283. Статистический анализ реактора. Линейная теория. Эрис, Амундсон (Statistical analysis of a reactor. Linear theory. Aris R., Amundson N. R.), Chem. Engng, Sci., 1959, **9**, № 4, 250—262 (англ.; рез. франц., нем.)

После краткого изложения основных понятий теории случайных функций выводятся уравнения для концентрации одного из реагирующих веществ и температуры в химическом реакторе (система с непрерывным потоком вещества и перемешиванием). После приведения к безразмерному виду и линеаризации относительно стационарного состояния эти уравнения принимают вид

$$\frac{dz}{d\tau} + (1+\alpha)\,z + \gamma y = e(\tau);$$

$$\frac{dy}{d\tau} + (1+\beta-\gamma)\,y - \alpha z = f(\tau),$$

где z, y, τ — безразмерные отклонения концентрации и температуры от их стационарных значений и безразмерное время; α, β, γ — параметры стационарного состояния реактора; $e(\tau)$, $f(\tau)$ — случайные флюктуации на входе реактора, статистические характеристики которых считаются заданными (способ их задания для реактора детально обсуждается). Уравнения решаются в спектральной форме, и подсчитываются статистические ха-

рактеристики выходных параметров реактора (путем определения спектральной переходной матрицы реактора как линейной системы). Рассматривается конкретный пример. А. С. Монин

3284. Об оптимальном характере модели Монте-Карло Неймана. Акаикэ (On optimum character of von Neumann's Monte Carlo model. Akaike Hirotugu), Ann. Inst. Statist. Math., 1956, 7, № 3, 183—193 (англ.)

Для расчетов распределения нейтронов в слое вещества по методу Монте-Карло используется „метод расщепления", при котором каждой точке фазового пространства x, α, γ (x — координата, α — энергия, γ — косинус угла между направлением движения частицы и нормалью к слою) приписывается „степень важности" $\varphi(x, \alpha, \gamma)$ — вероятность излучения частицы. При перемещении частицы из „менее важной" в „более важную" область она расщепляется на две независимые частицы с половинными весами, при обратном перемещении частица с вероятностью 1/2 элиминируется и с вероятностью 1/2 сохраняется с удвоенным весом. Для простоты рассматривается n состояний частицы с вероятностями p_i и вероятностями перехода p_{ij}, а также особое k-е состояние — одна из „ловушек", с вероятностью φ_i попасть в это состояние из i-го состояния. При этом необходимо дать оценку величины $T = \sum_{i=1}^{n} p_i\varphi_i + p_k$ — вероятности генерации частицы и ее попадания в „ловушку". Устанавливается, что предложенный Нейманом способ приписывания частицам весов в „методе расщепления" является оптимальным с точки зрения наименьшей дисперсии оценки и количества используемых случайных чисел. А. С. Монин

3285. Расширение пучка лучей в среде со случайными неоднородностями. II. Рассеяние на малые углы. Шефлер (Strahlenoptische Ausbreitung in Medien mit statistisch verteilten Inhomogenitäten. II. Streuung in kleine Winkelbereiche. Scheffler H.), Astron Nachr., 1959, 284, № 6, 269—274 (нем.)

Рассматривается эволюция пучка лучей, параллельных оси X, при прохождении через среду со случайными неоднородностями коэффициента преломления. Вначале рассматривается статистически однородная среда, оптические свойства которой характеризуются средним квадратом пульсаций коэффициента преломления $\overline{(\Delta n)^2}$ и его корреляционной функцией $M(r)$. Для случаев рассеяния на малые углы выводятся формулы для совместных распределений вероятностей углов отклонения луча φ, ψ и его координат y, z на глубине X, а также соответствующих условных распределений φ, ψ при заданных y, z и y, z при заданных φ, ψ. Эти распределения оказываются нормальными. Аналогично рассматривается случай, когда статистические характеристики коэффициента преломления являются функциями от X, и в общем виде выводятся формулы для дисперсий указанных нормальных распределений при известной корреляционной функции градиента флюктуаций коэффициента преломления $\partial\Delta n/\partial\xi$. А. С. Монин

3286. О простой модели проводимости нечистых полупроводников. Хельмерс (On a simple model for impurity band conduction. Helmers K.), Philips Res. Repts, 1959, 14, № 1, 1—10 (англ.; рез. франц., нем.)

Рассматривается нечистый полупроводник, в котором примесь находится в центрах C_i. Предполагается, что омическое сопротивление между каждыми двумя центрами C_i, C_k равно $R_{ik} = R_0 \exp(r_{ik}/r_0)$, где r_{ik} — расстояние между этими центрами. Рассматривается лишь одномерный случай и допускается, что связанными являются лишь соседние центры, так что полное сопротивление равно сумме сопротивлений участков. Допускается, что координаты x_i центров суть независимые случайные величины, имеющие равномерное распределение на отрезке $0 \leqslant x \leqslant V$. Выписывается плотность вероятности $w(R)$ для полного сопротивления R этого отрезка и находятся первый и второй моменты случайной величины R. Для них находятся асимптотические формулы при большом числе центров N. Именно, если среднее число $w_0 = (N-1)\,r_0/V$ центров на интервале длины r_0 велико, то $\overline{R} \sim N$, $\overline{(R-\overline{R})^2}/(\overline{R})^2 \sim 1/Nw_0^4$. Если, наоборот, w_0 мало, то

$$\overline{R} \sim \left(2\pi N^3 e^{2\frac{w_0-1}{w_0}}\right)^{1/2}\left(w_0 e^{\frac{1-w_0}{w_0}}\right)^N;$$

$$\overline{(R-\overline{R})^2}/(\overline{R})^2 \sim (2\pi e^2 N^3)^{-1/2}(e/2w_0)^N$$

при больших w_0 полное сопротивление R есть „макроскопическая" величина: оно флюктуирует мало и пропорционально длине V. При $w_0 \ll 1$ эти условия не выполняются. А. С. Монин

3287. Замечания о среднем числе частиц в стохастических ливнях. Урбаник (Bemerkungen über die mittlere Anzahl von Partikeln in gewissen stochastischen Schauern. Urbanik K.), Studia math., 1955, 15, № 1, 34—42 (нем.)

В первой части работы рассматривается вероятностная модель нуклеонного ливня в однородной среде, энергетическое состояние которой неизменно. Течение этого процесса определяется величиной $w(\varepsilon', \varepsilon'')$ действующего сечения нуклеон-нуклеонного рассеяния, вероятностный смысл которого состоит в том, что $w(\varepsilon', \varepsilon'')\,d\varepsilon'd\varepsilon''\,dx$ есть вероятность того, что в слое толщины dx нуклеон энергии E_0 в результате столкновения порождает два нуклеона с энергиями, заключенными в интервалах $(\varepsilon' E_0, (\varepsilon' + d\varepsilon')E_0)$, $(\varepsilon'' E_0, (\varepsilon'' + d\varepsilon'')E_0)$. Пусть $m(\varepsilon, x)$ — среднее число нуклеонов с энергией, превосходящей εE_0, на глубине x, возникших из ливня, порожденного одним нуклеоном энергии E_0. Ясно, что $m(\varepsilon, x) = 0$ для $\varepsilon \geqslant 1$.

Автором доказано, что для $0 < \varepsilon < 1$ имеет место формула

$$\lim_{x\to\infty} e^{\lambda x} m(\varepsilon, x) = \begin{cases} 0, & \lambda < \alpha \\ \infty, & \lambda \geqslant \alpha, \end{cases}$$

где $\alpha = \int_0^1\int_0^1 w(\varepsilon', \varepsilon'')\,d\varepsilon'd\varepsilon''$ есть полное действующее сечение нуклеон-нуклеонного рассеяния.

Во второй части работы рассматривается электронно-фотонный ливень и получается аналогичная асимптотическая оценка для $m_i^j(\varepsilon, x)$ $(i, j = 1, 2)$ — среднего числа частиц j-го рода с энергией $\geqslant \varepsilon E_0$ на глубине x, возникших из ливня, порожденного одной частицей i-го рода с энергией E_0. В. М. Волков

3288. Микроструктура развитой турбулентности. Обухов А. М., Яглом А. М., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956, 3. М., АН СССР, 1958, 542—557

Дается обзор теоретических сведений и экспериментальных данных о структуре турбулентности при очень больших числах Рейнольдса. Разъясняются понятия о вероятностном поле, его моментах, однородной и изотропной турбулентности. Следуя А. Н. Колмогорову, дается определение локально однородной и локально изотропной турбулентности и излагаются основные свойства структурных функций скалярных и векторных локально изотропных полей, а также связанных с ними спектральных функций. Приводятся формулы для структурных и спектральных функций поля скорости в автомодельной области $D_{ll}(r) = C_1(\varepsilon r)^{2/3}$; $D_{nn}(r) = C_2(\varepsilon r)^{2/3}$; $F(k) = A\varepsilon^{2/3}k^{-5/3}$, выражающие так называемый „закон

двух третей". Указываются способы получения интерполяционных формул для структурных функций, в частности, использование уравнения Колмогорова $D_{lll}(r) - 6\nu\frac{dD_{ll}(r)}{dr} = -\frac{4}{5}\varepsilon r$ при дополнительном предположении постоянства асимметрии $S = D_{lll}D_{ll}^{-3/2}$.

Устанавливается, что структурная функция давления в автомодельной области имеет вид $D_{pp}(r) = \rho^2 [D_{ll}(r)]^2$. Отмечается, что интерполяционная формула для $D_{pp}(r)$ может быть получена с помощью уравнений гидродинамики при использовании гипотезы М. Д. Миллионщикова (т. е. выражая четвертые моменты поля скорости через вторые по формулам для многомерного нормального распределения). Приводятся сведения о величине турбулентных ускорений.

Рассматривается вопрос о микроструктуре температурного поля. Отмечается, что структура этого поля определяется параметром $N = \chi(\mathrm{grad}\,T)^2$ (χ — температуропроводимость), пропорциональным удельной скорости возрастания энтропии. Для структурной функции температуры в автомодельной области получается также „закон двух третей" $D_{TT}(r) = cN\varepsilon^{-1/3}r^{2/3}$. Интерполяционная формула для $D_{TT}(r)$ может быть построена с помощью полученного А. М. Ягломом уравнения, аналогичного уравнению Колмогорова.

Указывается формула для зависимости коэффициента турбулентной диффузии K от размера l диффундирующего облака: $K(l) = c_1\varepsilon^{1/3}l^{4/3}$. Приводятся примеры эмпирических структурных функций ветра и температуры, а также эмпирические данные о функции $K(l)$ в атмосфере и океане. В заключение излагаются способы статистического описания искажений волн при их прохождении через среду со случайными неоднородностями (каковой является турбулентная атмосфера).

А. С. Монин

3289. Статистическое описание диэлектрической турбулентности в тропосфере. Эккарт (Statistische Beschreibung der dielektrischen Turbulenz in der Troposphäre. (Erster Teil einer Theorie der Streuung elektrischer Wellen in turbulenter Atmosphäre). Eckart Gottfried), Abhandl. Bayer. Akad. Wiss. Math. naturwiss. Kl., 1955, № 74, 34 S. (нем.)

Под диэлектрической турбулентностью понимаются вызываемые турбулентностью флюктуации $\Delta\varepsilon$ диэлектрической постоянной в нижней атмосфере. Предполагается, что эти флюктуации могут быть заданы в виде четырехмерного ряда (или интеграла) Фурье по пространственным координатам и времени. Перенумерованные каким-либо определенным образом, коэффициенты этого ряда образуют последовательность с одним индексом. Для каждого члена последовательности может быть задана условная плотность вероятности (при условии, что предыдущие члены имеют фиксированные значения). Приводятся общие выражения для характеристических функций значений $\Delta\varepsilon$ на конечном множестве точек пространства-времени в виде некоторых интегралов от указанных условных плотностей вероятности для коэффициентов Фурье. Дается определение временной корреляционной функции для $\Delta\varepsilon$. Излагается общая теория определения плотности вероятности методом моментов с помощью преобразования Меллина. Рассматриваются случаи однородного и стационарного поля $\Delta\varepsilon$, поля, заданного в ограниченной области, изотропного поля.

А. С. Монин

3290. Краткое изложение статистики. Примеры ее применения при изготовлении цемента. Венюа (Précis de statistique. Exemples d'utilisation pour le ciment. Venuat Michel), Rev. matér. constr. et trav. publics, 1959, № 522, 51—62 (франц.)

См. также: 3000, 3036, 3074, 3246, 3255 Д, 3256 Д

ГЕОМЕТРИЯ

Редакторы *С. П. Фиников, А. М. Васильев, Н. М. Остиану*

3291. Геометрия и теория групп. Годо (La geometria e la teoria dei gruppi. Godeaux L.), Archimede, 1958, 10, № 1, 21—23 (итал.)

3292. Общий обзор задачи Лемуса — Штейнера — Терквема. Гендерсон (The Lehmus — Steiner — Terquem problem in global survey. Henderson Archibald), Scripta math., 1955 (1956), 21, № 4, 309—312 (англ.)

3293. Постскриптум к одной статье. Гендерсон (A postscript to an earlier article. Henderson Archibald), Scripta Math., 1956, 22, № 1, 81, 84 (англ.)

Начало см. РЖМат, 1957, 748.

3294. Об аддитивных и слабонепрерывных полиэдрофункционалах. Хадвигер (Über additive und schwachstetige Polyederfunktionale. Hadwiger Hugo. Verhandl. Schweiz. naturforsch. Ges., 1953, 132, 101—102) (нем.)

3295. О некоторых логических вопросах построения теории параллельности в курсе геометрии средней школы. Монастырский М. Л., Уч. зап. Шахтинск. гос. пед. ин-та, 1959, 2, № 6, 223—237

Указывается на необходимость для учителя глубокого осмысления обоснования геометрии и знания ее истории. Рассматриваются элементарные вопросы учения о параллельности. Отмечается необходимость постепенного перехода от интуитивного преподавания геометрии к логическому, критикуется в этом плане известный учебник Киселева.

Встречаются некоторые неточности. Созданием неевклидовой геометрии был, как говорит сам автор, решен многовековый вопрос о пятом постулате; однако он же считает, что этот постулат привлекал к себе особое внимание до конца XIX в. Пять постулатов Евклида расцениваются как полная аксиоматическая база „Начал", причем постулаты не различаются от аксиом. Подход Лобачевского расценивается как базирующийся на методе доказательства от противного. При таком понимании теряется различие между творцами неевклидовой геометрии и их предшественниками. Предложение, противоположное пятому постулату, берется не как условное допущение, с целью доказать непрямым путем пятый постулат, а как компонент в системе аксиом, на которой в положительном виде строится новая геометрия.

Л. П. Гокиели

3296. О некоторых задачах Л. Чакалова. Манолов (Върху няколко задачи на Л. Чакалов. Манолов Спас), Физ.-матем. списание, 1958, 1, № 1-2, 51—59 (болг.)

Автор решает следующую задачу, объединяющую три задачи Л. Чакалова. Требуется доказать, что последовательности

$$\{\alpha_{1n}\}_0^\infty, \{\alpha_{2n}\}_0^\infty, \ldots, \{\alpha_{kn}\}_0^\infty,$$

определенные рекуррентными формулами

$$\alpha_{sn} = \frac{1}{2}(\alpha_{s,n-1} + \alpha_{s+1,n-1}), \quad (k \geqslant 3,\ s = 1,2,\ldots,\ k),$$

$$\alpha_{k+1,n-1} = \alpha_{1,n-1},$$

где $\alpha_{10}, \alpha_{20}, \ldots, \alpha_{k0}$ — любые действительные числа, сходятся к $\frac{\alpha_{10} + \alpha_{20} + \ldots + \alpha_{k0}}{k}$. А. Н. Матеев

3297. Дифференциальная геометрия. Васильев А. М., Норден А. П., Фиников С. П. В сб.: Матем. в СССР за 40 лет. 1917—1957 Т. I. М., Физ.-матгиз, 1959, 899—924

3298 К. Геометрия как язык форм (Для самостоятельного изучения и для преподавания). Баравалле (Geometrie als Sprache der Formen. Zum Selbststudium und für den Unterricht. Baravalle Hermann von. Freiburg im Breisgau, Novalis-Verl., 1957, 143 S., ill.) (нем.)

3299 К. Риманова геометрия и тензорный анализ. Рашевский (Geometria Riemanna i analiza tensorowa. Raševskij Petr Konstantinovič. Tłum. z ros. Warszawa, PWN, 1958, 572 s., 50 zł.), Przew. bibliogr., 1958, **14**, № 48, 607 (польск.)
См. РЖМат, 1954, 3826 К.

3300 К. Риманова геометрия и тензорный анализ. Рашевский (Riemannsche Geometrie und Tensoranalysis. Raschewski P. K. Übers. aus dem Russ. Berlin, VEB Dtsch. Verl. Wiss., 1959, 606 S., ill., 42 DM) (нем.)
См. РЖМат, 1954, 3826 К.

ПРИЛОЖЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ

3301. Задача о рэгби. Фишер (A rugby-field problem. Fisher H. T.), Math. Gaz., 1958, **42**, № 341, 210 (англ.)

Средствами дифференциального исчисления решается задача о выборе наиболее благоприятного места для удара по воротам. Доказывается, что если c — расстояние между краями ворот и a — расстояние перпендикуляра l к линии ворот до ближайшего края ворот, то точка на l, из которой ворота видны под наибольшим углом, должна находиться на расстоянии $x = \sqrt{a(a+c)}$ от линии ворот. А. Г. Школьник

3302. Решение задачи об определении огибающей тора в винтовом движении. Пеньков Р. М., Тр. Кафедры «Теория механизмов и машин». Моск. станкоинструм. ин-т, 1958, вып. I, 38—43

Составляются уравнения характеристик тора, совершающего винтовое движение, и с их помощью показывается, что огибающая поверхность состоит из винтовой каналовой поверхности и двух замкнутых винтовых поверхностей. С. Г. Кислицын

3303. Применение «метода поправок» Чебышева к решению задач о наилучшем построении параллелограмма Уатта. Гусак (Прымяненне «метада папраВак» П. Л. Чэбышэва да рашэння задачи об найлепшай будове паралелаграма Уата. Гусак А. А.), Весці АН БССР, Сер. физ.-техн. н. 1957, № 4, 73—83 (белорусск.; рез. русск.)

3304. К задаче о некотором видоизменении полного параллелограмма Уатта. Гусак А. А., Инж.-физ. ж., 1958, **1**, № 11, 31—37 (рез. англ.)

П. Л. Чебышев в своем мемуаре «О некотором видоизменении коленчатого параллелограмма Уатта» привел без доказательства соотношения между размерами звеньев предложенного им нового шарнирного механизма, имеющего такое же число стержней, как и параллелограмм Уатта.

Автор реферируемой статьи, применяя метод, использованный им ранее (реф. 3303), обосновывает упомянутые соотношения П. Л. Чебышева. Во вводной части статьи автор отмечает, что более ранняя попытка в этом направлении З. Ш. Блоха (1948 г.) не является вполне корректной. В. А. Тихонов

3305. Новая графоаналитическая трактовка задачи о распределении ускорений любого порядка. Манжерон, Дрэган (Eine neue graphisch—analytische Behandlung des Problems der Verteilung von Beschleunigungen beliebiger Ordnung. Mangeron D., Drăgan Corneliu), Bul. Inst. politehn. Iași, 1957, **3**, № 3-4, 161—174 (нем.; рез. русск., рум.)

Указывается, каким образом ускорение некоторого порядка какой-нибудь точки звена, совершающего плоскопараллельное движение, может быть найдено с помощью ускорений того же порядка двух других точек этого звена. Рассмотрено распределение ускорений первого и второго порядков для некоторых групп Ассура. С. Г. Кислицын

3306. Кинематика недоформирующихся систем с фиксированной точкой в евклидовом пятимерном пространстве. Войнароский (Cinematica sistemelor nedeformabile cu punct fix din spațiul euclidian cu cinci dimensiuni. Woinaroski R.), Lucrările inst. petrol. și gaze București, 1957, **2**, № 2, 277—296 (рум.; рез. русск., англ.)

Используя результаты Теодориу (Teodoriu L., Bull. Math. Soc. Roumaine Sci., 1933, **35**) и Остена (Oosten C. P. S. van, Meetkundige beschowingen over bewegingen in een euclidische ruimte, Groningen—Djakarta, 1951), автор выявляет в первой части работы мгновенную ось и мгновенную плоскость вращения, при жестком движении с фиксированной точкой в пятимерном евклидовом пространстве.

Во второй части изучаются геометрические свойства многообразий, описанных во время движения мгновенной осью вращения и мгновенной плоскостью вращения. Изучается вариация евклидова пространства, касательного к многообразию, описанному мгновенной плоскостью вращения, когда точка касания описывает прямую, принадлежащую образующей плоскости.

В последней части, используя результаты, полученные во второй части, автор показывает, как можно воспроизвести общее движение с фиксированной точкой в пятимерном евклидовом пространстве при помощи конусов и многообразий, описанных осью и одной из мгновенных плоскостей вращения, когда пространство, в котором происходит движение, неподвижно или смещается. N. Cristescu

3307. Об общем движении жесткого твердого тела. Ливовский (Asupra mișcării generale a solidului rigid. Livovschi L.), Lucrările inst. petrol. și gaze București, 1957, **2**, № 2, 297—316 (рум.; рез. русск., англ.)

Общее движение жесткого твердого тела интерпретируется как два последовательных вращения. Показано, как можно определить векторы вращения $\bar{\omega}_1$ и $\bar{\omega}_2$, и указаны их свойства. Затем исследуется связь между векторами $\bar{\omega}^1$, $\bar{\omega}^2$ и касательным винтовым движением.

При изучении распределения скоростей автор приходит к некоторым геометрическим фактам, известным из теории комплексов прямых и линейчатых поверхностей. Рассматривается случай, когда векторы $\bar{\omega}^1$ и $\bar{\omega}^2$ ортогональны. N. Cristescu

3308. Основы кинематики. I. Решения проблемы кинематического преобразования. Штраусс (Grundlagen der Kinematik. I. Die Lösungen des kinematischen Transformationsproblems. Strauss Martin), Wiss. Z. Humboldt-Univ. Berlin. Math.-naturwiss. Reihe,

1957—1958, **7**, № 5, 609—616 (нем.; рез. русск., англ., франц.)

Ищется общее решение проблемы кинематического преобразования в евклидовом пространстве Обнаруживается, что указанное решение дает преобразование Лоренца или преобразование, отличающееся от последнего знаком при C^2. Рассмотрены некоторые вопросы релятивистской динамики, соответствующей второму решению. С. Г. Кислицын

3309. Некоторые замечательные дифференциальные свойства вращательных движений твердых тел. Форте (Di alcune notevoli proprietà differenziali dei moti rigidi di rotolamento. Forte Bruno), Ann. Scuola norm. Super. Pisa. Sci. fis. e mat., 1958, **12**, № 4, 417—423 (итал.)

Всякое число вращательное движение твердого тела геометрически описывается заданием линейчатой поверхности S, связанной с движущимся телом и катящейся по линейчатой поверхности S', связанной с неподвижным пространством. Пусть в данный момент S касается S' вдоль образующей a. Если через a провести плоскость π, параллельную второй образующей $\bar{a}$ поверхности S' и заставить $\bar{a}$ стремиться к a, то предельное положение плоскости π называется главной плоскостью S' вдоль a. Рассмотрим два движения M_1 и M_2 твердого тела, занимающего в начальный момент положение C. Пусть точка P при движении M_1 пробегает траекторию e_1, а при движении M_2 — траекторию e_2. Если имеет место касание, соприкосновение или соприкосновение высшего порядка траекторий e_1 и e_2 для всех точек P данного множества, то говорят, что движения M_1 и M_2 взаимно касаются, соприкасаются или имеют соприкосновение высшего порядка на данном множестве. Доказываются следующие теоремы:

I. Для всякого вращательного движения можно бесчисленным множеством способов найти такие плоские движения, которые соприкасаются с данным движением во всех точках главной плоскости.

II. Точки, в которых траектории в начальный момент имеют перегиб, лежат в главной плоскости.

III. Геометрическое место точек, для которых соприкасающиеся плоскости траекторий параллельны линии касания a поверхностей S и S', представляют собой гиперболоид, называющийся гиперболоидом нормалей, так как оси кривизны траекторий точек Q этого гиперболоида перпендикулярны к мгновенной оси вращения.

IV. Для того чтобы существовали траектории, имеющие точку перегиба n-го порядка, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия: а) для наблюдателя, связанного с неподвижным пространством, главная плоскость должна казаться перемещающейся параллельно самой себе с точностью до бесконечно малых n-го порядка; б) для наблюдателя, связанного с подвижным телом, движение главной плоскости должно быть с точностью до бесконечно малых n-го порядка движением твердого тела, имеющего неподвижную точку. Ю. Л. Рабинович

3310. Графический способ определения приведенного момента инерции. Вяткин Г. П., Коростелев Л. В., Тр. Кафедры «Теория механизмов и машин». Моск. станкоинструм. ин-т, 1958, вып. 1, 90—93

В формулах для приведенных моментов инерции графическим путем находятся четвертые пропорциональные. С. Г. Кислицын

3311. Общее матричное уравнение механизмов. Калицин (Общо матрично уравнение на механизмите. Калицин Г.), Научни тр. Висш. лесотехн. ин-т, 1957, **5**, 261—274 (болг.; рез. русск.)

Выводится общее матричное уравнение механизмов с жесткими звеньями. Рассматривается механизм, у которого звенья связаны k кинематическими парами, причем получено его матричное уравнение. Рассматривается специальный пространственный механизм и получено его матричное уравнение. Показано, что последнее может быть получено из общего уравнения. Рассматривается пятизвеньевая цепь, причем получено ее матричное уравнение. Это уравнение может быть также получено из общего уравнения. А. Н. Матеев

3312. Конусы Пуансо, соответствующие движению крестовины кардановского сцепления. Марсикано (Los conos de Poinsot, correspondientes al movimiento de la cruz del acoplamiento cardánico. Marsicano Fénix Roberto), Atti Semin. mat. e fis. Univ. Modena, 1953—1954 (1954), **7**, 22—27 (исп.)

Дается аналитическое доказательство некоторых результатов работы Каррисо Руэда (Carrizo Rueda, Cienc. y técnica, 1950, **115**, № 578, 74), относящихся к конусам Пуансо кардановского сцепления. А. Л. Онищик

3313. Геометрическое изучение дисперсии положения подвижных частей при их «подгонке» на корпусах часов. Ланг (Etude géométrique sur la dispersion des emplacements des mobiles lors de l'opération de «repassage» des platines de montres. Langue Pierre), Ann. franç. chronom., 1958, **12**, № 1, 15—22 (франц.)

Пусть $A_i, B_i, \ldots, P_i$ — положения p подвижных частей на корпусе i-х часов ($i = 1, 2, \ldots, q$); $A_0, B_0, \ldots, P_0$ — положения наилучше центрированных подвижных частей. Векторы $\overrightarrow{A_0A_i}, \overrightarrow{B_0B_i}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_i}$ — полные дисперсии подвижных частей; $\vec{T}_i = \dfrac{\overrightarrow{A_0A_i} + \overrightarrow{B_0B_i} + \ldots + \overrightarrow{P_0P_i}}{p}$ — дисперсия трансляции (совокупности подвижных частей) i-го корпуса. $\overrightarrow{\delta A_i} = \overrightarrow{A_0A_i} - \vec{T}_i$, $\overrightarrow{\delta B_i} = \overrightarrow{B_0B_i} - \vec{T}_i, \ldots, \overrightarrow{\delta P_i} = \overrightarrow{P_0P_i} - \vec{T}_i$ — собственные дисперсии подвижных частей i-го корпуса; сумма их равна нулю. Ставится задача, зная в каждом из корпусов положение его подвижных частей, определить их собственные дисперсии и положение наилучше центрированных подвижных частей. Задача решается в предположении, что $\dfrac{\Sigma \vec{T}_i}{q} \to 0$ при $q \to \infty$. При этом условии доказывается, что

$$\overrightarrow{OA_0} = \frac{\overrightarrow{OA_1} + \ldots + \overrightarrow{OA_q}}{q}, \ldots, \overrightarrow{OP_0} = \frac{\overrightarrow{OP_1} + \ldots + \overrightarrow{OP_q}}{q}.$$

Отсюда, проектируя на оси координат, приходят к выводу, что координаты наилучше центрированных подвижных частей являются средними арифметическими соответствующих координат подвижных частей на всех корпусах. Для проекций дисперсий трансляции получают выражения:

$$\bar{T}_i^x = \frac{\overline{\Delta A_i^x} + \ldots + \overline{\Delta P_i^x}}{p} \quad (i = 1, \ldots, q),$$

где $\overline{\Delta A_i^x}, \ldots, \overline{\Delta P_i^x}$ — проекции полных дисперсий, и для проекций собственных дисперсий находят:

$$\overline{\delta A_i^x} = \overline{\Delta A_i^x} - \bar{T}_i^x, \ldots, \overline{\delta P_i^x} = \Delta P_i^x - \bar{T}_i^x.$$

$$(i = 1, \ldots, q)$$

А. Г. Школьник

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

3314. Построение эллипса посредством бумажной полосы. Якоби (Papierstreifenkonstruktion einer Ellipse. Jakobi R.), Math. und naturwiss. Unterr., 1958, **11**, № 5, 226 (нем.)

3315. Прямая Симпсона с 4 коллинеарными точками и ее приложение. Соукуп (Eine Simsonsche Gerade durch 4 kollineare Punkte und ihre Anwendung. Soucup H.), Math. und naturwiss. Unterr., 1957, **10**, № 2, 83 (нем.)

Если из произвольной точки окружности опустить перпендикуляры на стороны вписанного треугольника, то основания этих перпендикуляров лежат на одной прямой, которая называется прямой Симпсона.

В углах на сторонах угла BAC по паре точек B_1, B_2 и C_1, C_2 и соединяя их накрест, автор получает два треугольника $\triangle B_1AC_1$ и $\triangle B_2AC_2$, которые имеют общую вершину A и общие стороны AB_1B_2 и AC_1C_2. Описанные окружности, очевидно, пересекаются в вершине A и еще в некоторой точке F. Прилагая к этой точке теорему Симпсона, автор получает пару совпадающих прямых Симпсона, которые проходят через 4 точки — основания перпендикуляров на AB_1, AC_1, B_1C_2 и B_2C_1.

С. П. Фиников

3316. Составные фигуры в геометрии. Уайзман (Complex figures in geometry. Wiseman John D., Jr), Math. Teacher, 1959, **52**, № 2, 91—94 (англ.)

Рассматриваются плоские фигуры, составленные из треугольников, углов или отрезков прямых линий. Для работы со студентами высшей школы рекомендуется метод исследования таких фигур, основанный на подсчете инциденций. Для каждой фигуры составляется равенство, в одной части которого подсчитывается инцидентность точек прямым линиям, а в другой — инцидентность прямых линий точкам. Очевидно, что эти числа, получающиеся в результате подсчета, равны. Например, для четырехугольника с проведенной в нем диагональю названное равенство имеет вид

$$2_2 + 2_3 = 4_2 + 1_2, \text{ т. е. } 2\cdot 2 + 2\cdot 3 = 4\cdot 2 + 1\cdot 2.$$

П. Г. Колобов

3317. Звездчатый чертеж. Хуссейн (Star design. Hussain Q. M.), Calcutta Statist. Assoc. Bull., 1958, **8**, № 30—31, 110—118 (англ.)

Звездчатая фигура строится из выпуклого n-угольника ($n \geqslant 5$) с тупыми углами продолжением его сторон вовне до пересечения, в результате чего многоугольник дополняется с каждой стороны треугольником. Звездчатый многоугольник содержит $2n$ вершин, из которых n являются вершинами треугольников („подъемы“) и n — вершинами начального многоугольника („спуски“). Построенные путем продолжения сторон отрезки рассматриваются как „блоки“, каждый из которых содержит 4 вершины („разновидности“) — два подъема и два спуска. Вершины перенумеровываются в натуральном порядке, начиная с какого-нибудь подъема. Каждая вершина входит в состав двух блоков. Вместе с данной вершиной в один блок входит 6 вершин и не входят $2n-7$ вершин. Если рассматриваемая пара вершин входит в один и тот же блок, то говорят об 1-сопряженной паре, если не входит —0-сопряженной. Символом $p^i_{j,k}$ $(i, j, k = 0, 1)$ по отношению к i-сопряженной паре вершин Θ_1 и Θ_2 обозначается число вершин, отличных от Θ_1 и Θ_2, которые j-сопряжены по отношению Θ_1 и k-сопряжены по отношению к Θ_2. Для пятиконечной звезды $p^i_{j,k}$ не зависит от самих вершин Θ_1 и Θ_2, а только от их сопряженности: для всех i-сопряженных пар $p^i_{j,k}$ имеет одно и то же значение (в зависимости от j и k). Таким образом при $n = 5$ звезда может быть задана матрицами

$$\left\| p^0_{j,k} \right\| = \begin{pmatrix} 02 \\ 24 \end{pmatrix}; \quad \left\| p^1_{j,k} \right\| = \begin{pmatrix} 12 \\ 13 \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

При $n > 5$ исследование усложняется в силу того, что одинаково сопряженным парам вершины уже не всегда соответствуют одинаковые матрицы $\left\| p^i_{j,k} \right\|$. Так, при $n = 6$ 0-сопряженным парам (1,3), (1,6), (2,6) соответствует матрица $\begin{pmatrix} 13 \\ 33 \end{pmatrix}$, а 0-сопряженным парам (1,7) и (2,8) — матрица $\begin{pmatrix} 04 \\ 42 \end{pmatrix}$. В статье проведено рассмотрение звезд для $n = 5, 6, 7, 8$.

А. Г. Школьник

3318. «Мериальные» треугольники. Пиз (Merial triangles. Pease E.), Math. Gaz., 1958, **42**, № 342, 288 (англ.)

Назовем треугольник „мериальным“, если квадрат одной стороны треугольника численно равен площади прямоугольника, построенного на двух других сторонах, иначе одна сторона равна среднему геометрическому двух других. Треугольник, подобный „мериальному“, является „мериальным“. Треугольник, у которого стороны пропорциональны произведениям сторон „мериального“ треугольника, также является „мериальным“. Рассматривается „мериальный“ треугольник, у которого отношение сторон $b/a = x$, где x — действительный корень уравнения $x^5 = x + 1$. Из этого треугольника простым построением получается еще пять „мериальных“ треугольников.

С. И. Зетель

3319. Прямоугольник и равносторонний треугольник. Тебо (Rectangle et triangle équilatéral. Thébault V.), Mathesis, 1958, **67**, № 9-10, 355—356 (франц.)

Если прямоугольник $ABCD$ описан около равностороннего треугольника AEF так, что BC проходит через E, CD — через F, то треугольники CBF' и DCE' с вершинами F' и E', лежащими в серединах AF и AE, — равносторонние. Справедливо и обратное заключение. Рассматривается огибающая диагонали BD прямоугольника $ABCD$, когда последний изменяется определенным образом, оставаясь описанным около фиксированного равностороннего треугольника AEF.

С. И. Зетель

3320. Равносоставленность плоских многоугольников. Болтянский (Zerlegungsgleichheit ebener Polygone. Boltjanski W.), Bul. Inst. politehn. Iași, 1958, **4**, № 1-2, 33—38 (нем.; рез. русск., рум.)

Многоугольники M и M', лежащие в некоторой плоскости, называются $\mathfrak{G}$-равносоставленными, если $M = \bigcup_{i=1}^{k} N_i$, а $M' = \bigcup_{i=1}^{k} g_i(N_i)$, где g_i являются элементами некоторой группы $\mathfrak{G}$ движений на плоскости, и ни многоугольники N_i, ни многоугольники $g_i(N_i)$ не имеют общих внутренних точек. Если $\mathfrak{S}$ — группа всех центральных симметрий и переносов плоскости, то, как доказали Хадвигер и Глюр (Hadwiger H., Glur P., Elem. Math., 1951, **6**, 97—107), всякие два равновеликих многоугольника $\mathfrak{S}$-равносоставлены. Этим была обобщена классическая теорема (Бойяи, Гервин) о равносоставленности многоугольников. В статье ставится задача — найти все группы $\mathfrak{G}$ движений, обладающие тем свойством, что любые два равновеликих многоугольника $\mathfrak{G}$-равносоставлены; автор называет такие группы $\mathfrak{Z}$-группами. Доказывается, что для того чтобы некоторая группа движений $\mathfrak{G}$ была $\mathfrak{Z}$-группой, необходимо и достаточно, чтобы она содержала группу $\mathfrak{S}$. Достаточность условия $\mathfrak{G} \supseteq \mathfrak{S}$ следует из теоремы Хадвигера — Глюра. Для доказательства необходимости нужно показать, что $\mathfrak{S}$ является минимальной $\mathfrak{Z}$-группой. Доказательство основывается на двух леммах, в первой из которых доказывается, что каждая $\mathfrak{Z}$-группа транзитивна, т. е. содержит в себе элементы, переносящие любую точку плоскости в любую другую. Во второй лемме доказывается, что каждая $\mathfrak{Z}$-группа содержит по крайней мере одну центральную симметрию.

А. Г. Школьник

3321. Об одном классе тетраэдров. Тебо (Sur une classe de tétraèdres. Thébault Victor), Rev. math. spéc., 1959, **69**, № 7, 481—482 (франц.)

Вопрос Зеемана: «каким условиям должен удовлетворять тетраэдр, чтобы прямые, соединяющие каждую вершину с центром круга, описанного около противоположной грани, были бы прямолинейными образующими гиперболоида» — был следующим образом разрешен Глезером: такими тетраэдрами и являются тетраэдр с равными гранями и ортоцентрический тетраэдр.

Показано, что, кроме этих тетраэдров, условию задачи Зеемана удовлетворяет дважды симметричный тетраэдр. Все три тетраэдра относятся к одному классу, обладающему следующими свойствами:

1) эти тетраэдры — тетраэдры Дарбу,

2) их вершины проектируются ортогонально на прямую Эйлера противоположной грани,

3) прямые, соединяющие середины противоположных ребер, пересекаются в одной точке.

Глезер, при исследовании полученной им системы уравнений, пропустил один случай, приводящий к дважды симметричным тетраэдрам. С. И. Зетель

3322. Ребра тетраэдра. Тебо (Arêtes d'un tétraèdre. Thébault V.), Mathesis, 1958, **67**, № 9-10, 361—362 (франц.)

Три равных ребра тетраэдра могут лежать в одной плоскости или исходить из одной вершины, или одно ребро может пересекать два других.

1. В первом случае, если одна из граней — равносторонний треугольник, то из трех ребер тетраэдра, не принадлежащих этой грани, можно построить треугольник. Получено обобщение теоремы Помпейю для пространства.

2. Во втором случае, если равные ребра исходят из одной вершины $DA=DB=DC=a$, то основание высоты DD' совпадает с центром круга, описанного около грани ABC; сфера двенадцати точек касается грани ABC. Антипараллельные сечения подобны треугольнику ABC. В частном случае, если $BC=CD=DB=DA$, то тетраэдр принадлежит к обоим рассмотренным классам.

3. В третьем случае, если $AD=DB=BC=a$, то удвоенные медианы B_1B_1', C_1C_1' относительно ребер CA и DB, AB и DC взаимно перпендикулярны. С. И. Зетель

3323. Конструктивные возможности чертежных инструментов (Конструктивна мощ на инструментите за чертане. Галев Любен), Матем. и физика (Бълг.), 1958, **1**, № 6, 1—10 (болг.)

Рассмотрено семнадцать задач на построение ограниченными средствами (например, построение прямой, параллельной двум данным при помощи одной линейки). Один параграф посвящен построениям одной линейкой при заданной окружности с отмеченным центром. Подробно рассмотрены построения, производимые линейкой и шаблоном, состоящим из дуги с отмеченным центром (транспортир без делений). Показано решение линейкой и шаблоном следующих задач:

1) отыскание середины отрезка, построение прямой, параллельной данной, 2) построение перпендикуляра к данной прямой, 3) построение биссектрисы, 4) деление отрезка в отношении, в котором разделен другой данный отрезок данной на ней точкой и 5) отыскание точки пересечения прямой и окружности. Далее рассмотрены построения с помощью прямого угла и, наконец, построения при помощи двух прямых углов. В заключение показано построение правильного семиугольника при помощи линейки, циркуля и двух прямых углов. С. И. Зетель

3324. О построении параллельных прямых с помощью линейки и прямого угла. Байер (Über die Konstruktion von Parallelen mit Hilfe des Lineals und ortsfester rechter Winkel. Baier Othmar), Math. Z., 1959, **71**, № 1, 94—98 (нем.)

Известно, что невозможно провести одной линейкой в евклидовой плоскости через произвольную точку прямую, параллельную данной. При задании двух параллельных прямых возможно через данную точку провести прямую, параллельную данным, при помощи одной линейки, которая может иметь сколь угодно малую длину. При задании двух пар параллельных прямых (каждая пара имеет различные направления) возможно провести при помощи сколько угодно короткой линейки прямую, параллельную произвольной прямой. Если в плоскости дано какое угодно количество прямых углов с различными вершинами, то, вообще говоря, невозможно построить пару параллельных при помощи одной линейки. При заданных двух прямых углах на основании теоремы о пересечении высот можно построить, кроме имеющихся двух прямых углов, еще третий. Построение пары параллельных возможно лишь при специальном расположении двух прямых углов. Доказана при помощи центральной коллинеации невозможность построения пары параллельных при наличии как угодно расположенных прямых углов. Показано, что при данных трех точках A, B, C, не лежащих на одной прямой и являющихся каждая вершиной пары прямых углов, возможно построить пару параллельных прямых, пользуясь одной сколь угодно малой линейкой. Показано, что при замене прямых углов произвольными равными углами достаточно иметь две тройки таких углов с вершинами в точках A и B, чтобы, пользуясь одной сколь угодно короткой линейкой, строить параллельные прямые. С. И. Зетель

3325. Построение окружности, касающейся двух данных прямых и данной окружности. Мацкевич (Graphical construction of a circle tangent to two given lines a given circle. Mazkewitsch D.), Math. Teacher, 1959, **52**, № 2, 119—120 (англ.)

Дается весьма простое решение задачи на построение окружности, касающейся двух данных прямых и данной окружности. П. Г. Колобов

3326 К. Теоретическая геометрия. Для старших классов средних школ. Дузи-Даниэле, Баньято (Geometria razionale. Ad uso scuole medie super. Vol. I. Dusi Daniele Maria, Bagnato Luigi. Torino, S. E. I., 1958, IV, 188 p., 900 L.), Bibliogr. naz. ital., 1958, **1**, № 8, 300 (итал.)

3327 К. Линейка в геометрических построениях. Смогоржевский А. С., М., Гостехтеориздат, 1957, 63 стр., илл., 95 к.

Книжка является 25-м выпуском популярных лекций по математике и заключает две главы (63 стр.). В первой даны некоторые определения и теоремы синтетической и проективной геометрии (например, бесконечно удаленные элементы плоскости, симметрия относительно окружности, степень точки относительно окружности, радикальная ось двух окружностей, двойное отношение и т. д.). Заканчивается глава полярными свойствами конических сечений и теоремами Брианшона и Паскаля. Во второй главе рассматриваются построения с помощью линейки, для обоснования которых используются теоремы первой главы. В § 18 второй главы хорошо доказана невозможность построения одной линейкой центра окружности, в следующем параграфе приведены возможные случаи построения одной линейкой центров двух начерченных окружностей. Книжка с успехом может быть использована учителем на уроках математики и в школьных кружках. С. И. Зетель

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

3328. Теорема о локсодромах. Брёйн (Een stelling over loxodromen. Bruijn P. J.), Simon Stevin, 1958, **32**, № 4, 159—161 (гол.)

Обозначая через $\frac{1}{\tau}$ кручение кривой, а через ds ее линейный элемент, автор называет интеграл $\int\frac{ds}{\tau}$, распро-

страненный по данной кривой, ее полным кручением. Доказывается, что для сферических локсодром полное кручение равно π, не завися, таким образом, ни от угла λ, под которым локсодрома пересекает меридианы, ни от радиуса сферы. Вырожденные случаи локсодром — меридианы ($\lambda = 0$) и параллели $\left(\lambda = \frac{\pi}{2}\right)$ — не удовлетворяют сформулированному предложению. Ю. М. Гайдук

3329. Свойство квадратно-корневой улитки. Тёйффель (Eine Eigenschaft der Quadratwurzelschnecke. Teuffel Erich), Math.-phys. Semesterber., 1958, **6**, № 1-2, 148—152 (нем.)

Рассматривается последовательность треугольников AB_nB_{n+1} ($n = 1, 2, \ldots$), прямоугольных в вершинах B_n со сторонами $AB_1 = B_nB_{n+1} = 1$. Многоугольная кривая $AB_1B_2B_3\ldots$ (асимптотически приближающаяся к архимедовой спирали), вершины которой B_n отстоят от начальной точки A на расстоянии $\sqrt{n}$, называется квадратно-корневой улиткой. Доказывается, что ни на прямых AB_n, ни на прямых B_nB_{n+1} не лежат никакие последующие вершины улитки. Доказательство этих двух теорем опирается на 3 леммы.

1. $U_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu s_{2\nu}^{(n)}$ и $V_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu s_{2\nu+1}^{(n)}$,

где $s_\nu^{(n)}$ определяются с помощью производящей функции

$$\prod_{\nu=1}^{n} (x + \operatorname{ctg} \alpha_\nu) = \sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu^{(n)} x^\nu \quad (\alpha_\nu \neq k\pi,\ s_\nu^{(n)} = 0 \text{ при } \nu > n) \tag{1}$$

связаны соотношениями

$$\left.\begin{aligned} U_n &= \operatorname{ctg} \alpha_n U_{n-1} - V_{n-1} \\ V_n &= U_{n-1} + \operatorname{ctg} \alpha_n V_{n-1} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

и имеют место тождества

$$\left.\begin{aligned} \cos(\alpha_1 + \ldots + \alpha_n) &= \prod_{\nu=1}^{n} \sin \alpha_\nu \cdot U_n, \\ \sin(\alpha_1 + \ldots + \alpha_n) &= \prod_{\nu=1}^{n} \sin \alpha_\nu \cdot V_n. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

II. Если $p_1, \ldots, p_n$ — не содержащие квадратов натуральные числа, каждое из которых имеет простой множитель, не принадлежащий другим числам этой совокупности, то $\sqrt{p_\nu}$ ($\nu = 1, \ldots, n$) не принадлежит расширению, полученному присоединением к полю рациональных чисел квадратных корней из остальных чисел.

III. Всегда существует простое число p, которое входит и притом в первой степени в состав одного и не более чем двух чисел отрезка натурального ряда

$$n+1, \ldots, n+k \quad (k > 3\sqrt{n-1}).$$

Допущение, что вершины B_{n+1} и B_{n+k+1} лежат на одной прямой, проходящей через A, означает, что

$\varphi_{n+1} + \ldots + \varphi_{n+k} = \lambda\pi$ ($\varphi_\nu = \operatorname{arctg} \sqrt{\nu}$; λ — целое $\geqslant 1$), причем $k > \pi\sqrt{n+1}$. Но в таком случае $\sin(\varphi_{n+1} + \ldots + \varphi_{n+k}) = 0$, откуда из (3) выводится, что $V_k = \sum (-1)^\nu s_{2\nu+1}^{(k)} = 0$, где $s_{2\nu+1}^{(k)}$ — элементарные симметрические функции от

$$\operatorname{ctg} \varphi_\mu = \sqrt{\mu} \quad (\mu = n+1, \ldots, n+k;\ k > \pi\sqrt{n+1}).$$

Отсюда, опираясь на соотношение (2) и лемму III, приходят к противоречию с леммой II, что и доказывает первую теорему. Доказательство второй теоремы, несколько более длинное, проводится по той же схеме. А. Г. Школьник

3330 К. Элементы аналитической геометрии для лицеев с математическим уклоном индустриально-технических институтов. Равердино (Elementi di geometria analitica per i licei scientifici e gli istituti tecnici industriali. Raverdino Carlo. Torino, Lit. Viretto, 1958, 124 p., ill.—Litogr.), Bibliogr. naz. ital., 1958, **1**, № 2, 59 (итал.)

3331 К. Векторы и тензоры. Деккерт (Vektoren und Tensoren. Eine Einf. Erw. 3. Ausg. d. «Einführung in die Vektorrechnung». Deckert Adalbert. Füssen, Winter, 1958, 189 S., ill., 13.80 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1959, **A**, № 15, 1244 (нем.)

3332 К. Учебник аналитической геометрии плоскости для техникумов по машиностроению. 2-е улучшенное издание. Карл, Георги (Lehrbuch der analytischen Geometrie der Ebene für die Fachschulen des Maschinenbaus. 2. verb. Aufl. Carl J., Georgi H. Leipzig, Fachbuchverlag, 1959, 137 S., ill., 6.80 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1959, **A**, № 11, 884 (нем.)

3333 К. Аналитическая геометрия. Гротемейер (Analytische Geometrie. Grotemeyer Karl Peter. Berlin, de Gruyter, 1958, 202 S., ill., 4.80 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1959, **A**, № 8, 622 (нем.)

3334 К. Решение задач по аналитической геометрии в пространстве с помощью векторной алгебры. Алябьева Е. Н., Моск. ин-т хим. машиностр. М., 1959, 22 стр., илл. беспл.

3335 К. Аналитическая геометрия. Бейл, Сале (Analytische meetkunde. 1. 2e dr. Bijl J., Salet W. J. H. Delft, Delftsche U. M., 1959, 196 blz., 13.00 fl.), Nieuwe uitgaven Nederl., 1959, **21**, № 2, 22 (гол.)

3336 К. Основания геометрии. Инструктивные письма для заочного обучения для учителей средних школ. Педагогический институт в Потсдаме. 1-я часть, Математика. Гроше (Grundlagen der Geometrie. Lehrbriefe f. d. Fernstudium d. Oberstufenlehrer. Pädag. Hochschule Potsdam. Teil 1. Mathematik. Grosche Günter. Berlin, Dtsch. Verl. Wiss., 1958, 89 S., ill.), Dtsch. Nationalbibliogr., 1959, **B**, № 6, 567 (нем.)

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

3337. Начертательная геометрия. Четверухин Н. Ф. В сб.: Матем. в СССР за 40 лет, 1917—1957. Т. I. М., Физматгиз, 1959, 893—898

3338. Новый прибор для выполнения проективного преобразования плоскости. Хорват (Ujkészülék síkbeli projektív transzformáció végrehajtására. Horváth Ferenc), Magyar tud. akad. Mat. kutató int. közl., 1956, **1**, № 3, 457—463 (венг.; рез. русск., нем.)

Отмечается, что при построении номограмм часто возникает необходимость произвести проективное преобразование плоскости с расположенной на ней декартовой системой координат. При этом преобразование квадратной сетки на плоскости в сетку Мёбиуса может быть выполнено при помощи описываемого прибора. После преобразования вида номограммы подключают координатограф и получают окончательную номограмму. При проведении доказательства в работе используются теоремы Дезарга и свойства перспективных преобразований. Н. Ф. Четверухин

3339. Приемы решения проекционных задач на перспективном чертеже. Горбунов К. Г., Тр. Саратовск. ин-та механиз. с. х., 1959, вып. 13, 186—198

Работа посвящена изложению способов решения некоторых позиционных и метрических задач на комплексном чертеже, представляющем собой один из частных видов чертежа, построенного по методу двух изобра-

жений: изображение объекта конструируется путем проектирования его из двух различных центров проекций на одну плоскость проекций. Оригинальных результатов работа не содержит. И. И. Котов

3340. Центральные аксонометрические проекции. Юдицкий М. М., Тр. Новосиб. электротехн. ин-та, 1958, 1, 111—122

Автор излагает основные свойства так называемой «нормальной» центральной аксонометрии, т. е. центральных аксонометрических проекций для случая, когда главный луч зрения проходит через начало натуральной системы координат. Доказывается, что любая центральная проекция предмета может быть принята за его нормальную центральную аксонометрическую проекцию и дается способ установления соответствующей аксонометрической системы координат. Далее излагается способ построения центральной аксонометрии при помощи двух пар перспективных пучков лучей и дается решение задачи преобразования чертежа нормальной центральной аксонометрии в комплексный чертеж ортогональных проекций. И. И. Котов

3341. Развитие метода касательных поверхностей при построении контуров собственной тени на телах вращения. Порсин Ю. Я., Тр. Всес. заочн. лесотехн. ин-та, 1958, № 3, 81—87

Рассматривается задача построения контура собственной тени поверхности вращения методом вписанных сфер при стандартном направлении лучей света. В этом случае контур тени на сфере проектируется в виде эллипса определенной формы и положения на плоскости проекций. Точки пересечения с проекцией окружности касания сферы с поверхностью вращения принадлежат искомому контуру собственной тени последней. Так как окружность касания проектируется в виде отрезка, то задача сводится к построению точек пересечения эллипса с прямой, что выполняется при помощи родственного соответствия эллипса с окружностью очерка вписанной сферы без построения самого эллипса.

В работе рассмотрены случаи, когда 1) ось поверхности вращения расположена параллельно плоскости проекций и 2) ось поверхности вращения имеет общее положение. Второй случай сводится к первому, причем с помощью перемены плоскости проекций строится проекция линии пересечения плоскости касания сферы с поверхностью вращения и плоскости собственной тени сферы. Затем находятся точки пересечения построенной линии и проекции контура тени на сфере с помощью родственного соответствия. Автор приводит ряд примеров, подсчитывая число необходимых построений. Н. Ф. Четверухин

3342. Аналитический метод для построения аксонометрических систем координат в центральной проекции. Палувер Н. В., Тр. Таллинск. политехн. ин-та, 1957, А, № 120, 23 стр., илл.

Рассматриваются необходимые и достаточные условия осуществления известной теоремы Круппа о проектируемости дезарговой конфигурации специального вида в плоскую дезаргову конфигурацию. В аналитической форме эти условия могут быть записаны следующим образом:

$$\frac{p^2+q^2-2pq\cos m}{K_1^2+K_2^2}=\frac{p^2+r^2-2pr\cos n}{K_1^2+K_3^2}=$$

$$=\frac{q^2+r^2-2qr\cos(n-m)}{K_2^2+K_3^2},$$

где $p, q, r, K_1, K_2, K_3, m, n$, — 8 параметров, определяющих плоскую дезаргову конфигурацию. Если задать 6 из этих параметров, то 2 недостающих могут быть определены из написанных выше уравнений. Автор выделяет 9 (из 28 возможных) полученных таким образом типичных задач, дает способ решения каждой из них и высказывает ряд соображений о возможном числе решений и в частности о существовании вещественных решений. Н. Ф. Четверухин

3343. Кручение линии типографической поверхности. Рыжов Н. Н. Тр. Всес. заочн. энерг. ин-та, 1957, вып. 10, 5—14

Рассматривается топографическая поверхность, заданная на чертеже семейством горизонталей, а также линия на этой поверхности. Линия представляет собой ломаную, состоящую из звеньев, концы которых лежат на смежных горизонталях. Автор устанавливает понятие «среднего кручения» на данном звене линии как отношение угла между смежными соприкасающимися плоскостями к длине звена. Определение соприкасающейся плоскости для линии на топографической поверхности было дано в кандидатской диссертации автора. Далее определяется «кручение» линии на топографической поверхности в данной точке (которая является вершиной ломаной) как среднее арифметическое между средними кручениями на смежных звеньях данной точки. Затем рассматривает ряд случаев, когда можно установить метрическую оценку (в форме неравенства) угла между смежными соприкасающимися плоскостями. Н. Ф. Четверухин

3344 К. Начертательная геометрия. 1-й том. Крамер (Darstellende Geometrie. Bd. I. Kramer Werner. Berlin, Dtsch. Verl. Wiss., 1959, VIII, 188 S., ill., 12.50 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1959, A, № 19, 1538 (нем.)

3345 К. Проекции с числовыми отметками. (Лекции). Русскевич Н. Л., Харьков, Харьковск. ун-т, 1959, 36 стр., илл., 65 коп.

3346 К. Начертательная геометрия. Хаскин А. М., Киевск. политехн. ин-т. Киев, 1959. Лекция 15. Взаимное пересечение поверхностей. (Общий случай пересечения). 15 стр., илл., 40 коп. Лекция 16. То же. (Продолжение). 22 стр., илл., 40 коп.

3347 К. Начертательная геометрия с приложениями. Бомпьяни (Geometria descrittiva con applicazioni. Bompiani Enrico. Roma, Lit. Marves. 1958, 316 p., ill. — Litogr.), Bibliogr. naz. ital., 1958, 1, № 2, 59 (итал.)

ПРОЕКТИВНАЯ И НЕЕВКЛИДОВЫ ГЕОМЕТРИИ

3348. Новое доказательство аксиомы об окружности для двух окружностей в гиперболической плоскости при помощи исчисления концов Гильберта. Сас (New proof of the circle axiom for two circles in the hyperbolic plane by means of the end-calculus of Hilbert. Szász Paul), Ann. Univ. scient. budapest. Sec. math., 1958, 1, 97—100 (англ.)

В гиперболической плоскости, кроме групп аксиом Гильберт I, II, III, вводятся еще и следующие две:

Аксиома IV. Пусть P, Q — две различные точки в плоскости и QY — полупрямая с одной стороны прямой PQ. Тогда с той же стороны всегда существует полупрямая PX, которая не пересекает QY, но любая внутренняя полупрямая PZ, лежащая в $\sphericalangle QPX$, пересекает полупрямую QV.

Аксиома IV_s. В плоскости всегда существует прямая s_0 и точка P_0, не лежащая на ней, через которую можно провести две различные прямые, не пересекающие прямую s_0.

Доказывается теорема: Если некоторая окружность в плоскости имеет одну точку вне и одну точку внутри другой окружности, то окружности пересекаются в двух точках. Доказательство сделано с помощью исчисления концов Гильберта, с непосредственным введением координат Вейерштрасса. А. Н. Матвеев

3349. Система аксиом геометрии Мёбиуса. Янковский (The system of axioms of the Möbius geometry. Jankowski A.), Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1958, **6**, № 8, 489—494, XXXIX (англ.; рез. русск.)

n-мерная геометрия Мёбиуса определяется ее моделью M_n в метрической евклидовой геометрии. К n-мерному точечному пространству E^n добавляется бесконечно удаленная точка, которая, по определению, инцидентна любой прямой и не инцидентна никаксй сфере. Под общим названием M-сфер понимают либо гиперсферу (поверхность n-мерного шара), либо гиперплоскость (n — 1-мерную плоскость). M_n состоит из точек и M-сфер и отношения инцидентности между ними. Группа преобразований, отображающая точку на точку и M-сферу на M-сферу с сохранением инцидентности, определяет геометрию Мёбиуса. Точки $P_1, \ldots, P_k$ зависят от точек $Q_1, \ldots, Q_e$, если точки первой системы инцидентны любой M-сфере, которой инцидентны точки второй системы. Система точек называется зависимой, если одна из точек зависит от остальных; в противном случае система независима. Аналогично определяется зависимость и независимость M-сфер. Две M-сферы называются касательными, если существует единственная точка, им инцидентная, и называются соединенными, если существуют две независимые точки, им инцидентные. Говорят, что точки A_1 и A_2 отделены M-сферой a, если эта сфера неинцидентна обеим точкам вместе и соединена с любой M-сферой, проходящей через обе точки. Точки $A_1, \ldots, A_k$ называются сопряженными с M-сферами $a_1, \ldots, a_k$, если каждая точка инцидентна соответствующей M-сфере, причем у двух различных M-сфер a_l и a_k существует касающаяся их в точках A_l и A_k M-сфера s_{lk}. Строится система аксиом, состоящая из 6 групп: 1) аксиом зависимости, 2) касания, 3) соединения, 4) отделимости, 5) сопряженности, 6) непрерывности. Доказывается, что эта система обладает свойством категоричности, т. е. две любые модели, в которых осуществляются эти аксиомы, изоморфны, и что эта система выполняется в M_n. А. Г. Школьник

3350. Радикальная плоскость двух «сфер» в геометрии Лобачевского. Дыманов Р. Г., Уч. зап. Харьковск. гос. пед. ин-та, 1957, **21**, 131—138

Определяются степени относительно сферы, гиперсферы и орисферы. Эти поверхности автор называет общим термином «сферы». Изучается радикальная плоскость двух «сфер».

Предварительно изучаются геометрические места точек, гиперболические синусы расстояний кривых 1) от двух данных пересекающихся, 2) от двух данных расходящихся, 3) от двух данных параллельных плоскостей находятся в данном отношении. Автор приходит к следующим предположениям:

1. В зависимости от взаимного расположения двух «сфер» их радикальная плоскость может быть собственной или идеальной.

2. Если две «сферы» пересекаются, то их радикальной плоскостью будет плоскость линии пересечения этих сфер.

3. Если две сферы касаются одна другой, то радикальной плоскостью будет плоскость, касающаяся данных «сфер» в их общей точке.

4. Если две «сферы» не имеют общих точек, то и радикальная плоскость тоже не имеет с ними общих точек. М. А. Джавадов

3351. О теореме Г. Ф. Бэкера. Аль-Дхахир (On a theorem of H. F. Baker. Al-Dhahir M. W.), Proc. Math. and Phys. Soc. Egypt, 1956 (1957), **5**, № 4, 57—60 (англ.)

Пусть в проективном пространстве, определенном над полем F, 0123 — полный четырехугольник. Через шесть сторон этого четырехугольника проведем плоскости, отличные от плоскости 0123. Каждому треугольнику, образованному вершинами четырехугольника 0123 (таких четыре), соответствует точка пересечения трех плоскостей, проходящих через его стороны. Полученные четыре точки тогда и только тогда лежат в одной плоскости, когда F коммутативное. Эта теорема обобщается на случай $(2n+1)$-мерного проективного пространства ($n \neq 0$) Доказательство чисто синтетическое. В. А. Маневич

3352. Представление коллинеации на плоскости в виде произведения двух полярных соответствий. Маневич В. А., Укр. мат. ж., 1958, **10**, № 2, 219

В предыдущей работе автора (РЖМат, 1958, 1497) было дано конструктивное решение задачи о возможности представления коллинеации на плоскости в виде произведения двух полярных соответствий, в том случае, когда коллинеация имеет три действительных двойных точки. В настоящей статье рассматривается та же задача, но уже для любой коллинеации, исключая лишь такие из них, которые имеют только одну двойную точку, лежащую на двойной прямой. Автор показывает, как могут быть найдены два конических сечения α^2 и β^2, определяющие те полярности, произведение которых выражает данную коллинеацию. Н. Ф. Четверухин

3353. Коллинеарное преобразование пространства посредством восстановления. Крох (Collineation of space by erection. Kroch Aryeh), Riveon lemat., 1954, **8**, 65—75 (иврит.; рез. англ.)

Коллинеация, будучи проективным преобразованием, может быть осуществлена посредством проектирования, только если фигуры будут одного или двух измерений (фиг. 1, 2, 3 статьи); если же фигуры трехмерны, то коллинеация не может быть осуществлена только проектированием; здесь надо пользоваться также восстановлениями. Такая коллинеация может быть построена двумя проекциями трехмерной фигуры на одну или на две плоскости и восстановлением по этим проекциям (фиг. 4, 5).

Коллинеация, несомненно, может быть получена посредством восстановления, если прямая, соединяющая два восстановления, пересекает другую прямую, соединяющую две точки проекций в одной точке на плоскости проекции (фиг. 6), однако, если мы пользуемся двумя плоскостями проекции, эти две линии будут совпадать (фиг. 7).

Таким путем можно получить один тетраэдр из другого параллельным проектированием и параллельными восстановлениями (фиг. 10). Можно также получить трехгранную бипирамиду из другой, используя центральное проектирование и центральное восстановление (фиг. 11), так как два тетраэдра всегда аффинны и две трехгранные бипирамиды всегда проективны.

Мы можем также выполнить проективное преобразование двумерной фигуры, пользуясь проектированием и восстановлениями, если обе проективные фигуры лежат в одной плоскости. Для этой цели надо проектировать фигуру на одну или на две прямые и восстановить из этих проекций проективную фигуру (фиг. 8, 9).

Резюме автора

3354. Представление проективных преобразований. До (The representation of projectivities. Deaux R.), Math. Gaz., **42**, № 341, 228 (англ.)

Автор указывает, что представление проективных преобразований одномерного пространства точками трехмерного пространства, предложенное Примрозом (РЖМат, 1958, 4117) уже рассматривалось ранее Стефаносом (C. Stephanos, Math. Ann., 1883, 22, 299). А. Г. Школьник

3355. Топологическая классификация коллинеаций проективной плоскости. Алексеева Г. П., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1959, № 2, 12—27

Приводятся доказательства теорем, опубликованных автором ранее (РЖМат, 1956, 1599). В. А. Маневич

3356. Коллинеации, связанные с соответствием между двумя кривыми. Юза Милослав, Чехосл. матем. ж. 1958, 8, № 4, 563—572 (русск., рез. франц.)

Пусть c и $\bar{c}$ — кривые, расположенные соответственно в проективных пространствах S_n и $\bar{S}_n$ и уравнения которых зависят от одного параметра t; f — точечное соответствие между c и $\bar{c}$; $L(t)$ — коллинеации между пространствами S_n и $\bar{S}_n$, осуществляющие аналитическое касание $(n+1)$-го порядка между c и $\bar{c}$ в отдельных точках $C(t)$ кривой c и связаные с соответствием f. $\bar{L}\ t)$ — коллинеации, осуществляющие такое же касание между двойственными c и $\bar{c}$ кривыми. Показано, что $L(t)$ и $\bar{L}(t)$ совпадают на касательных к c в точках $C(t)$. Берутся коллинеации $K(t)$, совпадающие с $L(t)$ и $\bar{L}(t)$ на касательных к c в точках $C(t)$ и связанные с соответствием f. Рассматривается, на какой части пространства S_n коллинеации $L(t)$, $\bar{L}(t)$, $K(t)$ совпадают. В. А. Маневич

3357. Модели проективного и евклидова пространства. Ганс (Models of projective and Euclidean space. Gans David), Amer. Math. Monthly, 1958, 65, № 10, 749—756 (англ.)

Ставится задача построения наглядной модели для одновременного изображения евклидова и проективного трехмерных пространств. Рассматривается преобразование:

$$x' = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+1}},\quad y' = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+1}},\quad z' = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+1}}. \qquad (T)$$

Это преобразование относит каждой точке (x, y, z) пространства точку (x', y', z'), лежащую внутри единичной сферы S с центром в начале, и устанавливает непрерывное и взаимно однозначное соответствие между точками 3-мерного евклидова пространства и внутренними точками единичного шара с центром в начале координат O. Происходит радиальное сжатие пространства к началу, при котором точка P пространства, отстоящая от начала на расстоянии $r\ (>0)$, преобразуется в точку P', лежащую на том же луче OP на расстоянии $OP' = r/\sqrt{r^2+1}$. Вообще же ни коллинеарность точек, ни углы не сохраняются. Плоскость, проходящая через O, преобразуется в лежащую в той же плоскости внутренность большого круга сферы S. Плоскость p, не проходящая через начало, $ax+by+cz=d$ $(d\neq 0,\ a^2+b^2+c^2=1)$ — в лежащую внутри S полуповерхность эллипсоида вращения, границей которой (не принадлежащей поверхности) служит большой круг на S, а осью симметрии — перпендикуляр, опущенный из O на p; на этом перпендикуляре, на расстоянии $|d|/\sqrt{1+d^2}$ от O лежит вершина полуэллипса. Таким образом, в полученной топологической модели евклидова пространства семейство параллельных плоскостей изображается внутренностью большого круга единичной сферы и опирающимися на границу этого круга открытыми полуповерхностями эллипсоидов. Прямая пространства, проходящая через начало, изображается в этой модели ее отрезком — диаметром сферы S (исключая ее концы); все другие прямые пространства, ей параллельные, — опирающимися на этот диаметр открытыми полуэллипсами. Добавляя к построенной шаровой модели евклидова пространства точки сферы S, отождествляя при этом диаметрально противоположные точки, получают топологическую модель 3-мерного проективного пространства. При этом поверхность S и ее большие круги становятся проективной плоскостью и ее проективными линиями. Семейство параллельных прямых пространства в этой модели изображается семейством проективных линий, проходящих через одну точку на S, состоящим из диаметра S и опирающихся на него полуэллипсов; семейство параллельных плоскостей изобразится семейством проективных плоскостей, проходящих через одну и ту же линию на S, — замкнутым большим кругом и опирающимися на него поверхностями полуэллипсоидов. А. Г. Школьник

3358 К. Основы и аналитическое построение проективной, евклидовой и неевклидовой геометрии. 3-е значительно переработанное издание. Хефтер (Grundlagen und analytischer. Aufbau der projektiven, euklidischen, nichteuklidischen Geometrie. 3. wesentl. überarb. Aufl. Hefftter Lothar. Stuttgart. Teubner, 1958, 191 S., ill., 16.80 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1959, A, № 17, 1403 (нем.)

3359 К. Лекции по проективной геометрии. Мазотти-Биджоджеро (Lezioni di geometria proiettiva. 3a ed. Masotti Biggiogero Giuseppina. Milano, C. Tamburini, 1958, XII, 248 p., ill., 3000 L.); Bibliogr. naz. ital., 1958, 1, № 1, 15 (итал.)

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

3360. Вклад профессора Лефшеца в алгебраическую геометрию. Ходж (Professor Lefschetz's contributions to algebraic geometry: an appreciation. Hodge W. V. D.), Algebr. Geometry and Topol. Princeton, N. J., Univ. Press, 1957, 3—23 (англ.)

Автор считает наиболее уместным не излагать последовательно результаты С. Лефшеца, а, остановившись на нескольких наиболее важных направлениях, показать современное развитие исследований, предпринятых в свое время этим математиком. Так, после изложения созданного Лефшецем метода изучения топологии алгебраических многообразий отмечается, что его естественные обобщения достигаются в исследованиях, ведущихся в настоящее время Уоллесом, с применением теории косых произведений. Наиболее естественное обобщение на многообразия произвольной размерности результатов Лефшеца и Пикара об интегралах второго рода на алгебраических кривых и поверхностях достигнуто теперь при помощи теории пучков (stacks). Критерий Лефшеца алгебраичности двумерного цикла на алгебраической поверхности был обобщен на многомерный случай Спенсером и Кодаира, связавшими теорию дивизоров с изучением косого произведения, слой которого — мультипликативная группа поля комплексных чисел. Лефшец применил свой критерий, в частности, к изучению алгебраических соответствий между кривыми. Эти результаты также обобщались (в частности, Скоттом). Отмечается выдающаяся роль Лефшеца в построении теории абелевых многообразий. А. М. Васильев

3361. Алгебраические кривые и векторное исчисление. Шотт (Algebraische Kurven und Vektorrechnung. Schott L.), Math. und naturwiss. Unterr., 1958, 11, № 7, 300—303 (нем.)

Рассматривается следующий способ образования плоских кривых. Пусть K_1 и K_2 — две базисные кривые, заданные векторными уравнениями $\bar{r}_1 = \bar{r}_1(\varphi)$ и $\bar{r}_2 = \bar{r}_2(\varphi)$, где φ — полярный угол. Кривая с векторным уравнением

$$\bar{r} = \frac{|\bar{r}_1| - |\bar{r}_2|}{|\bar{r}_2|} \cdot \bar{r}_2$$

называется циссоидой кривых K_1 и K_2. Варьируя базисные кривые, их взаимное расположение и положение полюса O, можно получить ряд алгебраических кривых высшего порядка.

Выбирая в качестве базисных линий окружность и прямую, получим ряд известных кривых (циссоида Диоклеса, строфоида, конхоида).

Улитку Паскаля и кардиоиду можно получить как циссоиду двух окружностей, декартов лист как циссоиду эллипса с полуосями a и $b=\frac{a\sqrt{3}}{3}$ и прямой, отстоящей от вершины эллипса на расстоянии $\frac{a}{2}$. В конце статьи отмечается связь между циссоидами и подерами. Здесь автор ссылается на теорему: Если линия K есть подера кривой E относительно полюса F, то подера E относительно другого полюса O есть циссоида, для которой базисными кривыми являются линия K и окружность, построенная на OF как на диаметре, а полюс находится в точке F. В. А. Тихонов

3362. Группа эллиптических кривых. Шафаревич И. Р., Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 34—35 (русск.); 35 (англ.)

3363. Некоторые замечательные кривые шестого порядка. Боровик В. Н., Изв. Крымск. пед. ин-та, 1957 (1958), **29**, 176—199

Изучаются свойства и дается построение алгебраических кривых 6-го порядка, определяемых в декартовых координатах уравнением

$$(Ax^2+Bxy+Cy^2)\cdot(x^2+y^2)^2+$$
$$+(Dx+Ey)\cdot(x^2+y^2)\,xy+Fx^2y^2=0. \qquad (1)$$

Эти кривые имеют в начале координат 4-кратную точку, касательными в которой служат оси: OX и OY. К числу таких кривых относятся так называемые жукообразные кривые и 4-лепестковая роза. Для изучения свойств кривых (1), их классификации и построения рассматриваются бирациональные преобразования 3-го порядка, определяемые формулами:

$$x'=\frac{x^2+y^2}{\beta y}; \qquad y'=\frac{x^2+y^2}{\alpha x}. \qquad (2)$$

Эти преобразования переводят коническое сечение

$$ax'^2+bx'y'+cy'^2+dx'+ey'+f=0 \qquad (3)$$

в бициркулярную кривую 6-го порядка, уравнение которой, при определенном значении коэффициентов, сводится к уравнению (1).

Устанавливаются соотношения между коэффициентами уравнения (3) и преобразования (2) такие, чтобы коническому сечению (3), называемому базисным, соответствовала данная кривая (1), и чтобы она получалась из него с помощью преобразования (2). Это дает возможность построить кривую (1) и изучить ее свойства.

Основываясь на свойствах преобразования (2), производится классификация кривых вида (1), во многом напоминающая аффинную классификацию кривых второго порядка. В основу классификации положены определители, составленные из коэффициентов уравнения кривой (1):

$$\delta=4AC-B^2;\ \Delta=\begin{vmatrix}A&B&D\\B&C&E\\D&E&F\end{vmatrix}.$$

Доказывается, что эти определители соответственно равны определителям:

$$\delta'=4ac-b^2;\ \Delta'=\begin{vmatrix}a&b&d\\b&c&e\\d&e&f\end{vmatrix},$$

составленным из коэффициентов уравнения базисной кривой (3).

Оказывается, что существуют три типа нераспадающихся кривых 6-го порядка, соответствующие 3 типам невырожденных базисных кривых. В заключение находятся условия, при которых уравнение (1) выражает распадающиеся кривые. В. П. Белоусова

3364. Замечание к теореме Зигеля об алгебраических кривых. Малер (A remark on Siegel's theorem on algebraic curves. Mahler K.), Mathematika, 1955, 2, № 2, 116—127 (англ.)

Пусть дана алгебраическая кривая жанра $\geqslant 1$ $G:f(x,y)=0$, где f — полином с произвольными вещественными или комплексными коэффициентами и пусть z — совокупность пар (x,y), где x и y принадлежат соответственно некоторому конечному модулю над кольцом рациональных целых в поле комплексных чисел и некоторому конечному модулю над полем рациональных чисел в том же поле. Доказывается, что на G лежит не более конечного числа точек из z. Предложение обобщает известную теорему Зигеля, к которой и сводится доказательство. В. В. Морозов

3365. Асимптотические линии поверхности третьего порядка с четырьмя двойными точками. Годо (Asymptotiques de la surface cubique possédant quatre points doubles. Godeaux Lucien), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1958, **44**, № 5, 413—417 (франц.)

Поверхность третьего порядка с четырьмя коническими точками может быть так отображена на плоскость, что плоским сечениям поверхности соответствуют кривые третьего порядка, описанные около полного четырехсторонника Q. Асимптотическим линиям поверхности соответствуют в этом отображении конические сечения, вписанные в Q. Я. П. Бланк

3366. Поверхности с канонической системой, содержащей четыре фиксированные компоненты. Годо (Surfaces dont le système canonique contient quatre composantes fixes. Godeaux Lucien), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1956, **42**, № 7, 764—770 (франц.)

Дается построение алгебраической поверхности, биканоническая система которой неприводима, а каноническая система содержит четыре фиксированные компоненты.

В прежних работах (Bull. Acad. roy. Belgique, 1951, 819—825, 826—835, 938—949, 1106—1119; Rend. Circolo mat. Palermo, 1953, 49—56) автором были построены алгебраические поверхности с канонической системой из фиксированных кривых и переменной части, состоящей из пучка эллиптических кривых, и с неприводимой бикаконической системой; эти поверхности изображали циклические инволюции порядка, равного простому числу с тремя соединенными точками. В данной статье тем же приемом строится поверхность, каноническая и бикаконические системы которой обладают аналогичными свойствами.

Берется поверхность F порядка $3\nu+3$, определяемая уравнением

$$a_1x_1^{3\nu+2}x_2+a_2x_2^{3\nu+2}x_3+a_3x_3^{3\nu+2}x_1+a_4x_4^{3\nu+3}+$$
$$+\sum_{i=1}^{\nu+1}a_{4+1}(x_1x_2x_3)^i x_4^{3(\nu-i+1)}=0,$$

где ν есть такое целое, что $p=3\nu^2+3\nu+1$ — простое число. Эта поверхность не имеет кратных точек и преобразуется в себя гомографией T:

$$T=\begin{pmatrix}x_1&\varepsilon x_2&\varepsilon^{3\nu^2}x_3&\varepsilon^{3\nu^2+2\nu+1}x_4\\x_1&x_2&x_3&x_4\end{pmatrix},$$

где ε — примитивный корень порядка p из единицы.

Эта гомография на F дает инволюцию I порядка p с тремя соединенными точками $O_1(1,0,0,0)$, $O_2(0,1,0,0)$,

$O_3(0, 0, 1, 0)$. Через Ф обозначается нормальная поверхность — образ этой инволюции, на этой поверхности точки O_1', O_2', O_3', гомологичные O_1, O_2, O_3, будут изолированными точками дирамации на Ф, каждая кратности $3\nu+1$; с точки зрения бирационального преобразования они эквивалентны соответственно рациональным кривым γ_1, γ_2, γ_3.

Геометрический жанр поверхности Ф будет $p_g=\nu$, ее бижанр $P_2=2\nu+3$. Определяется переменная часть канонической системы (на Ф она состоит из эллиптических кривых), ее фиксированные компоненты состоят из рациональных кривых γ_1, γ_2, γ_3 и эллиптической кривой K_0', считаемой дважды, которая на F соответствует кривой K_0 пересечения последней поверхности с плоскостью $x_4=0$. Определена и биканоническая система, которая оказывается неприводимой. С. С. Бюшгенс

3367. О точках дирамации кратных поверхностей. Годо (Note sur les points de diramation d'une surface multiple. Godeaux Lucien), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1958, **44**, № 1, 8—16 (франц.)

В своих исследованиях циклической инволюции порядка, равного простому числу p с конечным числом соединенных точек, принадлежащей алгебраической поверхности, автор показал, что в точке дирамации поверхности — образа Ф инволюции сама поверхность имеет кратную точку с касательным конусом, распадающимся на четыре рациональных конуса (σ_α), (τ_α), (τ_β), (σ_β), из которых два последовательных имеют общую образующую.

К рассматриваемой точке бесконечно близки двойные точки последовательности, из которой первая находится на одной из прямых $(\sigma_\alpha, \tau_\alpha)$, $(\tau_\alpha, \tau_\beta)$, $(\tau_\beta, \sigma_\beta)$. В данной статье детально исследуется вопрос, как располагаются двойные точки указанной последовательности, первая точка которой лежит на прямой $(\tau_\alpha, \tau_\beta)$, а также как ведут себя в этой точке линии, принадлежащие одной из линейных систем $|C|$ инволюции.

С. С. Бюшгенс

3368. О некоторых теоремах существования для алгебраических поверхностей (Первая статья). Бюрниат (Quelques théorèmes d'existence à propos des surfaces algébriques. (Première note). Burniat Pol), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1958, **44**, № 1, 43—55 (франц.)

Сначала автор устанавливает некоторые свойства абелевых четырехкратных поверхностей F^0, носящих алгебраическую инволюцию 4-го порядка, в частности четырехкратной плоскости с подобранными кривыми дирамации E_1, E_2, E_3. Показывается в последнем случае, что кривые E_r можно выбрать так, что кривая E будет содержать n тройных точек P, простых для каждой из кривых E_r, и кривую 4-го порядка E_1, можно взять так, что она будет допускать бесконечность вписанных четырехугольников с противоположными вершинами A и B. При этих условиях доказывается: существуют четырехкратные абелевы плоскости $F^0=4F$ с кривыми дирамации

$$E_1=C_4(A^2+B^2+nP),\ E_2=C_{2r+2}(A^{2r+2}+nP),$$
$$E_3=C_{2s+2}(B^{2s+2}+nP),\ r\geqslant s\geqslant 1,\ r>2,$$
$$n=0, 1, 2, \ldots, 4s+\varepsilon,$$

где $\varepsilon=2$ при $r=s$ и $r=4$ при $r>s$; здесь показатели при A и B обозначают кратности этих точек и nP обозначает группу n точек P. Эти правильные поверхности имеют жанры геометрический и линейный $p_g=rs$, $p^{(1)}=8p_g+1-n$; их истинная каноническая система распадается на переменную часть и неподвижную неприводимую кривую рода $w=2r+2s+5-n$ и порядка $q=8-n$.

После этого автор формулирует и обосновывает теорему:

I. Если $w\geqslant 3$ и $n\geqslant 0$ — два целых числа с нечетной суммой, превосходящей 10, то существуют алгебраические поверхности, истинная каноническая система которых состоит из переменной неприводимой части и неподвижной кривой жанра w и порядка $q=8-n$.

II. Для каждого значения геометрического жанра $p_g\geqslant 2$ существуют алгебраические поверхности, для которых истинная каноническая система распадается на неприводимую переменную часть и неприводимую фиксированную кривую жанра w и порядка q, равных соответственно

$$w=2p_g+7-n,\quad q=8-n,\quad n=0, 1, 2, \ldots, 7, 8.$$

К этой теореме автор добавляет, что для значений $p_g=rs$, разложимых в указанное произведение $(r\geqslant s\geqslant 2)$, аналогичные предложения существования справедливы для

$$w=2r+2s+5-n,\quad q=8-n,\quad n=0, 1, \ldots, 4s+\varepsilon,$$

где $\varepsilon=2$ при $r=s$ и $\varepsilon=4$ при $r>s$.

Аналогичным путем доказывается и вторая теорема: существуют абелевы четырехкратные плоскости $F^0=4F$ с кривыми дирамации

$$E_1=C_2(A+B+nP),\ E_2=C_{2r+2}(A^{2r+1}+B+nP),$$
$$E_3=C_{2r+2}(A+B^{2s+1}+nP),\ r\geqslant s\geqslant 1,\ r>2,$$
$$n=0, 1, \ldots, 2s+2.$$

Их истинная каноническая система содержит фиксированную компоненту жанра w и порядка q соответственно $w=r+s+1-n$, $q=2-n$, $n=0, 1, \ldots, 2s+1, 2s+2$; эта компонента приводима только при $r=s$, $n=2s+2$ и тогда она будет совокупностью двух раздельных рациональных кривых, каждая из которых порядка $-s$.

Соответствующие поверхности регулярны и имеют инварианты

$$p_g=rs,\ p^{(1)}=8p_g-4r-4s+3-n;$$

биканоническую систему они имеют простой и неприводимой. С. С. Бюшгенс

3369. О некоторых теоремах существования для алгебраических поверхностей (Вторая статья). Бюрниат (Quelques théorèmes d'existence à propos des surfaces algébriques. (Deuxième note). Burniat Pol), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1958, **44**, № 2, 101—106 (франц.)

Часть I см. реф 3368.

Энрикес (F. Enriques) в своем курсе „Le superficie algebriche" (Bologne, 1945) построил и классифицировал поверхности жанров $p_g=1, 1, 3$ и $p^{(1)}=1, 2, 3$; существование поверхностей жанров $p_g<4$ и $p^{(1)}\geqslant 4$ с неприводимой канонической системой не было доказано. Для получения дальнейших результатов здесь, как и в предыдущей статье, используется удобная техника построения абелевой четырехкратной плоскости $F^0=4F$ с подобранными кривыми дирамации E_1, E_2, E_3, из которых каждая пара не имеет общей части.

Как было указано ранее, появление на E тройной точки P, простой для каждой E_r, уменьшает на единицу $p^{(1)}$ для F^0 и не влияет на каноническую систему.

В статье доказываются следующие теоремы:

I. Существуют регулярные алгебраические поверхности жанров $p_g=1$ и $p^{(1)}=4, 5, \ldots, 9$ с неприводимой канонической системой. Исследуя абелеву четырехкратную плоскость $f^0=4F$ с кривыми дирамации

$$E_1=C_4(A^2+B^2),\ E_2=C_4(A^4),\ E_3=C_4(B^4),$$

автор обнаруживает справедливость теоремы для $p^{(1)}=9$, затем последовательным введением на кривую E, $n=0, 1, \ldots, 5$, трехкратных точек справедливость теоремы устанавливается в общем случае.

II. Существуют алгебраические регулярные поверхности геометрического жанра $p_g=3$ и линейных жанров $p^{(1)}=4, 5, \ldots, 25$ с неприводимой канонической системой.

Здесь берутся четырехкратные плоскости $F^0=4F$ соответственно с тройками кривых дирамации:

$$E_1=C_4(X^4), \quad E_2=C_4(Y^4), \quad E_3=C_4(Z^4), \quad (1)$$
$$E_1=C_4(X^3), \quad E_2=C_4(X+Y^4), \quad E_3=C_4(X+Z^4), \quad (2)$$
$$E_1=C_4(X^3+Z), \quad E_2=C_4(X+Y^4+Z), \quad E_3=C_4(X+Z^3), \quad (3)$$
$$E_1=C_3, \quad E_2=C_3, \quad E_3=C_3, \quad (4)$$

соответствующие поверхности будут иметь $p_g=3$ и $p^{(1)}=25, 20, 15, 10$; показав, что в каждом из четырех указанных случаях на E можно ввести $n=0, 1, 2, 3, 4$ тройных точек, автор обнаруживает справедливость теоремы для всех указанных значений $p^{(1)}$.

III. Существуют алгебраические регулярные поверхности жанров $p_g=2$ и $p^{(1)}=1, 2, \ldots, 12$ с неприводимой канонической системой. Для случаев $p^{(1)}=12$ и $p^{(1)}=9$ строятся соответствующие тройки кривых дирамации и из этих случаев остальные получаются методом введения на E соответственно $n=0, 1, 2$ либо $n=0, 1, \ldots, 5$ тройных точек. С. С. Бюшгенс

3370. О некоторых теоремах существования для алгебраических поверхностей (Третья статья). Бюрниат (Quelques théorèmes d'existence à propos des surfaces algébriques. (Troisième note). Burniat Pol), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1958, **44**, № 3, 230—235 (франц.)

Части I, II см. реф. 3368, 3369.

В статье прежними методами несколько расширяются и уточняются результаты предыдущей работы автора и формулируются в виде двух предложений:

I. Для $p_g=3$ и $p^{(1)}=4, 5, \ldots, 31$ существуют регулярные алгебраические поверхности, для которых биканоническая система простая и неприводимая; для $p^{(1)}=4, 5, \ldots, 25$ каноническая система неприводима.

II. Для $p_g=1$ и $p^{(1)}=4, 5, \ldots, 9, 11, \ldots, 15$ существуют алгебраические регулярные поверхности с простой и неприводимой триканонической системой; для $p^{(1)}=11, 12, \ldots, 15$ биканоническая система простая и неприводимая; для $p^{(1)}=4, 5, \ldots, 9$ каноническая система неприводима. С. С. Бюшгенс

3371. О некоторых теоремах существования для алгебраических поверхностей (Четвертая статья). Бюрниат (Quelques théorèmes d'existence à propos des surfaces algébriques. (Quatrième note). Burniat Pol), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1958, **44**, № 4, 327—331 (франц.)

Части I, II, III см. реф. 3368, 3369, 3370.

Доказывается предложение: существуют алгебраические регулярные поверхности жанров $p_g=2$ и $p^{(1)}=4, 5, \ldots, 17, 19, \ldots, 23$ с простой и неприводимой биканонической системой; для $p^{(1)}=4, 5, \ldots, 12$ эти поверхности имеют неприводимую каноническую систему.

Для случая $p^{(1)}=23$ берется поверхность $F^0=4F$ с кривыми дирамации

$$E_1=C_7(X^7+Y)+Z, \quad E_2=C_3(Y^3+Z)+X,$$
$$E_3=C_3(Z^3+X)+Y;$$

из нее методом введения тройных точек получаются поверхности линейных жанров $p^{(1)}=22, \ldots, 19$.

Для случая $p^{(1)}=17$ берется поверхность $F^0=4F$ с кривыми дирамации

$$E_1=C_6(X^6), \quad E_2=C_4(Y^4), \quad E_3=C_2;$$

из нее обычным приемом получаются поверхности жанров $p^{(1)}=4, 5, \ldots, 16$. Принятый метод построения не позволил достичь случая $p^{(1)}=18$. С. С. Бюшгенс

3372. О поверхностях с нулевыми жанрами, имеющих неприводимые биканонические кривые. Годо (Sur les surfaces de genres nuls possédant des courbes bicanoniques irréductibles. Godeaux Lucien), C. r. Acad. sci., 1959, **248**, № 12, 1764—1765 (франц.)

Показывается, что регулярная алгебраическая поверхность с жанрами $p_a=p_g=0$, $p_2=n$ (=4 или 5) и с неприводимой биканонической системой содержит такую изолированную кривую Γ жанра n и степени $n-1$, что 2Γ — биканоническая кривая. В. В. Морозов

3373. О неподвижных точках аналитических преобразований. Сегре (Sui punti fissi delle trasformazioni analitiche. Segre Beniamino), Atti Accad. naz. Lincei Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1956, **20**, № 1, 3—7 (итал.)

Строится пример арифметически-общего преобразования, которое формально линеаризуемо, но не существенно реализуемо (РЖМат, 1957, 6609, 6610). В. В. Морозов

3374. Кремонова классификация двух классов рациональных, циклических кратных плоскостей. Гутвирт (Classification crémonienne de deux classes de plans multiples cycliques rationnels. Gutwirth A. Technion. Publ. Israel Inst. Techn. Sci., 1954—1955. 6, 38—57) (франц.; рез. иврит.)

Показывается приложением ряда квадратичных преобразований к соответствующим n-кратным плоскостям, что каждая плоская инволюция, порожденная циклическим преобразованием Жонкьера порядка n, является кремоновым преобразованием ее, порожденным циклической гомологией $x'=\varepsilon x$, $y'=y$, $z'=z$ ($\varepsilon^n=1$).

Далее показывается, что плоские циклические инволюции порядка 6 даны только пятью общими типами, поскольку другие 6 типов, данные Батари (Bottari, Ann. mat. pura ed appl., 1899, (3) **2**, 277—296; Giorn. mat. Battaglini, (2), 1903, **10** (41)), являются кремоновыми преобразованиями специального вида. P. Duval

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 10, 1132.

3375. О кремоновых преобразованиях, принадлежащих невырожденной корреляции. Джеминьяни (Sulle trasformazioni cremoniane che appartengono ad una reciprocità non degenere. Gemignani Giuseppe), Ann. Scuola norm. super. Pisa. Sci. fis. e mat., 1958, **12**, № 4, 479—488 (итал.)

Рассматривается кремоново преобразование $T: S_r \to S_r'$ пространства S_r в S_r' и корреляция B, относящая каждой точке P из S_r плоскость A' из S_r'. Если из $TP=P'$, $BP=A'$ следует инцидентность P' и A', то говорят, что кремоново преобразование T принадлежит корреляции B. Показывается, что кремоновы преобразования между двумя пространствами размерности r, принадлежащие невырожденной корреляции (условие невырожденности существенно), порождаются r линейно независимыми корреляциями и представляются на многообразии Сегре этих двух пространств пересечением с линейным пространством $S_{r(r+1)}$. В. В. Морозов

3376. Классификация кремоновых преобразований T_3 и алгебраические конгруэнции прямых. Котий О. А., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, № 6, 156—160

Осуществление кремонова преобразования T_3 на проективной плоскости производится посредством пространственной конструкции. Рассматривается конгруэнция прямых (1, 2) первого порядка второго класса, получаемая

как совокупность всех прямых, пересекающих неособенную кривую 2-го порядка c_2 и прямую l, пересекающую c_2, но не лежащую с ней в одной плоскости (исключаются прямые связки с центром $c_2 \times l$). Конгруэнция эта устанавливает кремоново соответствие T_3 между двумя различными плоскостями π_1 и π_2, если считать соответствующими точки, принадлежащие одной прямой конгруэнции: соответствие однозначное и порядок его, при условии, что пересечение $r = \pi_1 \times \pi_2$ не принадлежит конгруэнции, равен 3 — в полученном соответствии одна двойная и четыре обыкновенных фундаментальных точки (образами которых являются не точки, а линии порядка, равного кратности фундаментальной точки); двойной фундаментальной точкой является точка пересечения плоскости π_1 с прямой l, обыкновенные фундаментальные точки — точки пересечения c_2 с π_1 и точки пересечения r прямыми конгруэнции, проходящими через точки пересечения c_2 и π_2. В зависимости от инцидентности фундаментальных точек получается 12 различных типов преобразований T_3. Все они возникают при различных расположениях плоскостей π_1 и π_2 относительно направляющих линий c_2 и l конгруэнции (1, 2). А. Г. Школьник

3377. Характеристическое свойство многообразий Сегре, образованных произведением двух линейных пространств. Галларати (Una proprietà caratteristica della varietà di C. Segre prodotto di due spazi lineari. Gallarati Dionisio), Rend. mat. e applic., 1958, 17, № 3-4, 439—452 (итал.)

Многообразия Сегре $V_{p+q} = S_p \times S_q$ $(p \geqslant 2)$ характеризуются тем, что среди всех многообразий V_{p+q} класса C^2, принадлежащих пространству S_{pq+p+q}, не конических, только они обладают всеми касательными подпространствами S_{p+q}, которые, не пересекая одного и того же пространства S_{pq+q-1} по подпространству S_p, опираются на $(p+1)$-мерное семейство независимых подпространств S_q. С. П. Фиников

3378. Коммутативные групповые многообразия. Розенликт (Commutative algebraic proup varieties. Rosenlicht Maxwell), Algebr. Geometry and Topol. Princeton, N. J., Univ. Press, 1957, 151—156 (англ.)

Групповым многообразием (г. м.) (group variety) называется алгебраическое многообразие V, для которого задано рациональное отображение $V \times V \to V$, являющееся, как умножение точек, ассоциативным, причем существует собственное подмногообразие W (многообразие вырождения) такое, что множество $V \setminus W$ является уже, в смысле определенного умножения, настоящей группой. Наиболее изученными среди г. м. являются абелевы многообразия и линейные группы, т. е. г. м., бирегулярно эквивалентные алгебраическим группам матриц.

В работе г. м. изучаются безо всяких ограничений на основное поле. Первая половина посвящена перенесению на г. м. основных теорем теории групп, включая аналог теоремы Жордана-Гёльдера о нормальных рядах. Через G_a и G_m обозначены аддитивная и мультипликативная группы основного поля. Г. м. называется разрешимым, если существует нормальный ряд, доходящий до единицы и такой, что все последовательные фактор-г. м. есть G_a или G_m. Доказано, что всякое разрешимое г. м. линейно.

Вторая половина посвящена следующей теореме о коммутативных г. м.: они всегда содержат неприводимую линейную подгруппу H такую, что G/H является абелевым многообразием. Для коммутативных линейных групп получен следующий результат: их можно единственным образом представить в виде прямого произведения $G_1 \times G_2$, причем G_1 есть прямое произведение нескольких G_m, а G_2 есть аффинная группа, т. е. бирегулярно изоморфна аффинному пространству. Если характеристика основного поля не равна нулю, G_2 не обязана быть прямым произведением групп G_a.

А. М. Васильев

3379. t-мерные аналитические, алгебраические и унирациональные слои гиперкомплексного S_r. Спампинато (Le falde t-dimensionali analitiche, algebriche ed unirazionali di un S_r supercomplesso. Spampinato Nicolo. Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli, 1953(1954), (4) 20, 147—152 (итал.)

3380. Циклы и эндоморфизмы абелевых многообразий. Морикава (Cycles and endomorphisms of abelian varieties. Morikawa Hisasi), Nagoya Math. J., 1954, 7, June, 95—102 (англ.)

Пусть A — абелево многообразие и X и Y — два цикла дополнительной размерности на нем, для которых определено пересечение $[X \circ Y]$, состоящее из точек $x_1, \ldots, x_f$ с кратностями $e_1, \ldots, e_f$. Положим

$$S[X \circ Y] = e_1 x_1 + \ldots + e_f x_f.$$

Для любой точки t из A Y_t обозначает цикл Y, сдвинутый на t. Функция от t $S[X \circ (Y_t - Y)]$ отображает при фиксированных X и YA в A и является эндоморфизмом A. Автор обозначает ее через $\delta(X, Y)$ и доказывает ряд свойств, которые проверяются без труда.

Например: $\delta(X, Y) = \delta(X', Y)$ и $\delta(X \circ Y, Z) = \delta(X' \circ Y, Z)$, если X и X' алгебраически эквивалентны.

Или: $\delta(X, Y) + \delta(Y, X) = (e_1 + \ldots + e_f)\,\varepsilon$, где ε — единичный эндоморфизм.

Если Γ — проективная кривая, J — ее якобиево многообразие и φ — каноническая функция, то $W^{(r)}$ обозначает множество точек $\varphi(P_1) + \ldots + \varphi(P_r)$, $P_t \in \Gamma$, а $W'^{(r)}$ — множество точек $-\varphi(P_1) - \ldots - \varphi(P_r)$. Доказываются формулы

$$\delta(W^{(n-r)}, W'^{(r)}) = \delta(W^{(n-r)}, W^{(r)}) = \binom{n-r}{r} \varepsilon.$$

Как известно, в кольце эндоморфизмов A определена инволюция. Доказывается, что эндоморфизм $\delta(W^{(n-r)}, X)$ относительно ее симметричен (r — размерность X). Наоборот, существует такое целое число c, что любой симметричный эндоморфизм α представим в виде $c^{-1}\delta(W^{(n-r)}, X)$ при некотором цикле X размерности r.

И. Р. Шафаревич

3381. Рациональные точки абелевых многообразий над функциональными полями. Ланг, Нерон (Rational points of abelian varieties over function fields. Lang S., Neron A.), Amer. J. Math., 1959, 81, № 1, 95—118 (англ.)

Дается доказательство теоремы о базисе, упрощенное в сравнении с данным Нероном (Bull. Soc. math. France, 1952, 80, 101—166): Если V — проективное многообразие над алгебраически замкнутым полем k и несингулярное в коразмерности 1, $D(V)$ — группа дивизоров на V, рациональных над k и $D_a(V)$ — группа дивизоров на V, алгебраически эквивалентных нулю и рациональных над k, то $D(V)/D_a(V)$ конечно порождена. Доказательство приводится к теореме:

Если K — конечно порожденное регулярное расширение поля k, A — абелево многообразие над K и (B, τ) — его K/k — след в смысле Чжоу, A_K — группа рациональных над K точек A и B_k — группа рациональных над k точек B, то $A_K/\tau B_k$ конечно порождена. Доказательству последней теоремы и посвящена статья.

В. В. Морозов

3382. Теорема связности для бирационального преобразования в простой точке. Мюрре (On a connectedness theorem for a birational transformation at a simple point. Murre J. P.), Amer. J. Math., 1958, 80, № 1, 3—15 (англ.)

Алгебраическое многообразие (вообще говоря, приводимое) называется линейно связным, если для любых его точек P и Q на нем найдется такая последовательность точек $P, P_1, \ldots, P_k = Q$, каждые две соседние из ко-

торых могут быть соединены рациональной кривой, лежащей на рассматриваемом многообразии. Доказываются следующие теоремы:

1. Пусть W (неприводимое) подмногообразие произведения $S^n \times P^m$ n-мерного аффинного и m-мерного проективного пространств. Если проекция W на S^n заполняет все это пространство и степень покрытия $[W:S^n]=1$, то многообразие $W(Q)$ точек W, лежащих над любой точкой Q из S^n, линейно связно.

2. Пусть при тех же обозначениях $\dim W = n$, k — поле задания W, $Q \times R$ — общая точка W над k и $(R^{(1)}, \ldots, R^{(g)})$ — полная система сопряженных для R над $k(Q)$. Если Q' — любая точка S^n и B — максимальная связная часть многообразия $W(Q')$, то для всех специализаций $(R'^{(1)}, \ldots, R'^{(g)})$ системы $(R^{(1)}, \ldots, R^{(g)})$ над $Q \to Q'$ (относительно k) в B будет содержаться одно и то же число точек $R'^{(a)}$. В частности, если это число равно 1, то многообразие B линейно связно.

Теорема 2 обобщается затем на случай, когда вместо S^n и P^m рассматриваются произвольные (неприводимые) многообразия. Ввиду того, что из линейной связности следует связность, прямым следствием полученного обобщения теоремы 2 является известный результат Зарисского о связности полного образа простой точки при бирациональном преобразовании (РЖМат, 1958, 7097)

А. И. Узков.

3383. О теореме Римана — Роха для алгебраических многообразий. III. Маркьонна (Sul teorema di Riemann — Roch relativo alle varietà algebriche. Nota III. Marchionna Ermanno), Atti Acad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1958, **24**, № 6, 672—679 (итал.)

Продолжая исследования статей: РЖМат, 1959, 3146 и 9425, автор выводит ряд соотношений между иррегулярностями q_l алгебраического многообразия V_d размерности d и с канонической системой K и дефектами def и избытками s некоторых линейных систем на нем. Все рассматриваемые многообразия считаются неприводимыми и без кратных точек, линейные системы — виртуально не имеющими кратных точек. Приведем некоторые результаты.

Если D — гиперповерхность в V_d, то

$$\mathrm{def}\,|K+D|\cdot D \leqslant q_d + q_{d+1}$$

(соотношение, известное ранее лишь для частных случаев). Далее

$$s\,|K+D| \geqslant q_{d-1}(D) - q_{d-1}.$$

Если $|E|$ — обильная система на V_d, то

$$s\,|E| = \sum_1^{d-1} (-1)^{d+i+1}\,\mathrm{def}\,|K+(2i-1)E|\,(2E)^i.$$

Если V_d — полное пересечение $r-d$ гиперповерхностей объемлющего пространства S_r и $d \geqslant 2$, то V_d вполне регулярно, т. е. $q_i = 0$ $(i = 2, \ldots, d)$.

В. В. Морозов

3384. Теорема о локально нормальных многообразиях. Лёйнг (Ein Satz Über lokal normale Varietäten. Leung K. T.), Math. Ann., 1958, **134**, № 3, 232—236 (нем.)

Доказывается следующее обобщение одного из результатов Ван-дер Вардена: Если рациональная функция $\varphi = f(x)/g(x)$, заданная на неприводимом многообразии V_d (x — общая точка для V) финитна в локально нормальной точке $A \in V$, то ее можно представить в виде частного двух полиномов, причем со знаменателем, не исчезающим в A (у Ван-дер-Вардена A предполагалось простой точкой). Порядком рациональной функции φ на неприводимом $(d-1)$-мерном подмногообразии $U \subset V$ называется разность кратностей U, как части пересечения V с $f=0$ и как части пересечения V с $g=0$; если этот порядок отрицателен, то U называется полярным многообразием для φ. Финитность φ в A означает, что ни одно полярное многообразие для φ не содержит A.

В. В. Морозов

3385. О дзета-функциях и L-рядах алгебраических многообразий. 2. Исида (On zeta-functions and L-series of algebraic varieties. II. Ishida Macoto), Proc. Japan. Acad., 1958, **34** № 7, 395—399 (англ.)

В дополнение к работе: РЖМат, 1959, 800 доказываются некоторые результаты о числе нулей и полюсов функций $Z(u, V)$ и $L(u, \chi, A/V)$ внутри определенных кругов. Вносится исправление: в формуле 5-й строки цитированного реферата вместо $q^{re(x)/2}$ нужно писать $W(\chi)$, где $|W(\chi)| = q^{re(\chi)/2}$, $W(\overline{\chi}) \cong \overline{W(\chi)}$.

В. В. Морозов

3386. Новые соотношения между арифметическим жанром общей гиперповерхности A в алгебраическом многообразии и арифметическими жанрами характеристических многообразий для A. Севери (Nuove relazioni fra il genere aritmetico d'una ipersuperficie generale A tracciata sopra una varietà algebrica e i generi aritmetici delle varietà caratteristiche di A. Severi Francesco), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis. mat. e natur., 1959, **26**, № 1, 3—5 (итал.)

Пусть M — неприводимое несингулярное алгебраическое многообразие над полем комплексных чисел, r — его размерность, A — топологически общая гиперповерхность на нем, $|B|$ — присоединенная система для $|A|$ и $B^2, \ldots, B^r$ — характеристические многообразия системы $|B|$. Доказывается, что в этом случае

$$\dim |B| = g_a(A) + g_a(M) - 1,$$

$$(1+(-1)^{r-1})\,g_a(M) + g_a(A) - r - 1 =$$

$$= \sum_1^r (-1)^{r-k} g_a(B^k),$$

где g_a — арифметический жанр. В заключение автор излагает путь, который мог бы, по его мнению, привести к алгебраическому доказательству соотношений Севери—Кодаиры (Severi, Geometria dei sistemi algebrici. III. Roma, ed. Cremonese, 1959, стр. 274).

В. В. Морозов

3387 К. Спектральные последовательности и некоторые приложения к алгебраической геометрии. Герарделли (Successioni spettrali e alcune loro applicazioni alla geometria algebrica. Gherardelli Francesco. Pisa, Libr. goliardica, 1958, 68 p., Litogr.), Bibliogr. naz. ital., 1958, **1**, № 6, 221 (итал.)

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

3388. О фокальных кривых Ван Риса. До (Sur la focale de van Rees. Deauz R.), Mathesis, 1958, **67**, № 7-8, 209—213 (франц.)

В любом плоском четырехугольнике шесть вершин, несобственная точка медианы, точка Микеля, основания трех высот диагонального треугольника и циклические точки — тринадцать точек кубической кривой Г, геометрического места фокусов кривых второго порядка, вписанных в четырехугольник. В заметке показано, что другие 24 точки, которые геометрически просто определяются, лежат на кривой Г. Заметка заканчивается несколькими замечаниями об инволюции Мёбиуса. Шесть сторон плоского четырехугольника определяют три четырехсторонника. Три инволюции касательных, проведенных из произвольной точки к кривым второго порядка, вписанных в эти четырехсторонники, попарно гармоничны. Показано, что каждый из ортоптических центров любого из трех четырехсторонников является фокусом двух

кривых второго порядка, вписанных соответственно в два других четырехсторонника. На кривой третьего порядка Γ (кривой Вэн Реса) — геометрического места фокусов кривых второго порядка, вписанных в четырехугольник Q, лежат оптоптические центры O_i и $O_{i'}$ шести четырехсторонников Q_i, имеющих сторонами — две стороны Q и две диагонали Q, не содержащие общей точки выбранных сторон. Четырехугольник Q имеет пять общих вершин с каждым из четырехугольников Q_i, шестая совпадает с точкой пересечения двух диагоналей Q_i. Прямая, параллельная прямой Ньютона m четырехугольника Q, проведенная через шестую вершину, пересекает прямую $O_iO_{i'}$ в точке, лежащей на кривой Γ, что дает шесть ее новых точек. Из теоремы Зибека получается, что пары действительных фокусов конических сечений, вписанных в действительный четырехугольник, имеющий не более одной несобственной точки, принадлежат инволюции Мёбиуса. Из этой теоремы получаются некоторые свойства инволюции Мёбиуса. С. И. Зетель

3389. Вторые производные на элементе поверхности уровня. Мак (Second derivatives on level surface elements. Mack Sidney F.), Amer. Math. Monthly, 1958, 65, № 10, 758—760 (англ.)

Если $F(x, y, z)$ принадлежит классу C_2 и линии $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ ортогональны на поверхности уровня $F(x, y, z) = \text{const}$ в рассматриваемой точке, то

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -K_x \frac{\partial F}{\partial n}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = T_x \frac{\partial F}{\partial n},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial n^2} = 2K \frac{\partial F}{\partial n} + \nabla^2 F,$$

где K_x и T_x — нормальная кривизна и геодезическое кручение линии $y = \text{const}$, $\frac{\partial F}{\partial n}$ — производная по нормали поверхности уровня, K — средняя кривизна, $\nabla^2 F$ — лапласиан функции F. Полное доказательство автор приводит только для первой формулы.

В. И. Шуликовский

3390. Некоторые метрические свойства поверхностей E Картана. Маркус (Proprietăţi metrice ale suprafeţelor E ale lui Cartan. Marcus F.), Bul. Inst. politehn. Iaşi, 1956, 2, № 3-4, 27—33 (рум.; рез. русск., франц.)

Изучаются некоторые метрические свойства поверхностей E Картана. Такие поверхности характеризуются тем, что на них сеть линий кривизны является сетью E, т. е. точечные инварианты h, k и тангенциальные инварианты $\bar{h}, \bar{k}$ Дарбу удовлетворяют соотношению $h = \bar{h}$, $k = \bar{k}$. Для этих поверхностей автор выводит некоторые дифференциальные соотношения на коэффициенты квадратичных форм. Налагая на них дополнительные соотношения и интегрируя полученную после этого систему уравнений, автор получает и исследует несколько классов таких поверхностей. В. И. Коровин

3391. О поверхностях S. Добреску (Asupra suprafeţelor S. Dobrescu L.), Lucrările inst. petrol. şi gaze Bucureşti, 1957, 2, № 2, 213—216 (рум.; рез. русск., англ.)

Поверхности S (Цицейки) определяются тем, что их полная кривизна пропорциональна расстоянию от фиксированной точки до касательной плоскости. Координаты x_1, x_2, x_3 некоторой точки M, принадлежащей поверхности S, суть линейно независимые интегралы системы

$$x_{uu} = ax_u + bx_v, \quad x_{uv} = hx, \quad x_{vv} = ax_u + bx_v. \qquad (1)$$

При помощи (1) автор устанавливает, что поверхность S тогда и только тогда допускает в качестве производной сети поверхность S, когда h — функция линейной комбинации с постоянными коэффициентами u и v.

D. Papuc

3392. Геометрические значения некоторых инвариантов конгруэнций. Карапетян С. Е., Научн. докл. высш. школы. Физ.-матем. н., 1958, № 1, 48—52

Автор останавливает свое внимание на выяснении геометрического смысла некоторых инвариантов конгруэнции (A_1A_2) в проективном пространстве P_3, связанных с дифференциальной окрестностью 3-го и 4-го порядков.

С конгруэнцией $(A_1A_2) = (r)$ связывается другая (r'), являющаяся пересечением соприкасающихся плоскостей одного фокального семейства на поверхности (A_1) и другого — на поверхности (A_2). Если потребовать, чтобы конгруэнции (r) и (r') образовывали пару T или пару θ, то это наложит определенные соотношения на инварианты окрестности 3-го и 4-го порядка. Далее, строится квадрика Ли для определенных линейчатых поверхностей конгруэнции (r). Если потребовать, чтобы она прошла и через луч (r'), то опять получаются некоторые соотношения на инвариантной окрестности 3-го и 4-го порядка. Автор рассматривает различные возможные здесь случаи. В. И. Коровин

3393. Расслояемые пары из $\mathfrak{M}_3$ прямых и $\mathfrak{N}$ плоскостей в P_4. Дуничев К. И., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, № 1, 43—55

Вопрос о расслоении конгруэнций прямых в трехмерном пространстве с помощью кривых линий рассматривался в работах С. П. Фиников. Автор делает обобщение этой идеи на четырехмерное проективное пространство P_4, причем многообразия $\mathfrak{M}_3$ и $\mathfrak{N}_3$ разных размерностей. Трехпараметрическое семейство прямых $\mathfrak{M}_3$ односторонне расслаивает трехпараметрическое семейство двумерных плоскостей $\mathfrak{N}_3$, если к каждой прямой m многообразия $\mathfrak{M}_3$ можно присоединять ∞^1 линий, лежащих в одной линейчатой поверхности многообразия $\mathfrak{M}_3$ так, что трехмерные соприкасающиеся плоскости к этим линиям в точках одной прямой проходят через соответствующую плоскость многообразия $\mathfrak{N}_3$. Аналогично дается определение расслоения в другом направлении. В работе доказывается теорема существования таких двустороннe расслояемых пар многообразий в случаях соответствия и несоответствия поверхностей, несущих расслояющие линии, а также выясняются свойства таких многообразий. В. И. Коровин

3394. Расслоение конгруэнций окружностей и сфер. Гейдельман Р. М., Матем. сб., 1957, 43, № 3, 295—322

Рассматривается проблема расслоения многообразий в конформном пространстве.

В главе I изучается расслоение конгруэнций окружностей в трехмерном конформном пространстве. Если к конгруэнции окружностей (C_1) можно присоединить ∞^1 двупараметрических семейств сфер $S_1 + kS_0$ так, чтобы окружность C_2 проходила через характеристические точки всех сфер $S_1 + kS_0$, то конгруэнция окружностей, расслаивающая другую конгруэнцию окружностей, будет конгруэнцией K (т. е. обладающей двумя семействами каналовых поверхностей). Произвольная конгруэнция окружностей K может быть расслояющей. Далее рассматриваются различные частные случаи одностороннего расслоения, а в § 6 доказывается существование двустороннего расслоения пар конгруэнций окружностей.

В главе II автор обобщает этот вопрос на многомерные конформные пространства M_n. В этом пространстве аналогично изучается расслоение пар k-параметрических семейств конгруэнций сфер (C_1) и (C_2).

В. И. Коровин

3395. О неголономных поверхностях. Добреску (Asupra suprafețelor neolonome. Dobrescu A.), Lucrările consfăt geom. diferenț. 1955. Timișoara Acad. RPR., 1956, 169—188 (рум.; рез. русск., франц.)

Изложение некоторых результатов из геометрии неголономных поверхностей 3-мерного евклидова пространства (Фосс (A. Voss) Аббат Иссали (Issaly), Лилиенталь (R. Lilienthal), Д. Синцов, Инзингер (R. Inzinger), Георгиев (Ch. Gheorghiev), Врэнчану (Gh. Vrănceanu), Мирон (R. Miron)), полученных при помощи конгруэнций.

Приведены некоторые новые обобщения формул Родрига и проблемы Кодаци для таких поверхностей.

R. Miron

3396. О точечных соответствиях между неголономными многообразиями трехмерного пространства. Крянгэ (Asupra corespondențelor punctuale între varietățile neholonome din spațiul cu trei dimensiuni. Creangă I.), An. științ. Univ. Iași., 1956, Sec. 1, **2**, № 1-2, 145—150 (рум.; рез. русск., франц.)

Двухпараметрическое семейство кривых на поверхности трехмерного пространства такое, что кривые, проходящие через произвольную точку поверхности, имеют соприкасающиеся плоскости, принадлежащие одному пучку, называется аксиальным семейством кривых. Бомпьяни (Bompiani E., Boll. Unione mat. ital., 1924, 3) показал, что при точечном соответствии между двумя поверхностями, не сохраняющем ни одного из семейств асимптотических линий, на поверхностях существуют соответствующие друг другу аксиальные системы. В реферируемой работе доказывается, что этот результат сохраняет силу и для неголономных поверхностей трехмерного пространства.

В. В. Рыжков

3397. Проективная наложимость поверхностей второго рода многообразия V_4 Сегре. Вилла (Applicabilità proiettiva fra superficie di 2^a specie della V_4 di Segre. Villa Mario), Boll. Unione mat. ital., 1956, **11**, № 4, 493—495 (итал.)

Точечное соответствие между двумя плоскостями определяет двумерную поверхность в многообразии Сегре $V_4 = S_8$. Такие поверхности классифицируются по своим квазиасимптотическим (образы характеристических кривых соответствия). Поверхность относится к роду один, если все три семейства квазиасимптотических различны, к роду два, если два из них совпадают, и к роду три, если совпадают все три. Рассматривалась проективная наложимость поверхностей рода один. В настоящей заметке даются определения, относящиеся к проективной наложимости поверхностей рода два. Соответствие между двумя такими поверхностями называется квазиасимптотическим, если оно сохраняет квазиасимптотические с их кратностью. Пусть теперь поверхность $\Sigma = V_4 = S_8$, $\Sigma^* = V_4^* = S_8^*$. Существует ∞ проективных преобразований S_8 на S_8^*, переводящих V_4 в V_4^*. Соответствие Γ двух поверхностей Σ и Σ^* рода два называется проективной наложимостью, если оно квазиасимптотическое и для пары произвольных соответствующих точек существует проективное преобразование, касательное к Γ, для которого квазиасимптотические направления будут характеристическими. Наложение называется сильным, если двойное квазиасимптотическое направление является гиперхарактеристическим, и обратным (inverse), если гиперхарактеристическим будет простое квазиасимптотическое направление. Автор указывает, что те же понятия рассмотрены Сперанца (РЖМат, 1959, 812) без обращения к интерпретации на многообразиях Сегре. См. также РЖМат, 1959, 1949, 1950.

В. В. Рыжков

3398. Дифференциальная геометрия частичной группы проективных преобразований. Калленберг (Differential geometry of a particular group of projective transformations. Kallenberg G. W. M.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wet., 1957, **A60**, № 2, 147—158; Indagationes math., 1957, **19**, № 2, 147—158 (англ.)

Изучается дифференциальная геометрия, определяемая шестипараметрической группой проективных преобразований:

$$G\cdot\begin{cases} x_1 = x_1 + ax_2 + bx_3 + cx_4, \\ x_2 = \quad\; x_2 + dx_3 + ex_4, \\ x_3 = \quad\quad\; x_3 + fx_4, \\ x_4 = \quad\quad\quad\; x_4, \end{cases}$$

в трехмерном пространстве, где x_i — однородные координаты точки. Плоскость $x_4 = 0$ считается абсолютом этой геометрии. Параллелизм векторов определяется движениями группы G для точек, не лежащих на абсолюте, вводятся неоднородные координаты, считая для них $x^4 = 1$. Для этих точек вводится метрика: расстоянием между точками $P(x_1, x_2, x_3)$ и $Q(y_1, y_2, y_3)$ называется число $\rho_1 = y_3 - x_3$. Если $y_3 = x_3$, то в качестве расстояния 2-го порядка берется разность $\rho_2 = y_2 - x_2$, а если $y_2 = x_2$, то расстоянием 3-го порядка считается $\rho_3 = y_1 - x_1$. Угол между векторами (l_1, l_2, l_3) и (m_1, m_2, m_3) определяется формулой $\varphi_1 = m_2/m_3 - l_2/l_3$. Если $\varphi_1 = 0$, то вводится угол 2-го порядка $\varphi_2 = m_1/m_3 - l_1/l_3$, а затем и 3-го порядка $\varphi_3 = \dfrac{m_1}{m_2} - \dfrac{l_1}{l_2}$. Если касательная к данной линии l нигде не параллельна плоскости $x^3 = 0$, то координата x^3 является длиной дуги s вдоль l, отсчитываемой от плоскости $x^3 = 0$. Вводятся кривизна и кручение вдоль l:

$$\varkappa(s) = \frac{d^2x_2}{ds^2}, \quad \tau(s) = \frac{d}{ds}\left\{\frac{d^2x_1}{ds^2} \Big/ \frac{d^2x_2}{ds^2}\right\}.$$

Трехгранник Френе образуется векторами: $v_1(1, 0, 0)$ — нормальный вектор к l, $v_2(x_1''/x_2'', 1, 0)$ — вектор, идущий по направлению пересечения соприкасающейся плоскости с плоскостью $x^3 = \text{const}$ $(x_1', x_2', 1)$ — касательный вектор. Формулы Френе имеют вид:

$$v_1' = 0, \quad v_2' = \tau v_1, \quad v_3' = \varkappa v_2.$$

Кроме того, изучаются кривые постоянной кривизны. В третьей части рассматривается дифференциальная геометрия поверхности в данном пространстве. Получаются, в частности, формулы Менье, определяются асимптотические линии на поверхности, вводятся понятия эллипса, гиперболы и параболы на поверхности.

Г. И. Кручкович

ГЕОМЕТРИЯ *n*-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

3399. Задача о нахождении полной кривизны гиперквадрики. Катков Г. Ф. Сб. научн. тр. Куйбышевск. индустр. ин-та, 1957, вып. 7. (а), 61—63

Путем обобщения известной формулы для кривизны кривой второго порядка, заданной общим уравнением в прямоугольных декартовых координатах, отыскивается выражение полной кривизны гиперквадрики в евклидовом n-мерном пространстве.

М. В. Потоцкий

3400. Обзор основных понятий геометрии пространств, обладающих кривизной. Гавличек (Přehled základních pojmů z geometrie zakřivených prostorů. Havlíček Karel), Pokroky mat., fys. a astron., 1958, **3**, № 6, 639—659 (чешск.)

Краткое изложение начальных сведений из тензорной дифференциальной геометрии.

В. Н. Скрыдлов

3401. О геодезических линиях в пространстве Фридмана—Лобачевского. Фихтенгольц И. Г. Ж. эксперим. и теор. физ., 1959, 36, № 4, 1312—1313

Показывается, что для риманова пространства с основной метрической формой

$$ds^2 = H^2(dx_1^2 - dx_1^2 - dx_3^2 - dx_4^2),$$

где $H = H(s)$, $s = \sqrt{x_1^2 - r^2}$, $r^2 = x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$, кривые $x_i = c_i x_1$ $(i = 2, 3, 4)$, c_i — постоянные, являются геодезическими. Н. С. Синюков

3402. О пространствах постоянной кривизны. Насу (On spaces with constant curvature. Nasu Yasuo), Tensor, 1956, 5, № 3, 164—186 (англ.)

Работа посвящена теории введенных и изученных Буземаном G-пространств (РЖМат, 1957, 6668). Согласно Буземану G-пространство является пространством постоянной кривизны, если у каждой его точки найдется окрестность такая, что у любой пары точек a и a', принадлежащих этой окрестности биссектор (множество точек x таких, что $xa = xa'$) линеен (множество точек называется линейным, если вместе с любыми двумя точками оно содержит сегмент, имеющий эти точки своими концами). Автор строит определенным образом последовательности экстремалей с общим началом P (в универсальном накрывающем G-пространстве данного G-пространства), сходящиеся к данной экстремали и приходит к альтернативе: либо близкие экстремали не имеют общих точек, кроме начала P, либо среди них существуют пересекающиеся. Подробно анализируя каждую из возможностей, автор приходит к разделению всех G-пространств постоянной кривизны на два класса. Универсальное накрывающее пространство одного класса имеет замкнутые экстремали, для которых существует параметрическое представление, удовлетворяющее условию $x(\tau_1)\,x(\tau_2) = \min\{|\tau_2 - \tau_1| + 2mk,\ m = 0, \pm 1, \pm 1, \ldots,\}$, т. е. его экстремали суть „окружности". Для второго класса экстремали универсального накрывающего пространства суть прямые линии (т. е при соответствующей параметризации экстремали всегда $x(\tau_1)\,x(\tau_2) = |\tau_2 - \tau_1|$). В универсальных накрывающих пространствах (т. е. в случае односвязности) биссекторное свойство имеет силу не только локально, но и в целом.

Случай двумерного пространства выпадает из общей схемы рассуждений и рассматривается особо.

В. В. Рыжков

3403. Геодезические линии и гармонические функции на симметрических пространствах. Карпелевич Ф. И., Докл. АН СССР, 1959, **124**, № 6, 1199—1202

Пусть G — полупростая группа Ли, K—ее максимальная компактная подгруппа и $\mathfrak{M}$ —однородное пространство G/K, являющееся симметрическим римановым пространством неположительной кривизны. Для двух геодезических γ_0 и γ этого пространства определяется расстояние $\rho(\gamma_0, \gamma) = \lim_{x \to \infty (x \in \gamma_0)} \rho(x, \gamma) = \rho(\gamma, \gamma_0)$, где $\rho(x, \gamma)$—длина однозначно определяемого перпендикуляра, опущенного из точки x на геодезическую γ.

Совокупность геодезических γ таких, что $\rho(\gamma, \gamma_0) = 0$ называется нуль-пучком, содержащим γ_0.

На пространстве $\mathfrak{P}$ всех нуль-пучков Γ группа действует с сохранением расстояния $\rho(\Gamma_1, \Gamma_2) = \rho(\gamma_1, \gamma_2)$, $\gamma_1 \in \Gamma_1$, $\gamma_2 \in \Gamma_2$. Для любого нуль-пучка Γ_0 пространства $\mathfrak{P}(\Gamma_0)$ (совокупность всех пучков Γ таких, что $\rho(\Gamma, \Gamma_0) < \infty$) является симметрическим римановым пространством.

Для пространства $\mathfrak{M}$ вводится ряд понятий и указывается ряд интересных свойств. В частности, определена гармоническая на этом пространстве функция $f(x)$ и ее значение $f(\Gamma)$ на любом нуль-пучке. Отмечены некоторые свойства гармонических функций.

В. И. Шуликовский

3404. Метод предельного перехода в теории римановых пространств. Феденко (Метад граніснага пераходу ў тэорыі рыманавых прастораў. Фядзенка А. С.), Весці АН БССР. Сер. фіз.-тэхн. н., Изв. АН БССР. Сер. физ.-техн. н., 1958, № 2, 17—25 (белорусск.)

Рассматриваемая статья примыкает к работе автора (РЖМат, 1958, 6143), в которой был рассмотрен метод предельного перехода, применяемый к фундаментальной группе или к линейному элементу, позволяющий из римановых однородных пространств получать аналогичные пространства другого типа.

Если проводить равномерное растяжение

$$x^i = \varepsilon \overline{x^i}, \quad \varepsilon = \text{const},$$

риманова пространства с аналитическими g_{ij} и затем стремить ε к нулю, то после сокращения ds^2 на ε^2 получим линейный элемент евклидова пространства. Если растяжение производить следующим образом:

$$x^i = (\varepsilon)^{k_i} \overline{x^i},$$

то после сокращения получим, вообще говоря, пространство, не являющееся евклидовым. Этот метод в данной статье применяется к отысканию некоторых неприводимых симметрических в смысле Э. Картана пространств, причем исходным материалом служат римановы пространства нулевой сигнатуры.

Представив линейный элемент последнего пространства в виде

$$ds^2 = 2\sum_1^n dx^p\,dx^{n+p} + g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta,$$

$$p, q = 1, \ldots, n;\ \alpha, \beta = 1, \ldots, 2n,$$

где разложения $g_{\alpha\beta}$ начинаются со степеней $\geqslant 2$, и проводя растяжения

$$x^p = \varepsilon \overline{x^p}, \quad x^{n+p} = \varepsilon^3 \overline{x^{n+p}},$$

автор приходит к пространствам

$$ds^2 = 2d\overline{x^p}\,d\overline{x^{n+p}} + a_{qrst}\overline{x^q}\,\overline{x^r}\,d\overline{x^s}\,d\overline{x^t},$$

где a_{qrst} — постоянные, являющиеся симметрическими и $(n-1)$ раз проективными в смысле В. Ф. Кагана. Далее он исследует три частных вида этих пространств, выбирая постоянные a_{qrst} специальным образом так, что вторая группа членов получает вид:

(I) $$(e_q x^q dx^q)^2, \quad e_q = e^q = \pm 1;$$

(II) $$\left[\sum_1^m (x^{2i}dx^{2i-1} - x^{2i-1}dx^{2i})\right]^2 \quad n = 2m;$$

(III) $$(e_q x^q dx^q)^2 + \left[\sum_1^m (x^{2i}dx^{2i-1} - x^{2i-1}dx^{2i})\right]^2,$$

$$e_q = \pm 1, \quad n = 2m.$$

Вид (I) был рассмотрен впервые П. А. Широковым (РЖМат, 1956, 1645), который показал, что это неприводимые симметрические пространства 1-го класса, не являющиеся пространствами постоянной кривизны. Автор показывает еще, что они $(2n-2)$ раза проективны и группа движений у них неполупростая.

Непроводимость пространств (II) доказана автором в цитированной ранее работе. Они также $(2n-2)$ проективны, но не субпроективны, и группа движений у них неполупростая. Пространства (III) тоже оказываются неприводимыми.

В заключение, приводя результаты А. Д. Островской, касающиеся пространства нуль пар (гиперплоскость и точка в ней не лежащая) n-мерного проективного пространства, автор отмечает, что оно обобщает (II) и является тоже $(2n-2)$ проективным, но не субпроективным. Автор дает пример пространства аффинной связности, обобщающего предыдущее и являющегося тоже $2n-2$ проективным. Б. Л. Лаптев

3405. Частичнопроективные римановы пространства со знаконеопределенной метрикой. Врэнчану (Espaces de Riemann partiellement projectifs à métrique indéfinie. Vrănceanu Gheorghe), Math. Nachr., 1958, 18, № 1-6, 123—126 (франц.)

Частичнопроективным автор называет такое риманово пространство V_n, у которого в некоторой системе координат часть уравнений для геодезических — линейные. Частичнопроективные V_n с $ds^2>0$ были исследованы автором ранее (Leçons de géométrie différentielle, Bucarest, 1957, v. II, ch. I); в реферируемой статье исследуется случай знаконеопределенной метрики.

Доказывается следующая теорема: Пусть четномерное V_{2m} со знаконеопределенной метрикой обладает вполне изотропными поверхностями максимальной размерности m. Выберем истему координат так, чтобы эти поверхности были координатными поверхностями $x^1, \ldots, x^m$. Если геодезические линии пространства V_{2m} располагаются в $(m+1)$-мерных линейных многообразиях, параллельных осям $x^1, \ldots, x^m$, то его метрика приводится к каноническому виду

$$ds^2 = 2dx^1dx^{m+1} + \ldots + 2dx^m\,dx^{2m} + S\,(x^\gamma)\,(x^1dx^{m+1} + \ldots + x^mdx^{2m})^2 + b_{\alpha\beta}\,(x^\gamma)\,dx^\alpha\,dx^\beta$$

$$(\alpha,\ \beta,\ \gamma = m+1, \ldots, 2m).$$

А. С. Солодовников

3406. О погружении пространства V_m в пространство E_n. Михэйляну (Despre scufundarea unui V_m intr-un E_n. Mihăileanu N.), Lucrările consfăt. geom. diferenț. 1955. Timişoara Acad. RPR, 1956, 161—167 (рум.; рез. русск., франц.)

$M(u^1, u^2, \ldots, u^n)$ — произвольная точка евклидова пространства E_n, отнесенного к криволинейным координатам u^i. Символы Кристоффеля второго рода матрицы $dM = a_{ij}du^idu^j$ имеют вид

$$\Gamma^h_{jk} = \frac{\left(\frac{\partial M}{\partial u^1}, \ldots, \frac{\partial M}{\partial u^{h-1}}, \frac{\partial^2 M}{\partial u^j\,\partial u^k}, \frac{\partial M}{\partial u^{h+1}}, \ldots, \frac{\partial M}{\partial u^n}\right)}{\left(\frac{\partial M}{\partial u^1}, \ldots, \frac{\partial M}{\partial u^n}\right)}. \quad (1)$$

При заданном римановом пространстве V_m ($M = M \times (u^1, \ldots, u^m)$; $m<n$), погруженном в E_n, автор использует соотношения (1) для вычисления символов Кристоффеля второго рода Γ^h_{jk} матрицы Врэнчану:

$$dM'^2 = dM^2 + 2u^\alpha \cdot dM\,dN_\alpha + u^\alpha \cdot du^\beta N_\beta \cdot dN_\alpha + u^\alpha u^\beta dN_\alpha dN_\beta + \sum (du^\alpha)^2,$$

где M' — произвольная точка пространства E_n, N_α — $(n-m)$ векторов, взаимно ортогональных и ортогональных к многообразию V_m. D. Papuc

3407. Гармонические тензоры и группы движений риманова пространства. Врэнчану (Tensori armonici şi grupuri de mişcare ale unui spaţiu Riemann. Vrănceanu G.), Studii şi cercetări mat. Acad. RPR., 1957, 8, № 3-4, 257—277 (рум.; рез. русск., франц.)

Автор обобщает на замкнутые формы, инвариантные относительно групп G_r, некоторые свойства гармонических форм риманова пространства. Пусть $\xi_{i_1\ldots i_\beta}$ — левый симметрический тензор и $\eta^i_\alpha, \eta^i_{\alpha_1}, \ldots, \eta^i_{\alpha_q}$ —контравариантные векторы, присоединенные к $q+1$ инфинитезимальным преобразованиям группы G_r-мерного пространства. Тогда можно рассматривать тензор $\xi_{i_1\ldots i_{p-q}\alpha_1\ldots\alpha_q} = \eta^{j_1}_{\alpha_1}\eta^{j_2}_{\alpha_2}\ldots\eta^{j_q}_{\alpha_q}\xi_{i_1\ldots i_{p-q}\,j_1\ldots j_q}$. Обозначая через L_α символ производной Ли относительно преобразования η^i_α, автор казывает формулу

$$L_\alpha\xi_{i_1\ldots i_{p-q}\alpha_1\ldots\alpha_q} = \eta^{j_1}_{\alpha_1}\ldots\eta^{j_q}_{\alpha_q}L_\alpha\,\xi_{i_1\ldots i_{p-q}j_1\ldots j_q} + \xi_{i_1\ldots i_{p-q}\rho\alpha_2\ldots\alpha_q}c^\rho_{\alpha\alpha_1} + \xi_{i_1\ldots i_{p-q}\alpha_1\ldots\alpha_{q-1}\rho}\,c^\rho_{\alpha\alpha_q}.$$

В частности, если $\eta^i_{\alpha_1}, \ldots, \eta^i_{\alpha_q}$ порождают инвариантную подгруппу G_q группы G_2, то эта формула сводится к

$$L_\alpha\xi_{i_1\ldots i_{p-q}\alpha_1\ldots\alpha_p} = \eta^{j_1}_{\alpha_1}\ldots\eta^{j_q}_{\alpha_q}L_\alpha\,\xi_{i_1\ldots i_{p-q}j_1\ldots j_q} - k_\alpha\,\xi_{i_1\ldots i_{p-q}\alpha_1\ldots\alpha_q}$$

$$\left(k_\alpha = c^{\alpha_1}_{\alpha_1\alpha} + c^{\alpha_2}_{\alpha_2\alpha} + \ldots + c^{\alpha_q}_{\alpha_q\alpha}\right).$$

Показано, что если тензор $\xi_{i_1\ldots i_p}$ инвариантен относительно преобразований $\eta^i_\alpha, \eta^i_{\alpha_1}, \ldots, \eta^i_{\alpha_q}$ и $k_\alpha = 0$, то тензор $\xi_{i_1\ldots i_{p-q}\alpha_1\ldots\alpha_q}$ инвариантен относительно η^i_α. Дается аналогичная формула для внешних производных тензоров $\xi_{i_1\ldots i_p}$, $\xi_{i_1\ldots i_{p-q}\alpha_1\ldots\alpha_q}$. В частности, отсюда следует, что этот последний тензор замкнут, если тензор $\xi_{i_1\ldots i_p}$ замкнут и инвариантен относительно группы G_q и если вектор структуры группы G_q равен нулю. Затем автор дает предыдущие формулы в случае, если рассмотренные тензоры будут отнесены к системе сравнений конгруэнций, если группа G_r пространства просто транзитивна, определение замкнутых тензоров, инвариантных относительно группы G, приводится к решению системы алгебраических уравнений. Результаты применяются к определению чисел Бетти пространства группы Ли и обобщаются некоторые результаты Ходжа. C. Teleman

3408. О пространствах A_3 с максимальной транзитивной группой. Думитраш (Asupra spaţiilor A_3 cu grup transitiv maxim. Dumitraş Viorel), An. Univ. «C. I. Parhon». Ser. ştiinţ natur., 1957, № 13, 27—43 (рум.; рез. русск., франц.)

Определяются трехмерные пространства аффинной связности A_3 (вообще с кручением), допускающие транзитивные группы движений $\mathfrak{G}_r$ максимального порядка $r=9$ или $r=8$; выясняется наличие двух категорий пространств A_3, допускающих транзитивную группу $\mathfrak{G}_9$, и одной категории пространств A_3 с транзитивной группой движений $\mathfrak{G}_8$. В основу исследования положены известные условия инвариантности связности и найденные Ли подгруппы пятого и шестого порядков линейной однородной группы от 3 переменных. И. П. Егоров

3409. 6-параметрические группы движений пространств A_3. Думитраш (Grupurile de mişcare cu şase parametri ale spaţiilor A_3. Dumitraş Viorel), Studii şi cercetări mat. Acad. RPR, 1957, 8, № 3-4, 303—342 (рум.; рез. русск., франц.)

Пространство A_n, которое не будет локально евклидовым, может иметь, согласно одной теореме Егорова, группу движений, имеющую не более n^2 параметров если оно проективно-евклидово; и в силу теоремы референта может иметь самое большее группу с n^2-2n+5 параметрами, если оно не проективно-евклидово.

В случае пространства A_3 эти максимумы будут 9 и 8. Автор определил пространства A_3, обладающие группой G_7. Этот вопрос также рассматривался референтом. В настоящей работе автор рассматривает пространство A_3, которое обладает транзитивной группой движений с шестью параметрами.

Для определения этих пространств используют классификацию Софуса Ли трехпараметрических линейных однородных аффинных групп преобразований с тремя переменными, оставляя в стороне преобразования, определяемые оператором

$$U = x^1 \frac{\partial f}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial f}{\partial x^2} + x^3 \frac{\partial f}{\partial x^3},$$

которые, как известно из теоремы референта, не могут быть стационарными подгруппами пространства A_3, которое неевклидово. Также оставляют в стороне группы, содержащие преобразование $x^i \frac{\partial f}{\partial x^j} + U\ (i \neq j)$, которые, как показал автор, не могут быть стационарными подгруппами неевклидова пространства A_3. Группы G_3 составляют десять классов, и для каждой группы отыскивается соответствующее пространство. В этом исследовании нужно различать случай, когда пространство риманово, и, следовательно, постоянной кривизны, и случай, когда оно обладает группой, зависящей от более чем шести параметров. Как пример пространства A_3 с транзитивной группой G_6 получается пространство, ненулевые компоненты связности которого будут

$$\Gamma^2_{21} = \Gamma^3_{31} = \frac{\alpha+\beta}{M}, \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = \frac{\alpha-\beta}{M}, \quad \Gamma^1_{11} = \frac{2\alpha}{M},$$

$$\Gamma^2_{33} = \gamma M^{\frac{\lambda}{\lambda-\mu}}, \quad M = 1 + (\mu-\lambda)x^1, \quad \mu \neq \lambda,$$

где γ, μ, λ — постоянные. Это соответствует случаю, когда стационарная подгруппа определена операторами

$$x^3 \frac{\partial f}{\partial x^2}, \quad x^1 \frac{\partial f}{\partial x^2}, \quad 2x^2 \frac{\partial f}{\partial x^2} + x^3 \frac{\partial f}{\partial x^3},$$

а два других пространства A_3 с транзитивной группой G_6 соответствуют этой стационарной группе. G. Vrănceanu

3410. Определение пространств A_3 с транзитивной группой $\mathfrak{G}_7$. Думитраш (Determinarea spațiilor A_3 cu grup tranzitiv $\mathfrak{G}_7$. Dumitraș Viorel), Studii și cercetări mat. Acad. RPR, 1957, **8**, № 1-2, 183—234 (рум.; рез. русск., франц.)

Определяются трехмерные пространства A_3 аффинной связности, допускающие 7-членную транзитивную группу движений $\mathfrak{G}_7$. Исследование базируется на известной классификации Ли 4-членных подгрупп центроаффинной группы от трех переменных (стационарная подгруппа группы $\mathfrak{G}_7$ в нормальных координатах является подгруппой центроаффинной группы). Подгруппы $\mathfrak{G}_4$, содержащие оператор $x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x^2 \frac{\partial f}{\partial x^2} + x^3 \frac{\partial f}{\partial x^3}$, приводят к аффинно евклидову A_3.

Проверкой устанавливается, что из семи возможных подгрупп $\mathfrak{G}_4$ стационарными подгруппами искомых пространств являются лишь четыре подгруппы.

Далее, из структуры группы $\mathfrak{G}_4$ находятся операторы сдвигов для каждой стационарной подгруппы и по формулам, выражающим инвариантность связности (вообще с кручением), определяются коэффициенты связности пространств A_3. И. П. Егоров

3411. Геодезические поля направлений и группы гомотетий в пространствах аффинной связности. Шапиро Я., Докл. АН СССР, 1958, **120**, № 3, 481—484

Приведены результаты дальнейшего изучения рассмотренных впервые автором геодезических полей направлений (Докл. АН СССР, 1941, **32**, 237—239) и систем путей, включенных в A_n (РЖМат, 1956, 3307). Установлена в специальной системе координат $\sum'$ структура коэффициентов связности $\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}$ пространства A_{n+m}, допускающего m геодезических полей направлений $\overset{a}{A}{}^\alpha$ $(a = 1, \ldots, m)$. За координатные линии u^α приняты векторные линии этих полей, причем m-мерные вполне геодезические подпространства, на которые расслаивается A_{n+m}, оказываются проективно евклидовыми. В силу последнего свойства существует класс координатных систем $\sum''$, для которого в уравнениях геодезических, принадлежащих многообразию $u^i = \text{const}$ $(i = m+1, \ldots, m+n)$, u^α связаны линейно.

Рассмотрены линейные многообразия геодезических полей направлений $\sum_a \lambda_a \overset{a}{A}{}^\alpha$, образованные „$L$-нормированными“ геодезическими полями $\overset{a}{A}{}^\alpha$, т. е. полями, которые линейно независимы (с постоянными коэффициентами) и таковы, что любая их линейная комбинация (с постоянными коэффициентами) дает геодезическое поле направлений. Приводятся необходимые и достаточные условия принадлежности векторов $\overset{a}{A}{}^\alpha$ к классу L-нормированных полей, а также включения векторов $\overset{a}{A}{}^\alpha$ в линейное многообразие геодезических полей направлений. Указывается, что в пространстве, допускающем такие многообразия, существуют координатные системы $\sum$, в которых L-нормированные векторы получают координаты $\overset{a}{A}{}^\alpha = \delta^\alpha_a$. Устанавливается структура коэффициентов связности в этих системах.

В заключение устанавливается связь введенных понятий с группами гомотетий. Пусть $\overset{a}{A}{}^\alpha$ — векторы операторов $\overset{a}{A}{}^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}$ фундаментальной группы пространства A_{n+m}. Если поле $\sum \lambda_a \overset{a}{A}{}^\alpha$ любой одночленной подгруппы является геодезическим, то преобразования называются гомотетиями. Максимальный порядок достигается в случае аффинного пространства, где получаются гомотетии в обычном смысле. Приведены необходимые и достаточные условия для векторов $\overset{a}{A}{}^\alpha$, определяющих группу гомотетий m-го порядка. Указывается, что геодезические поля направлений $\overset{a}{A}{}^\alpha$, порождающие группу гомотетий, принадлежат линейному многообразию геодезических полей направлений.

Примечание референта. Вформулах 1-а, 1-б, 2-б, 3, 4 встречаются дефекты типографского набора, а в 3 и 4 опечатки. Б. Л. Лаптев

3412. О группах движений проективных пространств аффинной связности. Врэнчану (Sur les groupes de mouvements des espaces à connexion affine projectifs. Vrănceanu G.), Ann. scient. École norm. supér., 1957, **64**, № 3, 249—268 (франц.)

Исследуется возможность продолжения проективного пространства аффинной связности на полное проективное пространство. Приводится новый способ определения известных пространств аффинной связности ненулевой кривизны, допускающих группы движений максимального порядка (Егоров И. П., Докл. АН СССР, 1947, **57**, № 9).

Выясняются группы движений проективно-евклидовых пространств, обладающих: 1) инвариантной формой Пфаффа класса $2p$ и типа p или $p+1$; 2) инвариантной квадратичной формой ранга m (см. соответственно Егоров И. П., Докл. АН СССР, 1952, **84**, № 2; **87**, № 5.) И. П. Егоров

3413. Римановы многообразия и группы конформных преобразований. Хирамацу (Riemannian manifolds and conformal transformation groups. Hiramatu Hitosi), Tensor, 1958, 8, № 2, 123—150 (англ.)

Пусть G — эффективная группа Ли конформных преобразований связного риманова пространства $\mathfrak{M}$ с положительно определенной метрикой класса C^∞, G_p — стационарная подгруппа точки p, $\widetilde{G}_p$ — группа изотропии этой точки, т. е. подгруппа полной линейной группы в касательном пространстве точки p, отвечающая G_p. Отображение $G_p \to \widetilde{G}_p$ есть гомоморфизм. Пусть K_p — ядро этого гомоморфизма, а M_p — совокупность всех преобразований из G_p, которые „изометричны" в p (так что $\widetilde{M}_p$ есть подгруппа ортогональной группы). Группа G_p называется изометричной в p, если $\dim G_p = \dim M_p$. Если это равенство не соблюдается, то G_p называется гомотетичной, при этом $\dim G_p = \dim M_p + 1$. Доказывается, что $0 \leqslant \dim K_p \leqslant n$, а, если $\dim \widetilde{M}_p = \frac{n(n-1)}{2}$, то $\dim K_p = 0$ или n. Отсюда делается вывод, что при $\dim \widetilde{M}_p = \frac{n(n-1)}{2}$ $(n > 2)$ или $\dim \widetilde{M}_p = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ $(n > 4, \neq 8)$ тензор конформной кривизны C_{ijkl} обращается в нуль в точке p. Используя эти утверждения, а также теорему Исихара и Обата (РЖМат, 1957, 6637), согласно которой $C_{ijkl} = 0$ во всякой точке p, в которой компонента единицы G_p^0 группы G_p гомотетична в p, доказываются следующие основные теоремы:

Теорема 7. Если $\dim G \geqslant \frac{n(n+1)}{2} + 1$, то G_p^0 гомотетична в каждой точке p и, следовательно, $\mathfrak{M}$ есть конформно плоское пространство.

Теорема 8. Не существует эффективной группы конформных преобразований G, для которой

$$\frac{n(n+1)}{2} + 2 < \dim G < \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Теорема 9. $\mathfrak{M}$ конформно плоское пространство, если его группа конформных преобразований G удовлетворяет одному из следующих условий:

а) $n > 2$, $\neq 4$, $\frac{1}{2}n(n-1)+1 < \dim G < \frac{1}{2}n(n+1)+1$,

в) $n \geqslant 4$, $\neq \infty$, $\dim G = \frac{1}{2}n(n-1)+1$.

За исключением конечного числа значений n:

$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+2 < \dim G < \frac{1}{2}n(n-1)+1.$$

Во второй части работы приводятся новые доказательства известных теорем И. П. Егорова и И. Яно о группах движений и группах подобных преобразований в $\mathfrak{M}$, для которых $\dim G \geqslant \frac{1}{2}n(n-1)+1$.

А. С. Солодовников

3414. Относительная риманова геометрия. II. Метрическая связность. Мацумото (Relative Riemannian geometry. II. On the metric connections. Matsumoto Makoto), Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, 1958, **A31**, № 2, 95—110 (англ.)

Для связностей пар многообразий (M, N) (РЖМат, 1959, 6273) доказывается ряд теорем существования, вводятся геодезические линии и исследуются некоторые их свойства. В. И. Шуликовский

3415 Д. Исследования по изгибанию поверхностей многомерного пространства. (Изгибание высших порядков и тангенциальное изгибание). Рыжков В. В. Автореф. дисс. докт. физ.-матем. н., МГУ, М., 1959

ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

3416. Пересмотр теории относительности. Паласиос (Revisión de la teoria de la relatividad. Palacios Julio), Rev. Real acad. cienc. exact., fis. y natur. Madrid, 1957, **51**, № 1, 21—101 (исп.)

Кроме предисловия и введения, статья содержит главы: 1) Уравнение Лоренца; 2) Новые формулы преобразования; 3) Релятивистская динамика.

Основные постулаты теории относительности Эйнштейна сводятся к трем: 1. Если дана некоторая инерциальная система S, то всякая другая система S', движущаяся относительно первой равномерно и прямолинейно, будет также инерциальной. 2. Свет распространяется с одинаковой скоростью во всех инерциальных системах. 3. Все инерциальные системы являются эквивалентными.

Если мы имеем систему координат S', движущуюся со скоростью v параллельно оси Ox системы S, то уравнения преобразования от первой системы ко второй будут:

$$x = \frac{\gamma}{\alpha}(x' + vt'), \quad y = \gamma y', \quad z = \gamma z',$$

$$t = \frac{\gamma}{\alpha}\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right),$$

где $\alpha = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, а γ — некоторая произвольная постоянная, которая при выводе уравнения Лоренца вследствие эквивалентности обеих систем S и S' должна равняться единице (Постулат 3). Эти уравнения приводят к парадоксальному выводу.

Автор рассматривает поезд, идущий вперед и идущий назад, как две различные инерциальные системы S и S' и показывает, что его «парадокс часов» остается необъяснимым. Обычное решение с привлечением общей теории относительности его также не удовлетворяет, и он предлагает отказаться от 3-го постулата, заменив его требованием: «продолжительность события, происходящего в неподвижной точке любой инерциальной системы, должна быть также одинаково оцененной и в неподвижной системе» (стр. 57). Это устраняет «парадокс часов», но требует, чтобы в уравнениях преобразования постоянная была равной α, так что вместо уравнений Лоренца мы будем иметь:

$$x = x' + vt', \quad y = \alpha y', \quad z = \alpha z', \quad t = t' + \frac{v}{c^2}x'.$$

В результате оказывается, что сокращения тела перпендикулярно направлению движения будут происходить в отношении $1:\alpha$, а по направлению движения в отношении $1:\alpha^2$. Автор считает, что сокращение в отношении $1:\alpha$ является действительным для всех направлений (стр. 61), но что к этому присоединяется еще видимое сокращение $1:\alpha$ по направлению движения, так что опыт Майкельсона является объясненным. Статья изобилует опечатками и не закончена. И. Н. Веселовский

3417. О комплексном представлении тензоров пространства Лоренца. Норден А. П., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1959, № 1, 156—163

Продолжено изучение соответствия между бипланарным (B_{2n}) и комплексным аффинным (A_n) пространствами, установленного автором ранее и примененного к исследованию структуры битензоров пространства Лоренца L_4 (РЖМат, 1956, 5474).

Введены комплексные связующие аффиноры

$$\Delta^a_b = \frac{1}{2}\left(\delta^a_b + i\varepsilon^a_b\right), \quad \bar{\Delta}^a_b = \frac{1}{2}\left(\delta^a_b - i\varepsilon^a_b\right)$$

(ε^a_b — аффинор абсолютной инволюции), позволяющие путем свертывания с ними отображать тензоры B_{2n} в тензоры или эрмитианы A_n. Если эрмитов образ тензора a_{ab} равен нулю, то тензор называется протензором; если же тензорный образ нуль, то тензор получает название проэрмитиана. Соответственные условия этого таковы

$$a_{ab} = -\widetilde{a}_{ab}, \quad a_{ab} = \widetilde{a}_{ab},$$

где $\sim$ означает сопряженность в абсолютной инволюции.

Отображение бивектора u^{ij} пространства L_4 на векторы u^a шестимерного пространства X_6 с помощью связующего аффинора η^a_{ij}, обобщается далее в отображение „политензоров", т. е. тензоров четной валентности, индексы которых разбиваются на кососимметрические пары, на тензоры X_6. Вводя в X_6 метрику требованием, чтобы операции перебрасывания индексов в X_6 с помощью g_{ab} и в L_4 с помощью g_{ij} соответствовали друг другу, автор устанавливает, что тензор g_{ab} является образом „метрического битензора"

$$g_{ij,\,kl} = g_{[i[k}\,g_{e]l]}.$$

Дискриминантный битензор e_{ijkl} отображается в симметрический тензор ε_{ab}, который удовлетворяет условию $\varepsilon^b_a\,\varepsilon^c_b = -\delta^c_a$, и потому может быть принят за тензор абсолютной инволюции, а тогда X_6 становится B_6. Метрический тензор g_{ab} оказывается протензором и, следовательно, соответствующее A_3 оказывается комплексным евклидовым пространством R_3. Получив тождество, связывающее сопряженный битензор с исходным

$$\widetilde{a}_{ij,\,pq} + a_{pq,\,ij} = 4\overset{\circ}{a}_{[p[i}\,g_{j]q]},$$

где „ядро битензора"

$$\overset{\circ}{a}_{pi} = a_{pi} - \frac{1}{4}\,g_{pi}\,a^q{}_q \quad (a_{pi} = a^q_{p,\,iq}),$$

автор называет битензор изотропным, если ядро его равно нулю. Битензор называется простым, если он имеет следующую структуру:

$$a_{pq,\,ij} = z_{[p[i}\,g_{j]q]}.$$

Установлено, что битензоры, удовлетворяющие двум условиям, стоящим в каком-либо столбце, удовлетворяют и третьему

Симметричный		Кососимметричный	
простой	изотропный	простой	изотропный
проэрмитиан	протензор	протензор	проэрмитиан

В частности, отсюда следует, что риманово пространство с локально-лоренцевой метрикой будет пространством Эйнштейна (битензор кривизны — изотропный) тогда и только тогда, если его тензор кривизны — протензор. Отсюда вытекает, что в этом случае для приведения тензора кривизны к каноническому виду достаточно совместно привести к каноническому виду симметрические тензоры $\mathfrak{W}_{ab}$ и R_{ab} в комплексном R_3.

В заключение изучен „метрический тритензор" $g_{[i[k}\,g_{l][m}\,g_{n]j]}$ пространства L_4. В статье приведена также часть текста цитированной выше работы, выпущенная по вине редакции. Б. Л. Лаптев

3418. Релятивистские волновые уравнения, подчиненные неоднородной лоренцевой группе. Гото (Relativistic wave equations under the inhomogeneous Lorentz group. Gotô Ken-iti. Progr. Theoret. Phys., 1954, 12, 409—420) (англ.)

Чтобы получить восьмикомпонентное спинорное представление неоднородной лоренцевой группы, автор использует тот факт, что неоднородная лоренцева группа является подгруппой конформной группы в четырехмерном пространстве и эта последняя изоморфна группе квадратичной формы

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 + x_5^2 - x_6^2.$$

Он также предполагает, что волновые уравнения, удовлетворяются такими восьмикомпонентными спинорами с разными числами индексов. A. H. Taub

Перевод из Math. Revs, 1955, № 6, 566.

3419. Волновые поля в пространстве Де Ситтера. Гото (Wave fields in de Sitter space. Goto Ken-iti. Progr. Theoret. Phys., 1954, 12, 311—354 (англ.)

Подробно рассматривается, за исключением условий действительности, четырехкомпонентное спинорное представление лоренцевой группы в пятимерном пространстве. Эта теория потом применяется к исследованию общего волнового уравнения для частиц с произвольным спином в пространстве Де Ситтера. Даются решения волновых уравнений второго порядка, которые должны быть удовлетворены каждым компонентом спинорного поля. Ссылки на литературу по этому вопросу не полны. A. H. Taub

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 6, 566.

ГЛОБАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ МНОГООБРАЗИЙ

3420. О полигармонических дифференциальных формах. Елиану (Asupra formelor diferențiale poliarmonice. Elianu I. P.), Bul. ştiinţ. Acad. RPR. Sec. mat. şi fiz, 1957, **9**, № 2, 233—240 (рум.; рез. русск., франц.)

α — оператор внешнего дифференцирования, а δ — оператор кодифференцирования в римановом пространстве U_n. Автор называет замкнутой (козамкнутой) формой порядка m форму α, для которой $d\,(\delta\alpha)^{m-1}\alpha = 0$ ($\delta\,(d\delta)^{m-1}\alpha = 0$).

Форма α называется полигармонической порядка m, если

$$(d\delta)^m\alpha + (\delta d)^m\alpha = 0.$$

Показано, что в компактном пространстве U_m всякая полигармоническая форма α - гармоническая в смысле Ходжа, следовательно, $d\delta\alpha + \delta d\alpha = 0$. Замкнутая (козамкнутая) форма порядка p является также замкнутой (козамкнутой), если пространство V_n компактно. C. Teleman

3421. Не основанные на связности методы для теории главных расслоенных пространств, как почти клейновы геометрии. Такасу (Non-connection methods for the theory of principal fibre bundles as almost Kleinean geometries. Takasu Tsurusaburo), Proc. Japan Acad., 1957, **33**, № 9, 515—520 (англ.)

Автор указывает, что использование аналогичных по свойствам прямым линиям II-геодезических (геодезических линий 2-го рода), получаемых введением абсолютного параллелизма в неголономных координатах (РЖМат, 1957, 1765), позволяет оперировать в дифференцируемом многообразии, как в некотором главном расслоенном пространстве. Установление линейной связности в дифференцируемом многообразии с определенной группой Ли означает, с его точки зрения, соответственный выбор

путей, которые затем используются подобно касательным прямым к данным линиям или подпространствам. В рассматриваемой работе речь идет о евклидовых расслоенных пространствах, т. е. в основу положена группа ортогональных преобразований и II-геодезические использованы для введения аналогов декартовых прямоугольных координат. Приведены параллельно основные формулы как для глобальной (в евклидовом расслоенном пространстве), так и для локальной (в римановом пространстве) теорий.

Автор утверждает, что его основные результаты совпадают с результатами теории глобальной связности Чжэнь Шэн-Шеня и Эресмана (S. S. Chern, C. Ehresmann). Однако недостаточная связность изложения и многочисленные мало обоснованные утверждения делали для референта невозможным надлежащее полное понимание рассматриваемой статьи. Б. Л. Лаптев

3422. Кривизна и относительные числа Бетти. Накаэ (Curvature and relative Betti numbers. Nakae Tatuo), J. Math. Soc. Japan, 1957, **9**, № 3, 367—373 (англ.)

Изучается связь между кривизной и числами Бетти области $\mathfrak{D}$ n-мерного ориентируемого риманова пространства $\mathfrak{M}$, имеющей границу $\mathfrak{B}$.

Пусть $\widetilde{\mathfrak{D}}$ — открытая область, содержащая область $\mathfrak{D}$ вместе с ее границей $\mathfrak{B}$, x^l $(i=1,\ldots n)$ и u^λ $(\lambda=2,\ldots,n)$ — соответственно локальные координаты в области $\widetilde{\mathfrak{D}}$ и на границе $\mathfrak{B}$. В области $\widetilde{\mathfrak{D}}$ может быть определен кососимметричный тензор

$$T^{i_1\ldots i_p}_{i_1\ldots i_p} = \begin{cases} \delta^{i_1\ldots i_p}_{k_1\ldots k_p}\dfrac{1}{(p-1)!}\delta^{t_1k_1\ldots k_p}_{i_1i_2\ldots i_p}R^{k_1}_{t_1} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(p-2)!}\delta^{t_1t_2k_1k_2p}_{i_1i_2i_3\ldots i_p}R^{k_1k_2}_{t_1t_2}, \\ 0 \text{ при } p=0, \\ R^{i_1}_{i_1} \text{ при } p=1, \end{cases}$$

где $\delta^{i_1\ldots i_p}_{i_1\ldots i_p}$ — символ Кронекера, а R^i_j и R_{ijkl} — соответственно тензор Риччи и тензор кривизны риманова пространства $\mathfrak{M}$, а на границе $\mathfrak{B}$ — кососимметричные тензоры

$$P^{\mu_1\ldots\mu_p}_{\lambda_1\ldots\lambda_p} = \begin{cases} F^\sigma_{\lambda_1}\delta^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_p}_{\sigma\lambda_1\ldots\lambda_p} + \ldots + F^\sigma_{\lambda_p}\delta^{\mu_1\ldots\mu_{p-1}\mu_p}_{\lambda_1\ldots\lambda_{p-1}\sigma}, \\ 0 \text{ при } p=0 \end{cases}$$

и

$$Q^{\mu_1\ldots\mu_p}_{\lambda_1\ldots\lambda_p} = F^\sigma_\sigma\,\delta^{\mu_1\ldots\mu_p}_{\lambda_1\ldots\lambda_p} - P^{\mu_1\ldots\mu_p}_{\lambda_1\ldots\lambda_p},$$

где $F_{\lambda\mu}$ — второй фундаментальный тензор границы $\mathfrak{B}$.

При помощи тензора T в области $\widetilde{\mathfrak{D}}$ строится квадратичная форма

$$[T_{(p)}] = \frac{1}{p!}\frac{1}{p!}T^{j_1\ldots j_p}_{i_1\ldots i_p}A^{i_1\ldots i_p}_{\quad}A_{j_1\ldots j_p}$$

от компонент кососимметричного тензора $A_{i_1\ldots i_p}$, а на границе $\mathfrak{B}$ при помощи тензоров P и Q — аналогичные квадратичные формы $[P_{(p)}]$ и $[Q_{(p-1)}]$ от компонент тензоров $B_{\lambda_1\ldots\lambda_p}$ и $C_{\lambda_1-\lambda_p}$.

В предположении, что риманово многообразие $\mathfrak{M}$ ориентируемо и имеет положительно определенную метрику, а замыкание области $\mathfrak{D}$ компактно и содержится в открытой области $\widetilde{\mathfrak{D}}$ и все рассматриваемые объекты принадлежат классу C^∞, доказывается, что если квадратичные формы $[T_{(p)}]$ и $[Q_{(p-1)}]$ будут положительно определенными соответственно в каждой точке области $\mathfrak{D}$ и границы $\mathfrak{B}$, то p-мерное относительное число Бетти области $\mathfrak{D}$ равно нулю при $n-1\geqslant p\geqslant 1$; если же положительно определенными будут формы $[T_{(p)}]$ и $[P_{(p)}]$, то в нуль обращается p-мерное абсолютное число Бетти области $\mathfrak{D}$ при $n-1\geqslant p\geqslant 1$.

Доказательство этой теоремы опирается на теоремы о гармонических формах и числах Бетти, полученные Коннером (Conner P. E., Proc. Nat. Acad. U. S. A., 1954, 40) и Дюффом и Спенсером (Duff G. F. D., Spencer D. C., Ann. Math., 1952, 56).

Из этой теоремы вытекает ряд следствий о числах Бетти области риманова пространства, имеющей выпуклую границу, и области евклидова пространства.

М. А. Акивис

3423. Группа голономии. I. Тензор кривизны. Главатый (The holonomy group. I. The curvature tensor. Hlavatý Václav). J. Math. and Mech., 1959, 8, № 2, 285—307 (англ.)

Пусть g^0_{ij} — метрический тензор риманова пространства V^0_n, а Γ^{0i}_{jk} — его символы Кристоффеля, K^i_{jkl} — тензор кривизны. Тогда $\Gamma^i_{jk}=\Gamma^{0i}_{jk}+Q^i_{jk}$, где Q^i_{jk} — симметричный по нижним индексам тензор, являются коэффициентами некоторой симметрической аффинной связности с тенз ром кривизны R^i_{jkl}. Ставятся и решаются следующие две задачи:

1) найти Q^i_{jk} так, чтобы связность Γ^i_{jk} имела наперед заданный тензор кривизны;

2) найти Q^i_{jk} так, чтобы полученная связность была метрической, т. е. Γ^i_{jk} были символами Кристоффеля некоторого метрического тензора g_{jk}. На первый вопрос отвечает теорема (3. 1): Пусть Q^i_{jkl} — произвольный тензор, удовлетворяющий условию $Q^i_{[jkl]}=0$. Для того чтобы существовала симметрическая связность Γ^i_{jk} с тензором кривизны

$$R^i_{jkl}=K^i_{jkl}+Q^i_{j[kl]}, \tag{1}$$

необходимо и достаточно, чтобы соблюдались условия: а) существовал тензор Y^i_{jkl} для которого

$$2Y^i_{j[kl]}=Q^i_{j[kl]},\quad Y^i_{[jk]l}=0,$$

б) существовало решение $Q^i_{jk}=Q^i_{kj}$ уравнений

$$\nabla_l Q^i_{jk}-Q^m_{jl}Q^i_{km}-Q^m_{kl}Q^i_{jm}=Y^i_{jkl}. \tag{2}$$

Тогда искомая связность $\Gamma^i_{jk}=\Gamma^{0i}_{jk}+Q^i_{jk}$. Здесь символом ∇ обозначается ковариантная производная относительно метрики пространства V^0_n. Исследуются условия интегрируемости уравнений (2). В дополнение к этой теореме доказывается, что необходимым и достаточным условием того, чтобы отображение $\Gamma^{0i}_{jk}\to\Gamma^i_{jk}$ сохраняло объем, является градиентность вектора $Q_l=Q^m_{lm}$. Чтобы ответить на второй вопрос, надо после решения первого найти метрический тензор из уравнений

$$\nabla_k g_{lj}=Q^m_{lk}g_{mj}+Q^m_{jk}g_{ml}.$$

Доказывается, что эти уравнения имеют невырожденное решение g_{ij} тогда и только тогда, когда ранг r матрицы T, составленной из тензора $T^{\alpha\beta}_{ijkl}=R^{(\alpha}_{ij(k}\delta^{\beta)}_{l)}$ и всех его ковариантных производных, удовлетворяет условию $r<\frac{1}{2}(n-1)(n+2)$, где верхние индексы обозначают

номера столбцов матрицы T, а нижние индексы — номера строк, R^{α}_{ijk} берется из (1). Приводятся некоторые приложения полученных результатов, в частности к одному специальному виду геодезического отображения риманова пространства V^0_n на пространство симметрической аффинной связности с коэффициентами Γ^i_{jk}.

Г. И. Кручкович

3424. Глобальное определение структурного тензора G-структуры. Бернар (Définition globale du tenseur de structure d'une G-structure. Bernard Daniel), C. r. Acad. sci., 1958, 247, № 19, 1546—1549 (франц.)

Пусть V_n — многообразие класса C^{∞}, H — дифференцируемое главное расслоенное пространство с базой V_n, проекцией p и группой G, реализованной в виде замкнутой подгруппы группы линейных преобразований n-мерного векторного пространства R_n. Пусть ω — форма первого порядка на H со значениями в R_n, удовлетворяющая условиям: $\omega(gu) = g^{-1}\omega(u)$, $\omega(u) = 0$ тогда и только тогда, когда $pu = 0$ ($g \in G$, u — касательный вектор к H). Задание такой пары (H, ω) эквивалентно заданию подрасслоения в расслоенном пространстве реперов на V_n, а также заданию G-структуры S на V_n. Пусть γ — инфинитезимальная связность в расслоении H, ∇ — соответствующий оператор ковариантного дифференцирования. Кручением связности γ автор называет тензорную форму $\sum = \nabla\omega$ на H. Пусть Λ — форма порядка q на H со значениями в пространстве Q типа $R(G)$. Дается естественная конструкция, сопоставляющая форме Λ тензор $t\Lambda$ на H со значениями в $Q \otimes \Lambda^q R_n^*$ типа $\rho(G)$, где $\rho(g) = R(g) \otimes \Lambda^q g^{-1}$ ($g \in G$). В частности, тензор $t\sum$ принимает значения в пространстве $P = R_n \otimes \Lambda^2 R_n^*$. Пусть α — проекция пространства P на его факторпространство M, определенное в предшествующей работе автора (РЖМат, 1959, 10453). Тогда векторная форма второго порядка $\sum$ на H является кручением некоторой связности тогда и только тогда, когда $\alpha \circ t\sum$ есть структурный тензор t_S структуры S в смысле цитированной работы автора. Структура S называется интегрируемой, если V_n может быть покрыто областями U, над каждой из которых существует сечение расслоения H, состоящее из координатных реперов, отвечающих некоторой локальной системе координат в U. Если S интегрируема, то $t_S = 0$, а если S инволютивна и аналитична, то верно и обратное. Доказательства отсутствуют.

А. Л. Онищик

3425. Эрмитовы многообразия нулевой кривизны. Бутби (Hermitian manifolds with zero curvature. Boothby William M.), Michigan Math. J., 1958, **5**, № 2, 229—233 (англ.)

Доказываются следующие предложения:

1) Если M — эрмитово многообразие нулевой кривизны, то параллельное перенесение вектора или репера зависит только от гомотопического класса пути. И если оно односвязно, то может быть параллелизуемо при помощи параллельных ортонормальных реперов.

2) Параллелизуемое комплексно-аналитическое многообразие имеет естественную метрику, которая является эрмитовой с нулевой кривизной, и относительно нее данное поле реперов можно считать параллельным и ортонормальным.

3) Если M — компактное эрмитово многообразие нулевой кривизны, то его универсальное накрывающее пространство $\widetilde{M}$ является комплексной группой Ли, причем M есть факторпространство $\widetilde{M}/D$, где D — дискретная группа накрывающих преобразований, каждое из которых является изометрией без неподвижных точек, переводящей $\widetilde{M}$ в $\widetilde{M}$. Отсюда следует, что компактное эрмитово многообразие нулевой кривизны не может быть односвязным. Библ. 7 назв.

Н. С. Синюков

3426. Комплексные расширения. Шатрик (Complex extensions. Shutrick H. B.), Quart. J. Math., 1958, **9**, № 35, 189—201 (англ.)

Пусть Λ^{ω}_n — псевдогруппа аналитических регулярных гомеоморфизмов между открытыми множествами вещественного числового пространства R^n. Обозначим через Λ^{ω}_n соответствующую псевдогруппу для комплексного числового пространства C^n; рассмотрим подмножество Λ^{ω}_n псевдогруппы Λ^c_n, состоящее из таких отображений, которые на R^n совпадают с элементами Λ^{ω}_n, и у которых обратные отображения обладают тем же свойством. Элемент Λ^e_n называется комплексным расширением своего ограничения на R^n (принадлежащего к Λ^{ω}_n). Λ^e_n образует псевдогруппу в C^n. Каждый элемент Λ^{ω}_n имеет комплексное расширение, которое однозначно определено в случае, если множество $U \subset C^n$, которое преобразуется этим комплексным расширением, задано и таково, что $U \cap R^n$ связно. Если вещественно аналитическое многообразие M задано полным атласом A Хаусдорфова пространства на R^n, совместным с Λ^{ω}_n, то комплексное расширение N многообразия M есть, по определению, комплексно-аналитическое многообразие, которое содержит M в качестве подмножества и обладает податласом B, совместным и полным по отношению к Λ^e_n и таким, что A есть множество ограничений элементов B на R^n. Если N и N' — два комплексных расширения многообразия M, то существует окрестность M в N, изоморфная окрестности M в N'. Если N есть комплексное аналитическое многообразие, содержащее M в качестве вещественного (по Эресману) замкнутого аналитического подмногообразия, и $\dim M = \frac{1}{2}\,\text{real dim}\, N$, то N имеет единственный податлас B, превращающий его в комплексное расширение M. Основной результат работы состоит в следующей теореме: каждое вещественно-аналитическое многообразие, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, допускает комплексное расширение. В последнем параграфе кратко рассмотрено комплексное расширение аналитических структур на аналитическом многообразии.

Д. В. Беклемишев

3427. О некоторых комплексных расслоенных структурах. Кошуль, Мальгранж (Sur certaines structures fibrées complexes. Koszul J.-L., Malgrange B.), Arch. Math., 1958, **9**, № 1-2, 102—109 (франц.)

Обозначим через G комплексную группу Ли, V — комплексно-аналитическое многообразие, а P — главное расслоенное пространство с базой V и структурной группой G. Рассмотрим на P форму связности γ. В работе доказана эквивалентность следующих условий:

1. Почти комплексная структура, определенная формой γ, есть комплексная структура.

2. Тензор кручения почти комплексной структуры равен нулю.

3. Составляющая типа (0, 2) формы кривизны R_{γ} равна нулю.

4. Для каждой точки $X_0 \in V$ существует открытая окрестность, в которой существует почти комплексное сечение пространства P.

При доказательстве используется следующая теорема: Пусть g — алгебра Ли вещественных векторных полей, левоинвариантных относительно G, U — окрестность нуля в C^n, α — форма типа (0, 1) на U со значениями в g. Для того чтобы существовала окрестность нуля $V \subset U$ и бесконечно дифференцируемое отображение fV в G, удовлетворяющее условию $f^{-1}d''f = \alpha$, необходимо и достаточно, чтобы в окрестности нуля выполнялось равенство

$$d''\alpha + [\alpha\alpha] = 0.$$

Здесь $f^{-1}d''f$ и $d''\alpha$ обозначают составляющую типа (0, 1) формы $f^{-1}df$ и составляющую типа (0, 2) формы $d\alpha$.

Д. В. Беклемишев

3428. Расслоенные системы якобиевых многообразий. Игуса (Fibre systems of Jacobian varieties. Igusa Jun-Ichi), Amer. J. Math., 1956, 78, № 1, 171—199 (англ.)

Пусть V будет неособенной поверхностью в проектном пространстве. Показывается, что существует общий линейный пучок $\{C_n\}$ на V; он является линейной системой сечений гиперповерхностями, параметризованной переменной точкой u проективной прямой такой, что кривая C_u неприводима и неособенна, за исключением конечного числа значений u, в случае которых единственной особенностью кривой является обыкновенная двойная точка, и такой, что любые две кривые пучка трансверсальны в каждой базисной точке пучка. Далее, строится обобщенное якобиево многообразие (РЖМат, 1956, 5451) кривой C в проективном пространстве по методу Чжоу (РЖМат, 1955, 3373); этот метод не только избегает расширения основного поля, но также дает специальное проективное погружение. Если C не имеет особенностей, кроме обыкновенной двойной точки, то ее обобщенное якобиево многообразие получается из обычного якобиева многообразия как „удвоенное многообразие". Пусть теперь V и $\{C_n\}$ имеют прежний смысл, k — алгебраически замкнутое поле определения всех рассматриваемых объектов, u произвольно над k и пусть якобиево многообразие J_u кривой C_u и каноническое отображение $\varphi_u: C_u \to J_u$ (нормализованное так, чтобы заданная базисная точка пучка $\{C_n\}$ переводилась в 0) строится как выше, над полем $k(u)$. „Многообразие Чжоу" $\mathfrak{G}$ для V и $\{C_n\}$ является тогда местом $u \times J_u$ над k. При всякой специализации $u \to u'$, J_u специализируется как якобиево $J_{u'}$ для $C_{u'}$ (или пополнение обобщенного якобиева многообразия $C_{u'}$, если $C_{u'}$ имеет двойную точку). Групповой закон на j_n специализируется в групповой закон $J_{u'}$ и существует отображение $\varphi: V \to \mathfrak{G}$ (бирациональное, если род g кривой C_u положителен), сводящееся к φ_u на C_u. Более того, особое место $\mathfrak{G}$ содержится в его вырожденных слоях, т. е. в слоях, соответствующих кривым с двойными точками. Отображение φ дает изоморфизм между многообразиями Альбезе для $\mathfrak{G}$ и V, и отображение дифференциалов первого рода на G в дифференциалы на V. В приложении определяется класс линейной эквивалентности гиперплоских сечений проективного погружения Чжоу якобиева многообразия кривой C. Этот класс алгебраически эквивалентен кратному канонического образа Θ в $j(g-1)$-кратного произведения C на себя.

M. Rosenlicht

Перевод из Math. Revs, 1957, 18, № 11, 935

3429. Критерий, касающийся групп нулевого ранга. Добреску (Un criteriu privind grupurile de rang zero. Dobrescu Andrei), Comun. Acad. RPR, 1957, 7, № 11, 923—927 (рум.; рез. русск., франц.)

Структуру группы Ли G_r можно определить с помощью постоянного тензора третьего ранга c_{kl}^h. Следуя методом, предложенным референтом, автор выводит свойства группы прямо из свойств этого тензора и ассоциированных тензоров $c_l = c_{hl}^h$, $c_{kl} = c_{sk}^h c_{hl}^s$, присоединяет ковариантные тензоры произвольного ранга

$$c_{h_1, \ldots, h_s} = c_{h_1 k_s}^{k_1} c_{h_2 k_3}^{k_2} \ldots c_{h_s k_1}^{k_s} \qquad (1)$$

и показывает, что между этими тензорами существуют соотношения, которые обобщают известные соотношения

$$c_h c_{kl}^h = 0, \quad c_{hs} c_{kl}^s = c_{hkl} - c_{hlk}.$$

В этой заметке автор показывает, что необходимым и достаточным условием для того, чтобы группа G_r была нулевого ранга, является равенство нулю всех ковариантных тензоров

$$c_{h_1, \ldots, h_s} \ (s = 1, \ldots, r-1).$$

G. Vrănceanu

3430. Об измеримых группах G_r на плоскости. Стока (Asupra grupurilor G_r măsurabile din plan. Stoka Marius I.), Bul. ştiinţ. Acad. RPR. Sec. mat. şi fiz., 1957, 9, № 2, 341—380 (рум.; рез. русск., франц.)

Необходимые и достаточные условия измеримости группы G_r на плоскости состоят в транзитивности группы G_r и выполнении уравнения

$$C_{\alpha\beta}^l A_h^l + C_{h\alpha}^l A_\beta^l + C_{\beta h}^l A_\alpha^l = 0 \quad (h, l = 1, 2, \ldots, r),$$

где $A_h^l = \begin{vmatrix} \xi_l^1 & \xi_l^2 \\ \xi_h^1 & \xi_h^2 \end{vmatrix}$, α и β — номера строк невырожденной матрицы $\| \xi_h^1 \xi_h^2 \|$

Установлено, что транзитивные группы G_3, имеющие структурный вектор, равный нулю, измеримы; найдены условия измеримости группы G_3 с ненулевым структурным вектором; показано, какие группы G_4 измеримы и какие неизмеримы, а в случае измеримости найдены коэффициенты их инфинитезимальных преобразований.

R. Miron

3431. Об измеримых группах G_r в пространстве R_n. Стока (Asupra grupurilor G_r măsurabile dintr-un spaţiu R_n. Stoka Marius I.), Comun. Acad. RPR, 1956, 6, № 6, 745—751 (рум.; рез. русск., франц.)

Автор доказывает, что вторая группа уравнений, выражающих измеримость группы G_r, приведенных в более ранней работе (РЖМат, 1958, 1599), может быть заменена уравнениями

$$C_{vw}^l C_{l_k}^h \xi_h^a \xi_a^u \xi_j^v \xi_i^w = 0.$$

R. Miron

3432. Геометрии с фундаментальной группой и исследования Ясской школы. Майер (Geometrii cu grup fundamental şi cercetările şcolii din Iaşi. Mayer O.), Lucrările consfăt. geom. diferenţ. 1955. Timişoara Acad. RPR., 1956, 31—38 (рум.)

Краткий исторический очерк, касающийся геометрии подгрупп проективной группы. Изложены или упомянуты основные результаты, полученные в центроаффинной геометрии кривых и поверхностей в S_3 и гиперповерхностей в S_{n-1} (Майер (O. Mayer), Попа (I. Popa), Я. Дубнов и В. Скрыдлов, В. Вагнер, А. Лопшиц, А. Норден, Николеску (Al. Nicolescu)), в биаксиальной геометрии (Майер, Норден) и в аксиальной геометрии (Барбилян (D. Barbilian), Аргириаде (E. Arghiriade)).

M. Haimovici

3433. О подгруппах измеримой группы G_r. Стока (Asupra subgrupurilor unui grup G_r măsurabil. Stoka Marius I.), Comun. Acad. RPR, 1956, 6, № 3, 393—394 (рум.; рез. русск., франц.)

Автор приводит для более частных случаев результаты, полученные ранее (реф. 3431), и выводит необходи-

мое и достаточное условие измеримости подгруппы G_s измеримой группы G_r. Это условие состоит в транзитивности группы G_s. R. Miron

МЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ГЕОМЕТРИИ

3434. Компактные двумерные проективные плоскости. Зальцман (Kompakte zweidimensionale projektive Ebenen. Salzmann Helmut), Arch. Math., 1958, 9, № 6, 447—454 (нем.)

Если пространство точек топологической проективной плоскости π компактно и двумерно, соответствующая аффинная плоскость допускает сдвиги по двум различным направлениям, а каждая ее точка служит центром нетождественной гомотетии, то π дезаргова.

Л. А. Скорняков

3435. Интегральная геометрия в евклидовом пространстве E_n. Стока (Geometria integrale in uno spazio euclideo E_n. Stoka Marius I.), Boll. Unione mat. ital., 1958, 13, № 4, 470—485 (итал.; рез. англ.)

Пусть Φ_q — q-параметрическое семейство многообразий φ_p измерения p пространства E_n и T — непрерывные преобразования координат, обладающие свойством: для любого $\varphi_p \in \Phi_q$, $T\varphi_p = \varphi'_p \in \Phi_q$. Преобразования T образуют группу Ли G. Совокупность преобразований S из G, обладающих свойством $S\varphi_p = \varphi_p$ для всех $\varphi_p \in \Phi_q$ образуют инвариантную подгруппу группы G. Факторгруппа G/g называется максимальной группой инвариантности семейства Φ_q, ее подгруппы — группами инвариантно ти. Если $F^j(x^1, \ldots, x^n, a^1, \ldots, a^q) = 0$ $(j = 1, \ldots, n-p)$ уравнения семейства Φ_q, а $y^i = f^i(x^1, \ldots, x^n; a^1, \ldots, a^r)$, $(i = 1, \ldots, n)$ — преобразования группы инвариантности, то равенства

$$F^j[f^1(x, a), \ldots, f^n(x, a), a^1, \ldots, a^q] = F^j(x^1, \ldots, x^n, \beta^1, \ldots, \beta^q)$$

определяют преобразования $\beta^k = g^k(a^1, \ldots, a^q, a^1, \ldots, a^r)$, образующие группу H_r. Если группа H_r обладает с точностью до постоянного множителя единственным интегральным инвариантом $\int M(a^1, \ldots, a^q)\, da^1 \ldots da^q$, о мерой $\mu(\sigma)$ множества σ многообразий φ_p называется $\int_{\sigma_k} M(a^1, \ldots, a^q)\, da^1 \ldots da^q$, где σ_k множество точек параметрического пространства, соответствующее множеству σ. Семейство многообразий называется измеримым, если оно имеет единственную меру. Теорема: Если группа H_r, соответствующая максимальной группе инвариантности, измерима (обладает единственным интегральным инвариантом), то семейство Φ_q измеримо. Приведен также достаточный признак неизмеримости семейства Φ_q. Рассмотрены многообразия прямых, окружностей, гипербол, троек точек и ряд других на плоскости. Найдены соответствующие меры.

Примечание референта. 1. По-видимому, автору неизвестны работы Н. Г. Чеботарева (Зап. Харьковск. н.-и. ин-та матем., 1937, 14; Группы Ли, М.-Л., 1940), в которых объем группы Ли трактуется как интегральный инвариант, и работы референта (Зап. Харьковск. Матем. о-ва, 1949, 21; 1950, 22; 1952, 23), в которых содержатся некоторые результаты автора и другое определение измеримости многообразий. 2. Автор приписывает Делтейлю, а не Пуанкаре формулировку и вывод условий существования интегрального инварианта у группы Ли. Г. И. Дринфельд

3436. Гомоморфизмы топологических проективных плоскостей. Зальцман (Homomorphismen topologischer projektiver Ebenen. Salzmann Helmut), Arch. Math., 1959, 10, № 1, 51—55 (нем.)

Пусть пространства точек топологических проективных плоскостей P и P' компактны и двумерны. Тогда: 1) всякий гомоморфизм P в P' является непрерывным изоморфизмом P на P'; 2) каждая невырожденная подплоскость плоскости P всюду плотна в P; 3) всякий гомоморфизм P на упорядоченную плоскость P'' является непрерывным изоморфизмом P на P'' (топология в P'' определяется порядком). Л. А. Скорняков

3437. Гомоморфизм λ-плоскостей. Дембовский (Homomorphismen von λ-Ebenen. Dembowski Peter), Arch. Math., 1959, 10, № 1, 46—50 (нем.)

I-множество (РЖМат, 1959, 2418), содержащее четверку точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, называется λ-плоскостью, если для любых двух прямых (точек) существует в точности λ точек (прямых), инцидентных им обоим. Доказывается, что всякий гомоморфизм λ-плоскости на 1-плоскость (т. е. на проективную плоскость) с конечным числом классов эквивалентности является изоморфизмом и что для всякой λ'-плоскости G' и любого $\lambda \geqslant \lambda'$ найдется λ-плоскость, допускающая гомоморфное отображение на G'.

Л. А. Скорняков

3438. Об общем уравнении первой степени над телом. Демария (Sulle equazioni generali di primo grado in un corpo sghembo. Demaria Davide Carlo), Boll. Unione mat. ital., 1959, 14, № 1, 36—41 (итал.)

Рассматривается уравнение $\sum a_i x b_i + c = 0$, где a_i, b_i, c — элементы тела C. Считая тело конечным векторным пространством S_n над его центром Г, автор сопоставляет этому уравнению центроаффинное преобразование $T(x) = \sum a_i x b_i$ и приходит к обычным результатам о числе решений однородного уравнения и об условии единственности решения однородного уравнения. Далее, он показывает, что обратно, каждый центроаффинитет определяет некоторое преобразование вида $T(x)$, притом единственное, если ограничиться одной из следующих канонических форм для T:

1) $\sum_1^n \lambda_{rs} e_r x e_s$,

2) $\sum_1^n a_r x e_r$, где $\lambda \in \Gamma$, $a \in C$, e_r $(r = 1, \ldots, n)$ — базис C над Г. В качестве примера рассматриваются числа Кэли. В. В. Морозов

3439. Об одной теореме Л. А. Сантало. Грюнбаум (On a theorem of L. A. Santaló. Grünbaum B.), Pacif. J. Math., 1955, 5, № 3, 351—359 (англ.)

Теорема Сантало (Santaló L. A., Publ. Inst. math., Univ. nac. Litoral, 1942, 3, 202—210) состоит в следующем: Если система параллельных отрезков плоскости такова, что каждые три отрезка можно пересечь одной прямой, то и все эти отрезки можно пересечь одной прямой. В этой теореме (тесно связанной с теорией чебышевских приближений функций) можно заменить слово „три" на $m+1$ и слова „прямая линия" на „парабола m-го порядка $y = a_0 x^m + \ldots + a_m$" (ср. Rademacher H., Schoenberg I. J., Canad. J. Math., 1950, 2, 245—256). Другое обобщение теоремы Сантало дает автор, доказывающий, что если упорядоченная последовательность $S_1, S_2, \ldots, S_n$ связных точечных множеств такова, что любые i первых из них (где $i = 1, 2, \ldots, n-1$) можно отделить прямой от $n-i$ последних, то также из того, что каждые три из этих множеств можно пересечь одной прямой, вытекает, что и все множества можно пересечь одной прямой; это обобщение, по-видимому, уже не связано с известной теоремой Хелли о совокупностях выпуклых тел с общими точками, из которой легко вытекают упомянутые выше теоремы. Эта теорема переносится и на бесконечные совокупности множеств; в работе рассматриваются также некоторые следствия основной теоремы, относящиеся к системам связных множеств, каждые два из которых можно отделить одно от другого прямой фиксированного направления;

впрочем, в конце работы указано, что эти следствия, также, обобщающие теорему Сантало, были раньше опубликованы Кли (РЖМат, 1955, 6096). Доказательства всех теорем базируются на весьма наглядных геометрических рассмотрениях. И. М. Яглом

3440. Разбиение пространственных точечных множеств на сумму подмножеств с меньшим диаметром. Хеппеш (Terbeli ponthalmazok felosztasa kisebb átmérőjű részhalmazok összegére. Heppes Aladár), Magyar tud akad. Mat. és fiz. tud. oszt. közl., 1957, 7, № 3-4, 413—416 (венг.)

Дается более простое доказательство следующей гипотезы Борсука (Borsuk K., Fundam. math., 1933, 20, 177—190) для трехмерного пространства, доказанной ранее (РЖМат, 1956, 2847): любое точечное множество с диаметром единица в трехмерном пространстве можно разбить на четыре подмножества с меньшим диаметром. А. А. Бовди

3441. Доказательство предположения Борсука для размерности 3. Грюнбаум (A proof of Borsuk's conjecture in 3 dimensions. Grünbaum B.), Bull. Res. Council Israel, 1957, F7, № 1, 42—43 (англ.)

Автор сообщает, что им доказано: множество диаметра 1 в 3-мерном евклидовом пространстве можно представить в виде объединения трех множеств диаметром менее чем 0,99. Излагается идея доказательства. (Borsuk, Fundam. math., 1933, 20, 177; РЖМат, 1956, 2847). В. В. Морозов

ВЫПУКЛЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

3442. Об одном свойстве n-мерного аффинного пространства, связанном с теоремой Хелли. Проскуряков И. В., Успехи матем. наук, 1959, 14, № 1, 219—222

Устанавливается, что любую систему из $n+2$ точек n-мерного аффинного пространства R_n можно разбить на две непустые подсистемы без общих точек, выпуклые замыкания которых имеют общую точку. Отсюда выводится известная теорема Хелли о пересечении выпуклых тел (Хелли Э., Успехи матем. наук, 1956, 2). Для единственности вышеуказанного разбиения необходимо и достаточно, чтобы никакие $k+1$ данных точек ($k=1,2,\ldots,n$) не лежали бы в (k—1)-мерной плоскости. Л. А. Скорняков

3443. Свойство плоской выпуклой области. Бреннан (A property of a plane convex region. Brennan J. G.), Math. Gaz., 1958, 42, № 342, 301—302 (англ.)

Доказывается, что если D — плоская выпуклая фигура, граница которой состоит из конечного числа спрягаемых кривых, то существует по крайней мере одну прямая, одновременно делящая пополам границу и площадь области. А. Г. Школьник

3444. Об изгибании желобов. Рембс (Über die Verbiegbarkeit der Rinnen. Rembs Eduard), Math. Z., 1959, 71, № 1, 89—93 (нем.)

Автор определяет желоб как поверхность F, содержащую плоскую кривую K, лежащую в плоскости E, которой поверхность F касается вдоль линии K, находясь по одну сторону от E. Если K выпукла (замкнута), то желоб F называется выпуклым (замкнутым). Части желоба, лежащие по одну сторону от K, называются полужелобами. При изгибании желобов требуется трехкратная дифференцируемость изометричной поверхности. Доказываются следующие теоремы:

Теорема 1. Два аналитических изометричных желоба конгруэнтны (или зеркально симметричны). То же самое справедливо для полужелобов.

Теорема 2. Аналитический желоб не может быть согнут в другой желоб. Рассматривая изгибание желоба в нежелоб, т. е. в поверхность с параболической кривой, вдоль которой касательная плоскость к поверхности непостоянна, автор получает следующие результаты:

Теорема 3. Желоб не допускает непрерывного изгибания.

Теорема 4. В малом для каждого желоба имеется изометрический нежелоб (т. е. в малом возможно дискретное изгибание).

Теорема 5. Поверхность, содержащая плоскую и замкнутую параболическую кривую и изометричная желобу, конгруэнтна последнему. Н. Н. Яненко

3445. Строго выпуклые дуги и кривые в синтетической геометрии бесконечно малых. Хаупт (Strengkonvexe Bogen und Kurven in der direkten Infinitesimalgeometrie. Haupt Otto), Arch. Math., 1958, 9, № 1-2, 110—116 (нем.)

Для строго выпуклых дуг и замкнутых кривых B' в проективном пространстве R_n изучается связь между числом пересечений кривой B' с гиперплоскостями и числом особенностей у семейства соприкасающихся гиперплоскостей P вдоль B' (Кривая называется строго выпуклой, если на ней нет лежащих в R_{n-1} участков и каждому набору из $n-1$ точек B' можно сопоставить $(n-1)$-мерную гиперплоскость, проходящую только через эти точки кривой, причем выбранные гиперплоскости будут непрерывно зависеть от этих точек). Без доказательств формулируются следующие результаты, которые обобщают и дополняют результаты Барнера (РЖМат, 1960, 2294) относившиеся только к n раз дифференцируемым и притом замкнутым кривым. Если B' имеет k общих точек q с гиперплоскостью, то на B' есть не менее чем k точек стационарности P, когда B' — замкнутая кривая, и не менее чем $k-n$ таких точек, если B' — дуга. В тех же условиях через каждую точку пересечения q проходит не менее чем k плоскостей P (включая соприкасающуюся плоскость P_q в точке q), когда B' — замкнутая кривая, и не менее чем $k-n$ таких плоскостей (исключая P_q), если B' — дуга. Замкнутая кривая B' имеет максимум $n+1$ пересечение с гиперплоскостью в том и только том случае, когда на B' есть ровно $n+1$ точка стационарности плоскостей P.

В заключение делается много замечаний по вопросам связи регулярности кривой с особенностями ее пересечений с гиперплоскостями. Подчеркивается, что все результаты получены геометрическим рассмотрением бесконечно малых. В. А. Залгаллер

3446. Изгибание поверхностей в малом и в целом. Рембс, Гротемейер (Deformabilità delle superficie in granda e in piccolo. Rembs E., Grotemeyer K. P.), Rend. mat. e applic., 1958, 17, № 3-4, 262—304 (итал.)

Статья представляет собой сжатое изложение книги Н. В. Ефимова „Изгибание в целом поверхностей" (РЖМат, 1959, 4205 К), состоящей из двух частей: перевода статьи Н. В. Ефимова „Качественные вопросы теории деформации поверхностей "(Успехи матем. наук, 1948, 3, 2 (24)) и приложения, принадлежащего авторам. Кроме того, излагаются некоторые результаты, не содержащиеся в этой книге.

Статья состоит из введения и пяти глав. В введении излагаются вопросы, связанные с параметризацией поверхности, требованием гладкости, даются основные определения непрерывной деформации, б. м. изгибания, жесткости и т. д. Гл. 1 посвящена б. м. изгибаниям поверхности. Здесь выводятся в тензорном виде дифференциальные уравнения для компонент векторов смещения и вращения в местном репере. Если обозначить через x — радиус-вектор поверхности, ξ — нормаль к поверхности, z — вектор смещения, y — вектор скорости вращения и положить

$$a_i=(zx_i),\quad c=(z\cdot\xi),\quad x_i=\frac{\partial x}{\partial u_i},\quad i=1,2, \qquad (1)$$

$$y_i = \frac{\partial y}{\partial u_i} = a_i^j x_j \qquad (2)$$

(u_1, u_2 — параметры поверхности), то получаем основные уравнения б. м. изгибания:

$$a_{i,k} + a_{k,i} = 2B_{ik} \cdot C, \qquad (3)$$

$$\varepsilon^{ie} a^k_{i,e} = 0, \quad \varepsilon^{ie} a_i^k B_{ke} = 0, \qquad (4)$$

где $a_{i,k}$ — ковариантная производная a_i, ε^{ie} — тензор Леви-Чевита, B_{ke} — второй фундаментальный тензор поверхности. Основной метод исследования заключается в получении различных дифференциальных следствий из (3), (4), имеющих дивергентную форму и в дальнейшем получении интегральных формул (Рембс, Бляшке, Гротемейер). На основании этих интегральных формул выводятся различные критерии жесткости выпуклых поверхностей, в частности, шапочек. Авторы указывают также на другой метод, состоящий в приведении уравнений (3), (4) к обобщенным уравнениям Коши—Римана с последующим применением теорем существования Векуа и Хаака. Рассматриваются также результаты, относящиеся к б. м. изгибанию поверхностей вращения (Рембс) и цилиндроидов (Ефимов, Ильин).

В гл. 2 рассматриваются б. м. изгибания высшего порядка и аналитические — в основном результаты Ефимова, относящиеся к б. м. изгибаниям 2-го и высшего порядка, и Позняка (линейчатые желоба).

Гл. 3 посвящена однозначной определенности поверхностей их линейным элементам. Здесь излагаются основные идеи доказательств однозначной определенности овалоидов по Кон—Фоссену и Герглотцу, а также однозначной определенности шапочек (результаты Оловянишникова, Погорелова, Гротемейера).

В гл. 4 излагаются основные идеи доказательства существования выпуклой поверхности с заданной метрикой, принадлежащие Леви и А. Д. Александрову.

В гл. 5 рассматриваются изгибания поверхностей, содержащих точки уплощения. Приводятся результаты Шильта, Ефимова и Тартаковского. Н. Н. Яненко

3447. О выпуклой оболочке точечных множеств с симметрическими свойствами. Фенхель (On the convex hull of point sets with symmetry properties. Fenchel W.), Rend. mat. e applic., 1955, **14**, № 3, 355—358 (англ.)

Пусть Γ есть группа ортогональных преобразований евклидова n-мерного пространства E^n. Множество всех точек, неподвижных относительно преобразования Γ, есть в таком случае линейное f-мерное подпространство F в E^n. Рассмотрим некоторое множество M в E^n такое, что его элементы неподвижны относительно Γ. Показано, что любая точка из F, принадлежащая выпуклой оболочке множества M, лежит на выпуклой оболочке орбиты $(f+1)$ или меньшего числа точек из M относительно Γ. Для подмножества M, принадлежащего подпространству F, этот результат совпадает с хорошо известным классическим утверждением, так как орбита любой точки из F совпадает с самой этой точкой. W. Gustin

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 2, 185.

3448. Геометрия «в целом». Ефимов Н. В. В сб.: Матем. в СССР за 40 лет. 1917—1957. Т. I. М., Физматгиз, 1959, 925—952

3449. О вершинах пространственных дуг. Гринспан (On vertices of space arcs. Greenspan Donald), Ann. mat. pura ed appl., 1957, **44**, 45—72 (англ.)

Исследуются нерегулярные кривые в E^n на основе рассмотрения их пересечений с гиперсферами K^{n-1}. В соответствии с аппаратом изучаются только „основные" дуги B, обладающие следующими свойствами: 1) любые n точек дуги B находятся в общем расположении; 2) любой гиперкруг K^{n-2} пересекает B не более чем в $n+1$ точке; 3) число точек пересечения $B_1 K^{n-1}$ ограничено общим числом для всех K^{n-1}; максимум точек B K^{n-1} называется сферическим порядком $KOV(B)$ дуги B; 4) если из следующих друг за другом на B точек $P_1, P_2, \ldots, P_{n+2}$ K^{n-1} выделены две точки P_i, P_{i+1}, между которыми K^{n-1} не пересекает B, то точки P_i, P_{i+1} лежат по одну сторону от гиперкруга, определяемого остальными точками P_j.

Сферическим порядком точки $A \in B$ называется предел значений KOV для стягивающихся к A ее окрестностей на B. Если $KOV(A) \geqslant n+2$, то A называется вершиной дуги.

Основная из доказанных теорем:

Если K^{n-1} пересекает B в точках $P_1, \ldots, P_{n+2}$, то на участке $P_1 P_{n+2}$ есть хотя бы одна вершина дуги B.

Ю. Д. Бураго

См. также: 2625К, 3011, 3146, 3168.

ЧИСЛЕННЫЕ И ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

Редактор *В. К. Саульев*

3450. Об ошибке усечения, возникающей при использовании конечных разностей для оператора Лапласа. Огура (On the truncation error which arises from the use of finite differences in the Laplacian operator. Ogura Yoshimitsu). J. Meteorol., 1958, **15**, № 5, 475—480 (англ.)

Находятся значения параметров α, β, γ и δ, при которых 13-точечный разностный оператор

$$\frac{1}{h^2}\{\alpha\varphi(x,y) + \beta[\varphi(x-h,y) + \varphi(x+h,y) + \varphi(x,y-h) + \varphi(x,y+h)] + \gamma[\varphi(x+h,y+h) + \varphi(x-h,y+h) + \varphi(x-h,y-h) + \varphi(x+h,y-h)] + \delta[\varphi(x+2h,y) + \varphi(x,y+2h) + \varphi(x-2h,y) + \varphi(x,y-2h)]\}, \qquad (1)$$

где h — шаг квадратной сетки, аппроксимирует оператор Лапласа с максимально возможной точностью. Такими значениями являются, в частности, следующие: $\alpha = -6{,}2360$, $\beta = 2{,}1573$, $\gamma = -0{,}6180$, $\delta = 0{,}0197$ или $\alpha = -1{,}7640$, $\beta = -0{,}8240$, $\gamma = 1{,}6180$, $\delta = -0{,}3530$.

Показывается, что хотя разностный оператор (1) точнее обычного пятиточечного разностного аналога оператора Лапласа, он более чувствителен по отношению к несистематическим ошибкам (например, ошибкам округления). В. К. Саульев

3451. Численный анализ и задача Дирихле. Гринспан (Numerical analysis and the Dirichlet problem. Greenspan Donald), Math. Mag., 1959, **32**, № 4, 177—188 (англ.)

На примере задачи Дирихле популярно излагается метод сеток. Приведено элементарное доказательство единственности решения системы разностных уравнений, а также выводится по способу Гершгорина оценка погрешности метода сеток. В заключение рассматриваются некоторые обобщения (неравномерные и треугольные сетки, переменные коэффициенты, девятиточечные раз-

ностные уравнения, уравнение Стокса, многомерный случай). Библ. 74 назв. В. К. Саульев

3452. **Оценка погрешности метода прямых для уравнения теплопроводности. Фридман** (The truncation error in a semi-discrete analog of the heat equation. Friedmann Norman E.), J. Math. and Phys., 1956, **35**, № 3, 299—308 (англ.)

Дается оценка погрешности метода прямых для следующей смешанной задачи в области

$$D=[0\leqslant x\leqslant l]\times[0\leqslant t<\infty]:$$

$$\mu_{xx}=\frac{1}{\alpha}\mu_t,\ \mu(0,t)=F=\text{const},$$

$$\mu(l,t)=0,\quad \mu(x,0)=0. \qquad (1)$$

Эта задача заменяется следующей задачей для системы дифференциальных уравнений (метод прямых):

$$\nabla_h^2\mu_h=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\mu_h}{\partial t},\ \mu_0(t)=F,\ \mu_N(t)=0,\ \mu_h(0)=0, \qquad (2)$$

где $h=\frac{l}{N}$.

Так как решение задачи (1) можно получить в виде ряда Фурье, а решение задачи (2) — в виде конечной суммы, аналогичной частичной сумме ряда Фурье, то автор для оценки величины $|\mu-\mu_h|$ оценивает разности соответствующих слагаемых в этих выражениях, а также остаток ряда Фурье.

Автор доказывает ряд лемм для величин, встречающихся в выражениях для μ и μ_h.

Так, если

$$\gamma_k(k,y)=\frac{1}{k}y\operatorname{ctg}y,\quad v(t,y)=$$

$$=\exp-\beta^2\pi^2k^2\left(\frac{\sin y}{y}\right)^2,\quad \beta=\frac{\alpha t}{l^2},$$

то при $1\leqslant k\leqslant N$, $\beta>0$, $a>0$,

$$\gamma_k(k,0)-\gamma_k\left(k,\frac{k\pi}{2N}\right)\leqslant kN^{-2},$$

$$\left|v\left(t,\frac{k\pi}{2N}\right)-v(t,0)\right|\leqslant 8\beta^2k^3N^{-1}\exp-4\beta^2k^2,$$

$$\left|\gamma_k\left(k,\frac{k\pi}{2N}\right)\right|\leqslant\frac{2}{k}\left(1-\frac{k^2}{N^2}\right),$$

$$\sum_{k=1}^{M}k\exp-ak^2\leqslant\frac{1}{2a}\left[\sqrt{\pi a}\operatorname{erf}M\sqrt{a}+\right.$$

$$\left.+(1-\exp-aM^2)\right].$$

Используя эти неравенства, автор получает следующую оценку погрешности:

$$\frac{\pi}{F}|\mu-\mu_h|\leqslant\frac{1}{(\pi A)^2}\left[\pi^{3/2}\frac{A}{N}\operatorname{erf}\pi A+(1-\exp-\pi^2A^2)\right]+$$

$$+\frac{\sqrt{\pi}}{A}\left(1-\frac{3}{8A^2}\right)\operatorname{erf}2B+$$

$$+\left[4\frac{B}{A}\left(\frac{M^2}{N^2}-1\right)+\frac{3}{2}\frac{B}{A^3}\right]\exp-4B^2+$$

$$+\frac{8}{N}\left[(1+2A^2)-\sqrt{1+4A^4}\right]\times$$

$$\times\left[1-\frac{1}{4A^2}\left\{(1+2A^2)-\sqrt{1+4A^4}\right\}\right]\times$$

$$\times\exp-\left[(1+2A^2)-\sqrt{1+4A^4}\right]+\pi\exp-\pi^2A^2\left(1+\frac{1}{N}\right)^2, \qquad (3)$$

где $A=\beta N$, $B=\beta M$, $M=N+1$.

Оценка (3) величины $(\mu-\mu_h)$ является функцией t, стремящейся к нулю при $t\to\infty$. При больших A асимптотическое поведение погрешности имеет вид

$$\frac{1}{F}|\mu-\mu_h|\leqslant\frac{8}{\pi eN},$$

а при $\beta\to 0$

$$|\mu-\mu_h|\leqslant\frac{F}{\pi}\left(1+\pi+\frac{2}{N}\right).$$

В. И. Лебедев

3453. **О разностных схемах для уравнений с разрывными коэффициентами. Тихонов А. Н., Самарский А. А.**, Докл. АН СССР, 1956, **108**, № 3, 393—396

3454. **О приближенном решении граничных задач для уравнений эллиптического типа методом приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Власова З. А.**, Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. 4. М., АН СССР, 1959, 93—94

3455. **Программирование одной новой краевой задачи для разностного уравнения параболического типа. Ющенко Е. Л., Нижник Л. П.**, Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. 4. М., АН СССР, 1959, 101

3456. **Конечноразностные методы решения задачи Гурса. Ярышева И. М.**, Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1959, **53**, 342—358

Для решения задачи Гурса

$$\frac{\partial^2U}{\partial x\partial t}=f(x,t,U),$$

$$U(0,t)=U(x,0)=0 \qquad (1)$$

предлагаются несколько явных и неявных разностных уравнений вида

$$u_{i+1,j+1}=u_{i+1,j}+u_{i,j+1}-u_{i,j}+$$

$$+hk\sum_{\mu,\nu=0}^{m,n}a_{\mu,\nu}f_{i+1-\mu,j+1-\nu}, \qquad (2)$$

где $u_{i,j}=u(ih,jk)$. В случае неявного разностного уравнения (2) для сходимости метода итераций приводится следующее достаточное условие

$$hk<\frac{1}{|a_{0,0}|L},$$

где L — постоянная Липшица по третьему аргументу функции $f(x,t,U)$.

Для случая, когда функция f линейно зависит от $U(f=cU+\varphi)$, выводится достаточное условие для устойчивости уравнения (2):

$$|c(x,t)|\leqslant L,\quad\sum_{\mu,\nu=0}^{m,n}|a_{\mu,\nu}|\leqslant M,\quad hk<q<\frac{1}{LM}.$$

При этом уравнение (2) считается устойчивым, если существует такая константа Q, не зависящая от h, k, i и j, что

$$\|\delta\|\leqslant Q(\|\delta^*\|+\|\rho^*\|),$$

где δ — разность между точным и численным решениями уравнения (2), а δ^* и ρ^* — соответственно величина погрешности в начальных значениях и величина, пропорциональная погрешности округления.

Доказывается также сходимость решения уравнения (2) к решению уравнения (1) при условии, если уравнение (2) является устойчивым и аппроксимирует уравнение (1). Отмечается, что рассмотренные выше результаты

справедливы и для более общего гиперболического уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(aU) + \frac{\partial}{\partial t}(bU) + cU + \varphi.$$

В. К. Саульев

3457. Устойчивость и сходимость при численном решении задачи Гурса. Деймс (Stability and convergence for a numerical solution of the Goursat problem. Dames Ralph T.), J. Math. and Phys., 1959, 38, № 1, 42—67 (англ.)

Рассматривается задача

$$L(u) \equiv u_{xy} + A(x, y)u_x + B(x, y)u_y + C(x, y)u = s(x, y), \quad (1)$$
$$(0 < x \leqslant X,\ 0 < y \leqslant Y)$$
$$u(x, +0) = f(x), \quad (0 \leqslant x \leqslant X),$$
$$u(+0, y) = g(y), \quad (0 \leqslant y \leqslant Y), \quad (2)$$
$$f(0) = g(0),$$

где u, s, f и g — векторы с p компонентами, а A, B и C — матрицы порядка p^2. Предполагается, что A, B и C в области $D = (0 \leqslant x \leqslant X,\ 0 \leqslant y \leqslant Y)$ непрерывны и A_x, s, f и g ограничены.

На сетке $\sum_{h,k}$, состоящей из точек с координатами $(x_m, y_n) = (mh, nk)$, где $Mh = X$, $Nk = Y$ и $k = \lambda h$, производные u_x, u_y и u_{xy} в уравнении (1) заменяются конечно-разностными аппроксимациями u_X, u_Y и u_{XY}, удовлетворяющими следующим условиям:

1) $u_X \to u_x$, $u_Y \to u_y$, $u_{XY} \to u_{xy}$ при $h \to 0$.

2) $|u_X| \leqslant l/h$, $|u_Y| \leqslant l/h$, $|u_{XY}| \leqslant l/h^2$, (3)

где l — постоянная, не зависящая от h. В результате получается система линейных алгебраических уравнений

$$L_h(u) = u_{XY} + Au_X + Bu_Y + Cu = s$$
$$(x, y) \in \sum{}'_{h,k}, \quad (4)$$
$$u(x, 0; h) = f(x), \quad u(0, y; h) = g(h),$$

которая символически записывается в виде

$$L[f, g, s; h] = u(x, y, h).$$

Даются следующие определения устойчивости и сходимости. Система (4) называется устойчивой, если для всех достаточно малых h ($k = \lambda h$) существуют такие постоянные T и $\alpha \geqslant 0$, не зависящие от h, что

$$\|L[f, g, s; h]\| \leqslant T\left\{\frac{\max(\|f\|, \|g\|)}{h^\alpha} + \|s\|\right\}.$$

Если $\alpha = 0$, то система (4) называется строго устойчивой. Система (4) называется сходящейся, если для всех достаточно малых h существует такая постоянная T, не зависящая от h, что

$$\|L[0, 0, s; h]\| \leqslant T\|s\|. \quad (5)$$

Если решение $u(x, y)$ задачи (1), (2) существует и обладает ограниченными в D производными достаточно высокого порядка, то определение (5) включает обычное определение сходимости

$$\lim_{h \to 0} \|u(x, y; h) - u(x, y)\| = 0 \quad (6)$$

В вышеприведенных определениях норма определяется согласно равенства

$$\|\varphi\| = \max_{(x, y) \in \sum_{h,k}} \max_{1 \leqslant i \leqslant p} |\varphi^i|.$$

Доказываются следующие теоремы: 1) Каждая устойчивая система (4) сходится (это очевидный факт) и каждая сходящаяся система (4) при условии (3), устойчивая. 2) Если элементы матриц A, B, C и A_X равномерно ограничены в D, то система (3) является и устойчивой и сходящейся. 3) Если решение u задачи (1), (2) обладает равномерно ограниченным в D производными u_{xx}, u_{yy}, u_{xxx}, u_{xyy} и u_{xxy}, то устойчивая система (4) сходится в смысле определения (6).

Эти результаты устанавливаются для случая, когда начальные значения заданы не на характеристиках, а на произвольной кривой (задача Коши) и обобщаются на случай задачи Гурса для квазилинейного уравнения

$$u_{xy} + A(x, y, u)u_x + B(x, y, u)u_y = s(x, y, u)$$

и краевыми условиями (6). В. К. Саульев

3458. Метод сеток для приближенного решения одной краевой задачи из теории колебаний. Харитоненко П. И., Сб. научн. тр. Белорусск. политехн. ин-та, 1957 (1958), вып. 60, 48—55

Уравнение

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial t^2}, \quad \alpha > 0,$$

аппроксимируется на квадратной сетке с шагом h следующим сеточным уравнением:

$$-\alpha_1 u_{i-1,\,k+1} + (1 + 2\alpha_1)u_{i,\,k+1} - \alpha_1 u_{i+1,\,k+1} +$$
$$+ (-1 + 2\alpha_1)u_{i-1,\,k} - 4\alpha_1 u_{i,\,k} + (-1 + 2\alpha_1) \times \quad (1)$$
$$\times u_{i+1,\,k} - \alpha_1 u_{i-1,\,k-1} + (1 + 2\alpha_1)u_{i,\,k-1} -$$
$$-\alpha_1 u_{i+1,\,k-1} = 0,$$

где

$$u_{i,\,k} = u(ih, kh), \quad \alpha_1 = \alpha/h^2.$$

Доказывается 1) единственность решения системы сеточных уравнений (1) (с соответствующими начальным и граничным условиями), 2) устойчивость уравнений (1) и 3) сходимость рассматриваемого метода сеток.

В. К. Саульев

3459. Расчет массивов на действие собственного веса. Варвак П. М. (Розрахунок масивів на дію власної ваги. Варвак П. М.), Доповіді АН УРСР, 1959, № 2, 130—132 (укр.; рез. русск., англ.)

Методом конечных разностей решена задача о нахождении деформаций и напряжений в кубе, защемленном по четырем боковым граням и находящемся под действием собственного веса. Резюме автора

3460. Приводимые системы разностных уравнений и устойчивость их решений. Коваль П. И., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. 4. М., АН СССР, 1959, 96—97

3461. О численном решении бигармонической проблемы на полуполосе. Бабушка И., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. 4. М., АН СССР, 1959, 237—238

3462. О некоторых методах решения больших систем разностных уравнений теорий упругости при помощи матричных преобразований. Литвинов Н. В., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. 4. М., АН СССР, 1959, 98

3463. Некоторые формулы аппарата Фредгольма и их применение к вопросу об оценке ошибки приближенных методов решения интегральных уравнений. Мысовских И. П., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. 4. М., АН СССР, 1959, 34—35

3464. Численный метод последовательных приближений для исследования конечных перемещений гибких упругих стержней при сложной нагрузке. Колесников Л. А., Инженерный сб., 1958, 26, 228—235

Приведен пример решения простейшим итерационным методом (методом Пикара) интегро-дифференциального уравнения типа

$$EI\frac{d\theta}{ds} = M\left[s, \theta, x, y, \int q(x, y)\varphi(x, y)\,ds, P, m\right],$$

где

$$\frac{dx}{ds} = \sin\theta(s), \quad \frac{dy}{ds} = \cos\theta(s),$$

соответствующего задаче об изгибе гибкого упругого стержня, защемленного на одном конце.

Относительно сходимости и оценки погрешности метода высказываются несколько общих строго необоснованных соображений. В. К. Саульев

3465. К вопросу о разрешимости задачи Чаплыгина для уравнений в конечных разностях. Тептин А. Л., Уч. зап. Удмуртск. гос. пед. ин-та, 1958, вып. 12, 50—52

Приведены некоторые условия неотрицательности решения уравнения

$$V(x+nh)=\sum_{k=0}^{n-1}P_k(x)\,V(x+kh)+F(x)$$

$$(F(x)\geqslant 0),\quad V(x_0+kh)=0,\quad k=0,\ldots,n-1. \qquad (1)$$

Например, если решение уравнения

$$V(x+nh)=\sum_{k=0}^{n-1}p_k(x)\,V(x+kh)+F(x),$$

$$V(x_0+kh)=0,\quad k=0,\ldots,n-1$$

неотрицательно и

$$p_k\leqslant P_k\quad (k=0,\ldots,n-1),$$

то и решение уравнения (1) тоже неотрицательно.

Н. В. Азбелев, З. Б. Цалюк

3466. Численное определение коэффициента круговой энергии явления диффракции. Лансро, Буавен (Numerical determination of the factor of encircled energy relative to a diffraction pattern of revolution. Lansraux Guy, Boivin Germain), Canad. J. Phys., 1958, **36**, № 12, 1696—1709 (англ.)

Интегралы типа

$$E(W)=4\pi N\int_{s=0}^{s=1}\int_{t=0}^{t=s}T(s)\,T(t)\cos[\Psi(s)-\Psi(t)]\times$$
$$\times D(Ws,\ Wt)\,ds\,dt$$

приближенно вычисляются при помощи квадратурной формулы Котеса. В. К. Саульев

3467. Улучшенная формула трапеций, использующая значения функции внутри области интегрирования. Вулф (An adjusted trapezoidal rule using function values within the range of integration. Wolfe J. M.), Amer. Math. Monthly, 1959, **66**, № 2, 125—127 (англ.)

Для непрерывной функции y, у которой y'' не меняет знака в области $a\leqslant x\leqslant b$, автор предлагает следующую модификацию:

$$\int_a^b y\,dx\approx h\left[\frac{1}{4}\,(y_0+y_{1/4}+y_{n-1/4}+y_n)+\right.$$
$$\left.+y_1+\ldots+y_{n-1}\right] \qquad (1)$$

обычной формулы трапеций

$$\int_a^b y\,dx\approx h\left(\frac{1}{2}\,y_0+y_1+\ldots+y_{n-1}+\frac{1}{2}\,y_n\right), \qquad (2)$$

где $y_{1/4}$ есть ордината в точке $x=a+\frac{h}{4}$.

При вычислении интеграла $\int_1^s \ln x\,dx$ с $h=0{,}5$ по формуле (1) погрешность оказалась равной 0,0050, а по формуле (2) — 0,0165. В. К. Саульев

3468. Экспоненциальный интеграл $\int_1^\infty e^{-xt}t^{-n}dt$ для больших значений n. Гаучи (Exponential integral $\int_1^\infty e^{-xt}t^{-n}dt$ for large values of n. Gautschi Walter), J. Res. Nat. Bur. Standards, 1959, **62**, № 3, 123—125 (англ.)

Доказываются соотношения

$$\int_1^\infty e^{-xt}t^{-n}\,dt=\frac{e^{-x}}{x+n}\left[\sum_{\varkappa=0}^{k-1}H_\varkappa\left(\frac{x}{n}\right)n^{-\varkappa}+\right.$$
$$\left.+R_k(x,\ n)\right], \qquad (1)$$

$$\alpha_k n^{-k}\leqslant R_k(x,\ n)\leqslant\beta_k\left(1+\frac{1}{x+n-1}\right)n^{-k},$$

где

$$H_k(u)=\frac{h_k(u)}{(1+u)^{2k}},$$

полиномы $h_k(u)$ определяются по рекуррентной формуле $h_{k+1}(u)=(1-2ku)\,h_k(u)+u(1+u)\,h_k'(u)$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ldots)$, $h_0(u)=1$, α_k и β_k — нижняя и верхняя границы соответственно для $H_k(u)$ в интервале $u\geqslant 0$: $\alpha_k\leqslant H_k(u)\leqslant\beta_k$. При помощи соотношения (1) удобно находить численные значения экспоненциального интеграла для больших значений n и произвольных положительных значений x. В. К. Саульев

3469. О некоторых теоретико-числовых методах приближенного вычисления кратных интегралов. Коробов Н. М., Успехи матем. наук. 1959, **14**, № 2, 227—230

3470. Решение систем линейных уравнений (Solving linear simultaneous equations), Electron. and Radio Engr, 1959, **36**, № 1, 24—27 (англ.)

На числовом примере системы 4-го порядка подробно описывается эскалаторный метод. В. Н. Фаддеева

3471. Замечания к методу итераций Бодевига для решения систем линейных уравнений. Анзорге (Bemerkungen zu einem Iterationsverfahren von Bodewig zur Auflösung linearer Gleichungssysteme. Ansorge R.), Z. angew. Math. und Mech., 1959, **39**, № 3-4, 165 (нем.)

Метод итераций Бодевига для решения системы линейных уравнений с n неизвестными

$$Ax=y,\qquad \det A\neq 0,$$

основывается на разложении матрицы $(D_aA)^{-1}$, где $D_a=(\delta_{ik}a_{ik})$, в степенной ряд. Сначала переходят к системе вида

$$D_a^{-1}Ax=D_a^{-1}y=w,$$

затем выделяют в $D_a^{-1}A$ элементы, стоящие на главной диагонали, т. е. полагают $D_a^{-1}A=E-G$ и разлагают $(E-G)^{-1}$ в ряд Нёймана.

Приводится доказательство того, что метод Бодевига при $x^{(0)}=w$ идентичен простейшему итерационному методу

$$x^{(\nu)}=-D_a^{-1}(A-D_a)\,x^{(\nu-1)}+D_a^{-1}y=Gx^{(\nu-1)}+w,$$

для сходимости которого также необходимо и достаточно, чтобы собственные числа $G=-D_a^{-1}(A-D_a)$ лежали внутри круга сходимости.

Подсчитано, что для вычисления этими методами вектора $x^{(\nu)}$, необходимо произвести $n^2+\nu n(n-1)$ умножений и $\nu n(n-1)$ сложений. Соотношение $x^{(2^{m+1})}=x^{(2^m-1)}+G^{2^m}x^{(2^m-1)}$, полученное на основании метода Бодевига, позволяет не вычислять $x^{(\nu)}$ для $\nu\neq 2^m-1$, так как, исходя из $x^{(1)}=w+Gw$, можно найти векторы $x^{(3)}$, $x^{(7)}$, ..., $x^{(2^{m+1}-1)}$ (путем подсчета матриц G^2, G^4, ...). Следовательно, при $m(2n-1)<4(2^m-1)$ общее число вычислительных операций сокращается.

И. Ф. Шелихова

3472. Применение теории матриц к расчету статически неопределимых стержневых систем в упруго-пластической стадии. Рожа, Ташши (Rózsa Pál, Tassi Géza), Magyar tud. akad. Mat. kutató int. közl., 1958, **3**, № 1-2, 43—62 (русск.; рез. франц., венг.)

Разработан метод расчета для случая сооружений, состоящих из изгибаемых стержней. Проблема приводится к линейной системе уравнений, ранг матрицы которой на единицу меньше, чем ее порядок. Параметр разрушающей нагрузки определяется на основе совместности системы уравнений решением задачи нахождения минимума. Из резюме авторов

3473. Численное решение совместной бесконечной системы линейных уравнений. Нобл (The numerical solution of an infinite set of linear simultaneous equations. Noble B.), Quart. Appl. Math., 1959, **17**, № 1, 98—102 (англ.)

Для численного решения бесконечной системы

$$\sum_{s=1}^{\infty} a_{rs}x_s = b_r \quad (r = 1, 2, \ldots) \qquad (1)$$

обычно выбирают какое-то произвольное значение n и берут первые n уравнений с n неизвестными (остальные неизвестные полагают при этом равными нулю); решив полученную конечную систему, получают приближенное значение соответствующих неизвестных. Основными недостатками этого метода являются отсутствие оценки погрешности полученных значений и неопределенность в выборе значения n. Автор предлагает применить для решения системы (1) метод Холесского—Краута (см., например, РЖМат, 1957, 2702К) и показывает, что это дает возможность в едином процессе находить решения последовательности конечных систем, получающихся из системы (1) при $n = 1, 2, 3 \ldots$. Тем самым для любого неизвестного x_i появляется последовательность приближенных значений $x_i^{(n)}$ $(n = i, i+1, i+2, \ldots)$, что дает возможность определить значение этого неизвестного с требуемой точностью. Даются указания по определению границ искомых значений в случае медленной сходимости процесса, приводятся числовые примеры. В. Л. Загускин

3474. Применение теории матриц в уравнительных вычислениях. Сарка (A matrixszámítás alkalmazása a kiegyenlítőszámításban. Szarka Zoltán), Geod. és kartogr., 1958, **10**, № 4, 279—282 (венг.)

3475. Об обращении матриц. Оикэ Йодзо, Добоку гидзюцу, 1958, **13**, № 8, 7—11 (японск.)

3476. О методе итераций Шульца для определения обратной матрицы. Анзорге (Über ein Iterationsverfahren von G. Schulz zur Ermittlung der Reziproken einer Matrix. Ansorge R.), Z. angew. Math. und Mech., 1959, **39**, № 3-4, 164—165 (нем.)

Выводятся простые соотношения для оценки погрешности при вычислении обратной матрицы методом итераций Шульца. Если $R^{(\nu)}$ — приближенное значение $R = A^{-1}$, то согласно итеративному методу Шульца

$$R^{(\nu)} = R^{(\nu-1)}(2E - AR^{(\nu-1)}).$$

Отсюда после несложных преобразований автор получает следующее равенство: $AF^{(\nu)} = (AF^{(0)})^2$, где $F^{(\nu)} = R - R^{(\nu)}$ — матрица ошибки и $A = (a_{ik})$.

Дается вывод формулы оценки ошибки типа

$$\operatorname{Max}_i \left\{ \left| x_i - x_i^{(\nu)} \right| \right\} \leqslant \frac{G_\nu}{1 - G_\nu} \operatorname{Max}_i \left\{ \left| x_i^{(\nu)} - x_i^{\nu-1} \right| \right\}.$$

Отмечается, что благодаря квадратичной сходимости указанного метода удается получать хорошие результаты после относительно небольшой вычислительной работы, особенно для случая симметричной матрицы A.

И. Ф. Шелихова

3477. Определение наименьшего характеристического числа матрицы, элементы которой — полиномы параметра λ. Деркачев А. А., Тр. Новочерк. политехн. ин-та, 1958, **57/71**, 19—25

Для системы уравнений вида

$$X = (\lambda A_1 + \lambda^2 A_2 + \cdots \lambda^m A_m) X + Y, \qquad (1)$$

где X — вектор в n-мерном пространстве, $A_1, \ldots, A_m$ — квадратные матрицы n-го порядка, параметр λ выбирается так, чтобы система (1) имела отличные от нуля решения.

Методом итераций находится наименьшее характеристическое число λ_1. Полагая решение в виде $X = Y_0 + \lambda_1 Y_1 + \lambda^2 Y_2 + \ldots$, имеем $Y_0 = Y_1$, $Y_1 = A_1 Y_0$, $Y_2 = A_1 Y_1 + A_2 Y_0, \ldots, Y_k = A_1 Y_{k-1} + A_2 Y_{k-2} + \ldots + A_{k-1} Y_0$. Тогда λ_1 находится по формуле

$$\lambda_1 = \lim_{k \to \infty} \frac{y_k^{(i)}}{y_{(k-1)}^{(i)}},$$

где $y_k^{(i)}$ и $y_{(k-1)}^{(i)}$ — i-е компоненты векторов Y_k и Y_{k-1}. Для собственного вектора X_1, принадлежащего λ_1, получаем:

$$X_1 \approx Y_k.$$

Автор показывает, что данный метод более выгоден по сравнению с графическим при исследовании систем вида (1), когда число неизвестных велико.

Л. В. Пигина

3478. Матричные алгоритмы характеристических уравнений для анализа устойчивости в малом сложной энергосистемы. Цукерник Л. В., Научн. докл. высш. школы. Энергетика, 1959, № 1, 17—28

Произведено развитие и сопоставление уравнений возмущенного движения системы при выборе в качестве независимых переменных как относительных, так и абсолютных углов синхронных машин, а также даются матричные алгоритмы, основанные на методе исключения для вычисления коэффициентов характеристического уравнения системы и программирования задачи при применении цифровых вычислительных машин.

Из резюме автора

3479. Решение квадратных уравнений при помощи счетной логарифмической линейки. Исачкин Б. Я., Матем. в школе, 1959, № 3, 61—63

Описан подробно ход решения на логарифмической линейке четырех квадратных уравнений, имеющих действительные корни. Решение осуществляется без каких-либо записей промежуточных результатов.

В. К. Саульев

3480. Определение корней алгебраических уравнений с помощью аффинных преобразований. Тренкл (Determination of the root systems of algebraic equations by affinity transforms. Traenkle C. A.), Quart. Appl. Math., 1955, **13**, № 1, 1—18 (англ.)

Пусть при делении $f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ на $\varphi(z) = z^2 + p_1 z + p_0$ и на $z^2 + (p_1 + \Delta p_1^{(s)}) z + p_0 + \Delta p_0^{(s)}$ $(s = 1, 2)$ получаются соответственно остатки: $b_1 z + b_0$ и $(b_1 z + \Delta b_1^{(s)}) z + b_0 + \Delta b_0^{(s)}$.

Если $|b_1|$ и $|b_0|$ достаточно малы, то, считая малые поправки в коэффициентах делителя и остатка связанными приближенно линейными соотношениями, будем иметь 4 уравнения:

$$\begin{aligned} \Delta p_0^{(s)} &= k_{01} \Delta b_1^{(s)} + k_{00} \Delta b_0^{(s)}, \\ \Delta p_1^{(s)} &= k_{11} \Delta b_1^{(s)} + k_{10} \Delta b_0^{(s)}, \end{aligned} \quad (s = 1, 2).$$

При найденных отсюда k_{01}, k_{00}, k_{11}, k_{10} поправки к коэффициентам $\varphi(z)$, приводящие к почти точному

делителю $f(z)$, определяются по формулам: $\Delta p_0 = k_{01}(-b_1) + k_{00}(-b_0)$, $\Delta p_1 = k_{11}(-b_1) + k_{10}(-b_0)$.

Многочлен $\varphi(z)$, при котором $|b_1|$ и $|b_0|$ достаточно малы, автор предлагает искать, изменяя в некотором исходном многочлене $z^2 + p_1^{(0)} z + p_0^{(0)}$ сначала свободный член; определив $z^2 + p_1^{(0)} z + p_0^{(1)}$, дающий возможно близкую к началу координат точку в плоскости (b_0, b_1), надо при фиксированном $p_0^{(1)}$ искать наилучшее значение для коэффициента при z и т. д.

Рассмотрен вопрос о влиянии погрешностей в коэффициентах a_k на погрешности коэффициентов делителей $f(z)$. Особо рассмотрен вопрос о кратных корнях многочлена. Приведены иллюстративные примеры.

А. П. Доморяд

3481. Некоторые границы абсолютных значений корней алгебраических уравнений. Хейгль (Einige Schranken für die Absolutbeträge der Wurzeln algebraischer Gleichungen. Heigl Franz), Z. angew. Math. und Mech., 1958, **38**, № 7-8, 267 (нем.)

Пусть дано алгебраическое уравнение

$$\sum_{\mu=0}^{n} a_\mu z^{n-\mu} = 0, \qquad (1)$$

причем $a_0 = 1$, $a_\mu = 0$ для $\begin{cases} \mu < 0 \\ \mu > n \end{cases}$, $|a_\mu| = A_\mu$.

Вводятся положительные функции от модулей коэффициентов положительного параметра M:

$$q_\nu(A_\nu, A_{\nu-1}, \ldots, A_{\nu-q}, M) \leqq a(M). \qquad (2)$$

Корни данного уравнения (1) приближенно представляют в виде $z_\nu = -k_\nu M$. Сумму симметрических основных функций от k_ν обозначают через S и требуют, чтобы $\sum_{\mu=1}^{n} S_\mu = 1$. Тогда $|k_\nu| \leqslant 1$, т. е. $|z_\nu| \leqslant M$. Чтобы определить M, подставляют в (2) выражения для S_μ и M. Тогда из условия, что $\sum_{\mu=1}^{n} S_\mu = 1$, вытекает неравенство, выражающее зависимость только между величинами M и a. Следовательно, при фиксированном a можно для определенного q_ν найти величину M. Присутствие параметра позволяет получать, по мнению автора, достаточно хорошие оценки. И. Ф. Шелихова

3482. Улучшение сходимости процессов итерации при решении алгебраических и трансцендентных уравнений. Кущенко В. С., Тр. Ленингр. технол. ин-та им. Ленсовета, 1959, вып. 50, 3—5

Для приближенного нахождения корня уравнения $f(x)=0$ предлагается следующий итерационный процесс

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(1-\sigma_k)}{f'(x_k)} \qquad \begin{matrix} (0 \leqslant \sigma_k < 1), \\ k = 0, 1, 2, \ldots \end{matrix} \qquad (1)$$

где x_0 — начальное приближение к искомому корню. Утверждается, что при подходящем выборе σ_k метод (1) сходится быстро. Однако нет никаких указаний, каким образом следует выбирать параметры σ_k. В. К. Саульев

3483. К развитию численных методов для машин с программным управлением. II. Прямая факторизация полинома. Бауэр (Beiträge zur Entwicklung numerischer Verfahren für programmgesteuerte Rechenanlagen. II. Direkte Faktorisierung eines Polynoms. Bauer Friedrich L.), Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss. Math.-naturwiss. Kl., 1956 (1957), 163—203 (нем.)

Часть I см. РЖМат, 1956, 6887.

Для данного многочлена $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ с корнями ξ_l ($|\xi_1| \geqslant |\xi_2| \geqslant \ldots \geqslant |\xi_n|$) и произвольного многочлена $Q^{(0)}(x)$ (степень $Q^{(0)} \leqslant n-1$) вычисляются коэффициенты α_s разложения дроби $\frac{Q^{(0)}(x)}{P(x)}$ по убывающим степеням x и остаток $Q^{(i)}(x)$ от деления $x^i Q^{(0)}(x)$ на $P(x)$:

$$\frac{Q^{(0)}(x)}{P(x)} = \frac{\alpha_0}{x} + \frac{\alpha_1}{x^2} + \ldots + \frac{\alpha_{i-1}}{x^i} + \frac{1}{x^i}\frac{Q^{(i)}(x)}{P(x)}.$$

Пусть

$$\begin{vmatrix} \alpha_i & \alpha_{i+1} \ldots \alpha_{i+r-1} \\ \alpha_{i+1} & \alpha_{i+2} \ldots \alpha_{i+r} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{i+r-1} & \alpha_{i+r} \ldots \alpha_{i+2r-2} \end{vmatrix} = H_r^{(i)}, \quad Q_r^{(i)}(x) =$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_i & \ldots \alpha_{i+r-2} & Q^{(i)}(x) \\ \alpha_{i+1} & \ldots \alpha_{i+r-2} & Q^{(i+1)}(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{i+r-1} & \ldots \alpha_{i+2r-3} & Q^{(i+r-1)}(x) \end{vmatrix}$$

и $u_r^{(i)}(x) = \frac{Q_r^{(i)}(x)}{H_r^{(i)}} = x^{n-r} + \ldots$ $(Q_1^{(i)}(x) = Q^{(i)}(x))$.

Устанавливается ряд зависимостей между $u_r^{(i)}(x)$ при разных значениях r и i. Доказывается, в частности, что при $|\xi_r| > |\xi_{r+1}|$ и некоторых дополнительных условиях

$$\lim_{i\to\infty} u_r^{(i)}(x) = (x-\xi_{r+1}) \ldots (x-\xi_n) = u_r(x).$$

При этом оказывается возможным получить и последовательность многочленов, сходящуюся к $\frac{P(x)}{u_r(x)}$. Особо рассмотрен случай, когда $Q_0(x) \equiv 1$. Отмечается связь рассматриваемого способа с другими способами факторизации многочленов. А. П. Доморяд

3484. О корнях трансцендентных уравнений. Персидский К. П., Вестн. АН КазССР, 1957, № 6, 79—85 (рез. каз.)

Пусть $f(x) = a_0 - a_1 x + a_2 x^2 - \ldots$ — голоморфная в области $|x| \leqslant R$ функция и s корней ее имеют модуль ρ_1, k корней — модуль ρ_2 и т. д. ($\rho_1 < \rho_2 < \ldots$). Пусть $f_m(x) = B_0 - B_1 x + B_2 x^2 - \ldots$ получается из $f(x)$ m-кратным применением преобразования Лобачевского.

Автор доказывает, что

$$\rho_1 = \lim_{m\to\infty} \sqrt[s\cdot 2^m]{\left|\frac{B_0}{B_s}\right|}, \quad \rho_2 = \lim_{m\to\infty} \sqrt[k\cdot 2^m]{\frac{B_s}{B_{s+k}}} \text{ и т. п.}$$

Для окончательного определения корней $f(x)$ достаточно тем же путем найти модули $r_1, r_2, \ldots$ корней функции $\varphi(y) = f(a+y)$ (a — некоторое комплексное число) и испытать точки пересечения семейства окружностей $(0, \rho_l)$ с семейством окружностей (a, r_l).

Автор показывает также, что способ Лобачевского позволяет, в некотором смысле, обобщить известный способ Ньютона: если z_0 — приближенное значение s-кратного корня Z голоморфной функции или полиномы $\theta(z)$ и $Z = z_0 + r$, то, применяя способ Лобачевского, легко получить:

$$r \approx -s\frac{\theta(z_0)}{\theta'(z_0)}, \quad r^2 \approx \frac{s\cdot\theta(z_0)\,\theta(z_0)}{\theta'(z_0)\,\theta'(z_0) - \theta(z_0)\,\theta''(z_0)}. \text{ и т. д.}$$

А. П. Доморяд

3485. Об итерационных приближенных методах. I. Зайта (Az iteratív közelítőmódszerekről. I. Rész. Zajta Aurél), Magyar tud. akad. mat. és fiz. tud. oszt. közl., 1956, **6**, № 3-4, 467—489 (венг.)

Результаты статьи опубликованы на немецком языке (РЖМат, 1957, 3547; 1958, 8281).

3486. Быстродействующие вычислительные машины и математическая статистика. Часть II. Хейнхольд (Rechenautomaten und mathematische Statistik. II. Teil. Heinhold J.), MTW-Mitt., 1956, **3**, № 6, 265—279 (нем.)

Часть I, см. РЖМат, 1959, 8652.

Рассматриваются способы решения математических задач методами Монте-Карло и сравниваются ошибки, имеющие место при решении задач этими методами, с соответствующими ошибками, получающимися при решении обычными численными методами.

Имеются следующие разделы: решение дифференциальных уравнений, решение линейных интегральных уравнений, обращение матриц, преимущества и недостатки методов Монте-Карло, определение ошибок и заключительные замечания.

Решение эллиптических линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка с краевыми условиями первого рода рассматривается обычным методом случайных блужданий для одномерного и двумерного случаев.

Решение интегральных уравнений Фредгольма второго рода рассматривается также методом случайных блужданий частицы по отрезку $(0, b)$ между поглощающими границами. Отмечается, что для решения таких задач с точностью порядка 10% и для больших b, а также для многомерных случаев метод Монте-Карло дает экономию машинного времени по сравнению с обычными численными методами. Получение обратной матрицы для $E - A$, где все элементы матрицы A неотрицательны и для всех $\mu = 1, 2, \ldots, n$ имеет место $\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} < 1$, рассматривается известным методом статистических выборок $n + 1$ шаров из n урн.

Все упомянутые примеры рассматриваются для иллюстрации основной идеи методов Монте-Карло. Отмечается, что эти методы реализуются на вычислительных машинах при помощи простых программ, допускают вычисление искомого значения функции в одной точке или одного элемента обратной матрицы и всегда позволяют без принципиальных трудностей распространить решение задач на многомерные случаи.

Для сравнения статистических методов с обычными численными методами авторы рассматривают три вида ошибок: ошибку метода, ошибку от исходных данных и ошибку округления. Ошибки округления в обычных численных методах становятся существенным препятствием, когда число арифметических операций сильно увеличивается. По этой причине статистические методы могут оказать я лучше даже в тех случаях, когда они сходятся медленнее обычных численных методов. По мнению авторов, статистические методы весьма перспективны.

В заключение указывается, что благодаря появлению новых высокоскоростных вычислительных машин математическая статистика получила новое направление и особое значение в трактовке практических и теоретических задач: машины позволяют моделировать и изучать экспериментально сложные статистические процессы, а массовое получение численных результатов по математической статистике выдвигает постановку новых математически интересных проблем. В. Я. Евфанов

3487. Определение наиболее подходящей плоскости и окружности. Димов (Определяне на най-подходяща повърхнина и окръжност. Димов Любомир), Годишник Минно-геол. ин-т, 1956—1957(1958), **4**, № 1, 93—114 (болг.; рез. русск., нем.)

Рассматриваются вопросы определения наиболее подходящей плоскости и окружности методом наименьших квадратов. Необходимость в этом возникает при постройке аэродромов, при искусственном орошении земли, при трассировании планов населенных мест и т. д.

В простейшем случае под „наиболее подходящей плоскостью" понимается такая, для которой сумма объемов выемок равна сумме объемов насыпей и сумма квадратов отклонений точек до плоскости будет минимальной. Под наиболее подходящей окружностью понимается такая, которая проходила бы ближе всего к данным точкам. В. К. Саульев

3488. О нелинейной теории поверхности сферических оболочек. Вейничке (On the nonlinear theory of shallow spherical shells. Weinitschke Hubertus J.), J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1958, **6**, № 3, 209—232 (англ.)

Подробно описано применение метода степенных рядов в теории сферических оболочек. Рассмотрен случай, когда не выполняется условие $|\gamma| \ll \mu^4$, где μ^2 — геометрический параметр, равный нулю в случае плоской пластинки и возрастающий с увеличением кривизны оболочки и γ — параметр нагрузки, пропорциональный внешнему давлению. В этом случае нелинейными членами уже пренебречь нельзя. Расчеты, выполненные на скоростной электронной вычислительной машине, приведены в виде многочисленных графиков. В. К. Саульев

3489. Вычисление буквенных выражений. Хергет, Музен (The calculation of literal expansions Herget Paul, Musen Peter), Astron. J., 1959, **64**, № 1, 11—20 (англ.)

Описана методика вычислений на машине ИБМ-650 выражений, например вида

$$J_k(ie) = \left(\frac{ie}{2}\right)^k \left[\frac{1}{0!\,k!} - \left(\frac{ie}{2}\right)^2 \left[\frac{1}{1!}\frac{1}{(k+1)!} - \left(\frac{ie}{2}\right)^2 \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \left[\frac{1}{2!}\frac{1}{(k+2)!} - \left(\frac{ie}{2}\right)^2 \left[\cdots\right]\right]\right]\right] =$$

$$= \left[\left[\left[\frac{1}{n!} \times \frac{1}{(k+n)!}\right] \times \left(\frac{-i^2e^2}{4}\right) + \frac{1}{(n-1)!} \times \frac{1}{(k+n-1)!}\right] \times \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{-i^2e^2}{4} + \cdots\right] \times \left(\frac{-i^2e^2}{4}\right) + \frac{1}{0!} \times \frac{1}{k!}\right] \times \left(\frac{ie}{2}\right)^k.$$

В. К. Саульев

3490. К вопросу о математической обработке экспериментальных данных физико-химических исследований. Батунер Л. М., Тр. Ленингр. хим.-фармацевт. ин-та, 1959, вып. 6, 91—95

Рассмотрены два примера графической обработки — спрямления кривых — результатов опытов путем применения неравномерных шкал на одной или обеих осях координат. В. К. Саульев

3491. Эмпирические формулы. Козийчук П. Г., Тр. Моск. ин-та инж. ж.-д. трансп., 1959, вып. 120, 179—231

Подробно рассмотрены вопросы нахождения эмпирических формул методом средних значений и методом наименьших квадратов. Метод средних значений применен для зависимостей типа

$$y = bx,\ y = a + bx,\ y = \frac{x}{a + bx} + c,\ y = ax^{\alpha},$$

$$y = a + bx^2,\ y = a + bx + cx^2,\ y = ae^{bx},$$

а метод наименьших квадратов —

$$y = bx,\ y = a + bx,\ y = a + bx + cx^2,\ y = a + \frac{b}{x},$$

$$y = \frac{x}{a + bx},\ y = \frac{1}{a + bx},\ y = \frac{1}{a + bx + cx^2},$$

$$y=a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2},\ y=\frac{x}{a+bx+cx^2},\ y=a+\frac{b}{x^2},$$

$$y=ax^{\alpha},\ y=ae^{bx},\ y=ae^{nx+mx^2}.$$

Особо рассмотрена зависимость типа $y=A_0+A_1x+\ldots+A_nx^n$. Для нахождения коэффициентов $A_0, A_1, \ldots, A_n$ применен метод Чебышева (метод наименьших квадратов). Рассмотрен простейший (линейный) случай зависимости между тремя величинами $z=ax+by+c$.

Изложение сопровождается примерами с определением средних квадратических ошибок. В. К. Саульев

3492. Представления ряда $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-rn^2}\cos nx$ и $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-rn^2}\sin nx$ в замкнутом виде. Заездный А. М., Тр. Ленингр. электротехн. ин-та связи, 1958, вып. 3(36), 105—110

Выведены следующие приближенные формулы:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{e^{rn^2}}\approx\frac{\cos x-e^{-3r}}{e^r+e^{-5r}-2e^{-2r}\cos x},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{e^{rn^2}}\approx\frac{\sin x}{e^r+e^{-5r}-2e^{-2r}\cos x},$$

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{\cos nx}{e^{rn^2}}\approx\frac{[1+e^{-3r(m+1)}]\cos x-e^{-3mr}\cos 2x-e^{-3r}}{e^r+e^{-5r}-2e^{-2r}\cos x},$$

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{\sin nx}{e^{rn^2}}\approx\frac{[1-e^{-3r(m+1)}]\sin x-e^{-3mr}\sin 2x}{e^r+e^{-5r}-2e^{-2r}\cos x}.$$

Эти формулы могут быть использованы при расчете переходных процессов в длинных линиях с потерями.

В. К. Саульев

3493. Матрицы для нахождения кривых. Фарнелл (Curve-fitting matrices. Farnell A. B.), Amer. Math. Monthly, 1959, **66**, № 4, 297—300 (англ.)

Ранее (РЖМат, 1959, 5224) получены матрицы для определения кривых, проходящих через n ($n=2, 3, 4, 5, 6$) точек. В данной работе этот вопрос решается для произвольного n. В. К. Саульев

3494. Приближенная замена в малой области тригонометрических функций суммами. Ульбрихт (Der angenäherte Ersatz der trigonometrischen Funktionen von Summen, in kleinen Bereichen. Ulbricht Hans), Feinwerktechnik, 1959, **63**, № 6, 203—205 (нем.)

Для следующих очевидных приближенных соотношений:

$$\sin(x_0+h)\approx\sin x_0+h\cos x_0,$$
$$\cos(x_0+h)\approx\cos x_0-h\sin x_0,$$
$$\operatorname{tg}(x_0+h)\approx\operatorname{tg}x_0+h(1+\operatorname{tg}^2x_0)$$

приведены графики абсолютных погрешностей для $h=1°\ (1^{\circ})\ 5°$ и $5°<x_0<85°$. В. К. Саульев

3495. О приближенном представлении некоторых функций в быстродействующих цифровых машинах. Назаров И. А., Изв. Ленингр. электротехн. ин-та, 1959, вып. 37, 283—289

Приведены первые 5—10 коэффициентов разложений в ряды Чебышева функций

$$\sin\frac{\pi x}{2}\ (|x|\leqslant 1);\quad \arcsin x\left(|x|<\frac{1}{\sqrt{2}}\right);$$

$$\operatorname{arc\,tg}x\ (|x|\leqslant 1);\quad \operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}\ (|x|\leqslant 1);$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt\ (|x|\leqslant 1),\quad \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^x\sin t^2\,dt$$

$$(|x|\leqslant 1);\quad \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^x\cos t^2\,dt\ (|x|\leqslant 1);$$

$$\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt\quad (|x|\leqslant 1).$$

В. К. Саульев

3496. Диаграммы для систем третьего порядка. Никитин В. П., Туркин В. К., Куницкий Н. П., Научн. докл. высш. школы. Энергетика, 1958, № 4, 91—97

Приводится методика графического исследования корней алгебраического уравнения третьей степени.

В. К. Саульев

3497. Номография, задачи и методы. Кислер (Nomographie, Aufgaben und Methoden. Kiessler Fritz), Techn. Rundschau, 1959, **51**, № 25, 9—11, 13, 15, 41, 43, 45, 47 (нем.)

3498. Интерполяционные полиномы для функций двух переменных. Филин А. П., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. 4. М., АН СССР, 1959, 100—101

3499. Выпуклые функции высших порядков и остаточный член в некоторых аппроксимационных формулах анализа. Попович Т., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. 4. М., АН СССР, 1959, 164—167

3500. О применении метода случайных испытаний (метода Монте Карло) для решения кинетического уравнения. Гельфанд И. М., Фейнберг С. М., Фролов А. С., Ченцов Н. Н., Тр. 2-й Междунар. конференции по мирному использованию атомн. энергии, 1958, Т. 2. Ядерн. реакторы и ядерн. энерг. М., Атомиздат, 1959, 528—633

3501. Некоторые вопросы физики ядерных реакторов и методы их расчета. Марчук Г. И., Пупко В. Я., Погудалина Е. И., Смелов В. В., Тютерев И. П., Платонова С. Т., Дружинина Г. И., Тр. 2-й Междунар. конференции по мирн. использованию атомн. энергии, 1958. Т. 2. Ядерн. реакторы и ядерн. энерг. М., Атомиздат, 1959, 588—612

3502. Метод последовательных приближений для задач о возмущении собственных значений. Днестровский Ю. Н., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. Т. 4. М., АН СССР, 1959, 118—119

3503. Апостериорная оценка погрешности в методе Ритца для обыкновенных дифференциальных уравнений. Ильин В. П., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. Т. 4. М., АН СССР, 1959, 94—96

3504. Некоторые результаты численного прогнозирования барического поля на уровне моря и в средней тропосфере. Громова Л. Г., Машкович С. А., Тр. Центр. ин-та прогнозов, 1959, вып. 86, 49—54

3505. Применение матричного исчисления к вопросам механизации вычислительных процессов. Акушский И. Я., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. 4. М., АН СССР, 1959, 92—93

3506. Вопросы вычислительной математики и техники. (Сб. тр. Вычисл. центра. АН УССР, вып. 3). Киев, 1958, 99 стр., илл., 4 р. 55 к.

3507. Работы по приближенному анализу. Ред. Канторович Л. В. (Тр. Матем. ин-та. АН СССР, 53). М.-Л., 1959, 392 стр., илл., 24 р. 40 к.

3508. [Письмо в редакцию]. Лозинский С., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1959, № 5, 222

Исправление к работе РЖМат, 1959, 8521

3509. Элементы методики математической обработки результатов экспериментальных исследований. Василенко П. М. Киев, Изд-во УАСХН, 1959, 63 стр., илл., 1 р. 60 к.

3510 К. Номография и другие графические методы. Юрга (Nomografia a iné grafické metódy. Jurga František. Bratislava, SVTL, 1958, 279 s., il., 22.90 Kčs.), Bibliogr. katal. ČSR. Slov. knihy, 1958, **9**, № 10, 326 (словацк..)

3511 К. Уравнительное исчисление. Часть I. Теория ошибок. Бём (Vyrovnávací počet. Č. 1. Teorie chyb. Böhm Josef. Praha, SNTL, 1958, 226 s., 17,80 Kčs.), Bibliogr. katal. ČSR. České knihy, 1958, № 52, 1212 (чешск.)

3512 К. Метод интерпретации данных, полученных экспериментальным путем. Серия I. Том I. Клега (Metode de interpretare a datelor obţinute experimental. Ser. I. Vol. 3. Klega V. Trad. din limba cehă. Bucureşti, Inst. docum. tehn., 1958, 77 p., il.—Litogr.), Bibliogr. RPR, 1958, 7, № 24, 792 (рум.)

3513 К. Численные арифметические методы. Плескот (Numerické metody početní. Pleskot Václav. Praha, SNTL, 1958, 108 s., il., 5,80 Kčs.), Bibliogr. katal. ČSR. České knihy, 1958, № 49, 1121 (чешск.)

3514 К. Руководство по математике. Показательные уравнения, арифметические и геометрические прогрессии, вычисление сложных процентов, ренты и займа. Фёльм (Leitfaden der Mathematik. Logarithmisches Rechnen. Exponentialgleichungen, arithmetische und geometrisch Progressionen, Zinseszins-, Renten- und Anleihensrechnung. Völlm Ernst. Zürich, Schulthess, 1959 VIII, 86 S., ill., 6.40 Sfr.), Schweiz. Buch, 1959, **A59**, № 10, 240 (нем.)

3515 К. Методы практического анализа. Виллерс (Methoden der praktischen Analysis. 3, verb. und erw. Aufl. Willers Friedrich Adolf. Berlin, de Gruyter, 1957, 429 S., ill., 28.—DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1959, **A**, № 7, 539 (нем.)

3516 К. Об устойчивости разностных уравнений. Рябенький В. С., Филиппов А. Ф. М., Гостехиздат, 1956, 171 стр., 4 р. 25 к.

В гл. 1 «Сходимость решения разностного уравнения к решению дифференциального», наряду с понятиями условий согласования граничных условий, нормировки функций, аппроксимации и порядка аппроксимации, авторы вводят понятие корректности разностного уравнения, близкое к понятию устойчивости разностного уравнения, и доказывают, что в случае корректности решение разностного уравнения сходится к соответствующему решению дифференциального, если последнее существует. Приведены оценки для разности между этими решениями. Имеются указания на возможность обобщения полученных результатов на случаи системы разностных уравнений, метода прямых, зависимости сетки от нескольких параметров, выхода сетки за пределы области существования исходного дифференциального уравнения и, наконец, более сложного способа аппроксимации уравнения и граничных условий. В заключение главы дано определение корректности для нелинейных уравнений.

В гл. 2 «Различные виды устойчивости», вводя понятие равномерной устойчивости по начальным условиям, напоминающее определение И. Г. Петровского равномерной корректности задачи Коши для дифференциального уравнения, авторы дают признак равномерной устойчивости по начальным условиям: допущенная при вычислении решения ошибка при переходе от одного слоя сетки к следующему должна не возрастать или возрастать (по норме) не более чем на $1+c\tau$, где $c=\text{const}$, τ — шаг сетки по t, в предположении, что область существования решения лежит в конечной по t полосе. При некоторых дополнительных условиях на правые части и начальные условия разностных уравнений, которые выполняются для широкого класса уравнений, из равномерной устойчивости по начальным условиям следует устойчивость по правой части. Однако из устойчивости уравнения в конечной по t области не следует его устойчивость в бесконечной области. Поэтому выбор нормы функции в правой части уравнения должен налагать ограничения не только на ее гладкость, но и на ее поведение при $t\to\infty$. Различая устойчивость по постоянно действующим возмущениям и устойчивость по отношению к возмущениям с конечным суммарным импульсом, авторы дают соответствующие признаки для равномерной устойчивости по начальным условиям и устойчивости по правой части в бесконечной по t области.

Наряду с разностными уравнениями, решения которых находятся последовательно слой за слоем, авторы рассматривают уравнения, не удовлетворяющие этим требованиям (например, разностный аналог эллиптического уравнения). Для последних они дают необходимые и достаточные условия сходимости различных итерационных процессов, а также обсуждают вопрос ускорения сходимости. Подробно рассмотрена сходимость итерационных процессов, в которых для получения следующего приближения используется одно или два предыдущих приближения. При некоторых дополнительных условиях из сходимости процесса последовательных приближений следует устойчивость разностного уравнения по правой части.

Отдельный параграф посвящен вопросу устойчивости процесса решения разностного уравнения, т. е. вопросу влияния ошибок округления на окончательный результат.

В гл. 3 «Некоторые признаки устойчивости» приведены и иллюстрированы на простейших примерах некоторые известные в математической литературе признаки устойчивости разностных уравнений, как-то: принцип максимума, индекс разностной схемы, исследование роста единичной ошибки, метод разделения переменных, который приводит к исследованию корней некоторого характеристического уравнения. Здесь же обсуждается вопрос устойчивости уравнений с переменными коэффициентами и изучается рост решения при переходе от каждого слоя сетки к следующему. В заключение авторы изучают влияние способа перехода от граничных условий дифференциального уравнения к граничным условиям разностного и влияние членов низшего порядка на устойчивость разностного уравнения.

В гл. 4 «Исследование устойчивости разностных уравнений по начальным условиям методом разделения переменных», разделяя переменные в линейном уравнении «в частных разностях», авторы сводят исследование устойчивости последних к изучению свойств разностного уравнения от функции одного переменного. Для уравнения «в частных разностях» с зависящими от t коэффициентами при некоторых начальных и однородных краевых условиях установлены признаки разрешимости, устойчивости по начальным условиям в ограниченной по t полосе и устойчивости по правой части. Однако проверка некоторых условий установленных здесь теорем практически бывает затруднительна. Поэтому авторы для случая уравнения с постоянными коэффициентами дают алгебраические признаки устойчивости, основанные на исследовании корней соответствующего характеристического уравнения. В этом случае устойчивость по начальным условиям равносильна равномерной устойчивости по начальным условиям. В последнем параграфе построены устойчивые по начальным условиям и правым частям разностные уравнения, аппроксимирующие параболическое и гиперболическое уравнения и уравнение С. Л. Соболева.

В гл. 5 «Системы разностных уравнений, устойчивые по начальным условиям» метод разделения переменных применяется к исследованию устойчивости по начальным условиям в ограниченной по t полосе систем уравнений «в частных разностях», аппроксимирующих системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, которые разрешены относительно старших производных по t. Указаны способы построения устойчивых по начальным условиям систем разностных уравнений, аппроксимирующих задачу Коши для параболи-

ческих и гиперболических по И. Г. Петровскому систем дифференциальных уравнений, и даны эффективные достаточные условия устойчивости по начальным условиям в виде некоторых неравенств, которым должны удовлетворять корни соответствующего характеристического уравнения.

Изложение всех глав иллюстрировано многочисленными примерами.

В приложении доказаны две теоремы об экстраполяции и интерполяции функций, которые могут быть полезными при исследовании свойств разностных уравнений. Библ. 51 назв. Н. Я. Лященко

3517 Д. Графическое решение дифференциальных и интегральных уравнений. Комладзе Г. М. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Тбилисск. матем. ин-т, Вычисл. центр АН ГрузССР, Тбилиси, 1959

3518 Д. Исследование быстроты сходимости метода Б. Г. Галеркина для обыкновенных дифференциальных уравнений. Даугавет И. К. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., ЛГУ, Л., 1959

3519 Д. Решение линейных дифференциально-разностных уравнений с линейными коэффициентами. Солдатов М. А. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Моск. энерг. ин-т, М., 1959

3520 Д. Применение разложений по функциям Хаара к исследованию сеток интегрирования. Соболь И. М. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Матем. ин-т АН СССР, М., 1959

3521 Д. Графический метод решения уравнений. Митягина В. А. Автореф. дисс. канд. пед. н., Ленингр. гос. пед. ин-т им. А. И. Герцена, Л., 1959

ТАБЛИЦЫ

3522. Новые таблицы сложных процентов. Майр (Neue Zinseszinstabellen. Mair Walter), MTW-Mitt., 1958, 5, № 5, 288—290 (нем.)

Приводятся краткие сведения о новых таблицах сложных процентов, изданных в Вене и предназначенных для начисления процентов на различные суммы вкладов в сберегательные кассы. В таблицах даны с 12 десятичными знаками для 400 различных процентных ставок значения величин

$$r^{(n)} = (1+i)^n, \quad u^n = \frac{1}{(1-j)^n}, \quad \frac{1}{a_n} = \frac{ir^n}{r^n-1},$$

$$\frac{1}{A_n} = \frac{ju^n}{u^n-1}, \quad \text{где} \quad i = \frac{p}{100}, \quad j = \frac{\pi}{100}.$$

Указывается, что данные таблицы являются наиболее полными из всех ранее изданных таблиц сложных процентов. И. Ф. Шелихова

3523 К. Таблицы для решения уравнения Лапласа в эллиптических областях. Взорова (Tables for solving the Laplace equation inside an ellipse. Vzorova A. I. Transl. from the Russ. London, Infosearch, 1958, 256 pp., ill., 50 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1958, № 462, 9 (англ.)

Перевод с русского (РЖМат, 1958, 2462 К).

3524 К. Новые арифмотаблицы. [Готовые произведения 3-значных × 4-значные—% или частные до 3-4 знаков при делении любых многозначных]. Для хоз. предприятий экон., с.-х. и техн. вузов и техникумов. Асатиани Л. Г. Тбилиси, «Цодна», 1959, XVI, 715 стр., 41 р. 50 к.

3525 К. Четырехзначные физико-математические таблицы. Войтович (Tablice matematyczno-fizyczne czterocyfrowe. Wojtowicz Władysław. Warszawa, Państw. Zakł. Wydawn. Szkoln., 1958 (1959), 84 s., il., 8. 50 zł.) Przew. bibliogr., 1959, 15, № 1, 9 (польск.)

3526 К. Четырехзначные таблицы функций. Фогель (Vierstellige Funktionentafeln. Vogel Alfred. Stuttgart, Wittwer, 1958, VIII, 181 S., ill., 6. 80 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1959, А, № 7, 539 (нем.)

3527 К. Четырехзначные таблицы для функций. 13-е изд. Локи (Négyjegyű függvénytáblázatok. 13. kiad. Lóky Béla. Budapest, Tankönyvkiadó, 1957, 20 l., 2Ft.), Magyar nemzeti bibliogr., 1957, № 1-3, 9 (венг.)

3528 К. Четырехзначные таблицы для функций, 14-е изд. Локи (Négyjegyű függvénytáblázatok. 14. kiad. Lóky Béla. Budapest, Tankönyvkiadó, 1957, 20 l., 2 Ft.), Magyar nemzeti bibliogr., 1957, № 10-12, 228 (венг.)

3529 К. Пятизначные значения синуса и тангенса и тахиметрические таблицы нового разбиения для расчета машин. Бальцер, Детвилер (Fünfstellige natürliche Werte der Sinus- und Tangentenfunktionen und Tachymetertafeln neuer Teilung für Maschinenrechnen. 4. Aufl. Bearb. Balzer F., Dettwiler H., Stuttgart, Wittwer, 1958, 152 S., 7. 50 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1959, А, № 12, 972 (нем.)

3530 К. Пятизначные логарифмы натуральных чисел и угловых функций для новоградусного разбиения. Кюстнер (Fünfstellige Logarithmen der natürlichen Zahlen und der Winkelfunktionen für Neugradteilung. 3. durchges. Aufl. Bearb. Küstner Herbert. Berlin, «Volk und Wissen», 1959, VI, 122 S., 3. 50 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1959, А, № 10, 794 (нем.)

3531 К. Таблицы вероятностных функций $H'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ и $H(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\alpha^2} d\alpha$. **Т. I.** Перев. с англ. М. Вычисл. центр АН СССР, 1958, 302 стр., 14 р. 65 к.

Даны математические таблицы значений функции $H(x)$ и ее первой производной (функции плотности распределения вероятностей и функции распределения вероятностей в случае нормального закона распределения) для

$x = 0(0{,}0001)\ 1(0{,}001)\ 5{,}6$ (переменный) $5{,}946$

с 15 десятичными знаками и для $x = 4(0{,}01)10$ с 8 значащими цифрами. Для аргументов, меньших 4, табличные значения содержат 8 значащих цифр. Линейная интерполяция дает для промежуточных значений функции не менее семи десятичных знаков. Полная табличная точность может быть получена при интерполяции по формулам не выше четвертого порядка. Обратная линейная интерполяция для $x<1$ дает не менее 8 десятичных знаков. Приводится формула для получения большей точности при обратной интерполяции. Утверждается, что таблицы не содержат ошибок. Рассматриваемые таблицы удобны для большинства практических вычислений, так как линейная интерполяция обеспечивает в значениях функции не менее семи верных десятичных знаков, а высокая точность таблиц (15 десятичных знаков) делает их ценными для многих теоретических исследований как математических, так и физико-технических. И. Ф. Шелихова

3532 К. Таблицы функции $F(z) = \int_0^z e^{x^2} dx$ **в комплексной области. Карпов К. А.,** М., АН СССР, 1958, 518 стр., илл., 40 руб.

Таблицы содержат значения действительной и мнимой частей функции $F(z) = \int_0^z e^{x^2} dx$ комплексного переменного $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$. Таблицы вычислены в области $\frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$, $\rho' \leqslant \rho \leqslant \rho''$, где ρ' в зависимости от θ принимает значения 0; 0,5; 1; 1,5; 2; 3,5; 4, а ρ''—3,4 или 5. Для действительных z значения $F(z)$ даны от $\rho = x = 0$ до $\rho = x = 10$. Простые соотношения позволяют использовать таблицы для определения $F(z)$ в областях:

1) $\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{3\pi}{4}$, $\rho' \leqslant \rho \leqslant \rho''$;

2) $\frac{5\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{7\pi}{4}$, $\rho' \leqslant \rho \leqslant \rho''$;

3) при $\theta = \pi$, $0 \leqslant \rho = x \leqslant 10$.

Ошибка табличных значений функций не превосходит 6 единиц шестого десятичного знака. Шаг таблиц по ρ ($\theta = \text{const}$) допускает линейную интерполяцию; шаг по θ ($\rho = \text{const}$) выбран так, что в зависимости от области, в которой проводится интерполяция, и требуемой точности необходимо использовать 4 или 5 табличных значений. Для действительного z функция $F(z)$ дана с 5—6 значащими цифрами с шагом 0,001. Такой шаг при $x<3$ обеспечивает линейную интерполяцию, а при $3<x<10$ — квадратичную. Для удобства пользования таблицами на вкладыше приведены таблички вспомогательных величин, которые облегчают вычисления. Наглядное представление о характере кривых и поверхностей дают чертежи.

И. Ф. Шелихова

3533 К. Сферические волновые функции с таблицами коэффициентов разложений. Стреттон, Морзе, Чжу, Литл, Корбато (Spheroidal wave functions including tables of separation constants and coefficients. Stratton J. A., Morse P. M., Chu L. J., Little J. D. C., Corbato F. J., Cambridge, Mass., Technol. Press; New York, John Wiley and Sons, Inc.; London, Chapman and Hall, Ltd, 1956, xiv, 163 pp.) (англ.)

Приведены с семью значащими цифрами таблицы коэффициентов a_n и b_n в разложениях типа

$$je_{ml}(h, \xi) = \left(\frac{\xi^2-1}{\xi^2}\right)^{m/2} \sum_n{}' a_n(h \mid ml)\, j_{n+m}(h\xi),$$

$$S_{ml}(h, \eta) = \sum_n{}' a_n(h \mid ml)\, P^m_{n+m}(\eta),$$

встречающихся в теории сферических волновых функций (решений уравнения Гельмгольца

$$\nabla^2\psi(x, y, z) + k^2\psi(x, y, z) = 0)$$

для значений $m = 0\,(1)\,8$; $l = m\,(1)\,8$; g и $h = 0{,}0\ (0{,}1)\ 1{,}0\ (0{,}2)\ 8{,}0$.

В. К. Саульев

См. также: 2905, 2948.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

Редактор *Д. Ю. Панов*

3534. Логика на электронных машинах: практический метод приведения формул к конъюнктивной нормальной форме. Рутледж (Logic on electronic computers: practical method for reducing expressions to conjunctive normal form. Routledge N. A.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1956, 2, № 2, 161—173 (англ.)

Обычные алгоритмы для приведения формул к конъюнктивной нормальной форме (к. н. ф.) и для решения вопроса о выводимости этих формул излагаются таким образом, чтобы их можно было осуществлять на электронных машинах.

Основной алфавит, употребляемый автором:

а) переменные символы:

$$a, b, c, \ldots, a_1, b_1, c_1, \ldots$$

б) постоянные символы: & и $\vee$.

Вводится дополнительный алфавит — алфавит символов, сопряженных символам основного алфавита (обозначающих результат применения операции отрицания к символам основного алфавита): а) $a', b', c', \ldots, a_1', b_1', c_1', \ldots$ б) $\&'$ на $\vee'$.

Переменные символы основного и дополнительного алфавитов называются элементарными формулами (э. ф.), постоянные символы основного и дополнительного алфавитов называются операциями. Произвольные формулы обозначаются прописными латинскими буквами. Знаки операций ставятся перед формулами, к которым они относятся. Например, автор пишет $\&AB$ вместо $A\&B$, $\vee'AB$ вместо $\overline{A \vee B}$ и т. д. Каждая формула записывается в виде строчки постоянных и переменных символов основного и дополнительного алфавитов

$$a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \qquad (1)$$

(отрицание не считается отдельным символом!).

Если в машину можно вставить формулу, содержащую $N > n$ знаков, то вместо недостающих знаков справа дописывается $N-n$ знаков $\vee$. Определяется функция $j(k)$

$$j(k) = \begin{cases} k+1, & \text{если } a_k \text{ — переменный символ,} \\ N+1, & \text{если } a_k \text{ — дописанный знак } \vee, \\ & \text{т. е. если } N \geqslant k > n, \\ j(j(k+1)) & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

при помощи которой в случае, когда a_k является символом операций (из основного или дополнительного алфавита), можно судить о том, к каким частям формулы (1) эта операция относится.

Приведение формул к к. н. ф. разбивается на два этапа: 1) исключение из формул операций $\&'$ и $\vee'$ (что соответствует обычному распределению операции отрицания на э. ф.) и 2) этап, соответствующий обычному методу раскрытия скобок.

Чтобы исключить из формулы (1) операции $\&'$ и $\vee'$, нужно каждый встречающийся в ней знак $a_l = \&'$ ($\vee'$ соответственно) заменить знаком $\vee$ (& соответственно), заменяя одновременно знаки a_{l+1} и $a_{j(i+1)}$ сопряженными знаками.

Для раскрытия скобок предлагается следующий метод. Пусть x — произвольное число, записанное в двоичной системе, а A — произвольная формула, не содержащая знаков $\&'$ и $\vee'$. Формула A просматривается слева направо и каждая ее часть вида $\&A_1B_1$ заменяется формулой B_1, если очередной двоичный знак числа x равен 0, и формулой A_1, если этот знак равен 1, причем при первой встрече с символом & мы смотрим на первый знак числа x, стоящий после запятой; при второй встрече с операцией & — на второй знак числа x после запятой и т. д. Процесс продолжается до тех пор, пока из формулы A не исключатся все знаки конъюнкции. Полученная формула обозначается $T(x, A)$, а число шагов, необходимых для ее получения, через $s(x, A)$. Очевидно, это будет один из членов к. н. ф. Доказывается, что если строить последовательность

$$x_1 = 0, \qquad x_{l+1} = x_l + 1/2^{s(x_l, A)}, \qquad A_l = T(x_l, A)$$

до тех пор, пока не получится $x_{k+1} = 1$, то $A_1, A_2, \ldots, A_k$ — полный набор членов к. н. ф.

Из к. н. ф. можно выбросить те члены, которые содержат хотя бы одну пару сопряженных э. ф. Обозначим через $\sigma(x, A)$ число шагов, которые необходимы для того, чтобы в процессе построения $T(x, A)$ появилась

пара сопряженных э. ф., или для полного построения $T(x, A)$, если такая пара не появляется.

Строится последовательность

$$\xi_1 = 0, \xi_{t+1} = \xi_t + 1/2^{\sigma(\xi_t, A)}$$

до тех пор, пока не получается $\xi_{t+1} \geqslant 1$.

Автор доказывает, что формула A доказуема тогда и только тогда, когда каждое $T(\xi_t, A)$ содержит хотя бы одну пару сопряженных э. ф.

На стр. 171 описывается последовательность действий машины, решающей проблему разрешимости. Эта машина строит ξ_t и $T(\xi_t, A)$ до тех пор, пока либо получится $T(\xi_t, A)$, не содержащее ни одной пары сопряженных э. ф., либо получится $\xi_t \geqslant 1$ (машина прекращает вычисление $T(\xi_t, A)$ и переходит к вычислению $T(\xi_{t+1}, A)$ как только она обнаруживает в $T(\xi_t, A)$ пару сопряженных э. ф.). Алгоритм автора приспособлен для машины «Ace Pilot Model». Для этой машины $N = 160$ и каждый из алфавитов содержит 30 знаков э. ф.

Примечание референта.

1) При описании последовательности действий машины автором допущены две неточности: а) Машина должна останавливаться и сообщать о том, что формула недоказуема не только тогда, когда она дошла до рассмотрения (последнего) символа копии α_N и оказалось, что это знак дизъюнкции (стр. 171, п. (γ)), но и тогда, когда α_N — э. ф. и в „Q-складе" нет символа, сопряженного α_N. б) В последнем случае пункта (δ), т. е. в случае, когда в „Q-складе" имеется э. ф., сопряженная рассматриваемой; число, стоящее в ξ-регистре, меньше 1; в &-регистре стоит 0 — нужно, прежде, чем переходить к пункту (η), заменить в &-регистре 0 на 1.

2) Стр. 169, 9 строка снизу — опечатка. Должно быть: $f(n+1) = f(n) + 1$ (вместо $f(n+1) = n+1$).

Б. Ю. Пильчак

3535. Символическое программирование на электронной счетной машине АН ЛатвССР. Аринь Э. И., Шнепс М. А., LatvPSR Zinātnu Akad. vēstis, Изв. АН ЛатвССР, 1958, № 6, 101—107 (рез. лат.)

Приводятся краткие данные и программа, осуществляющая присвоение истинных адресов в программах, записанных с использованием символических адресов, для двухадресной вычислительной машины АН ЛатвССР (незначительное видоизменение вычислительной машины М-3).

Символические адреса представляются в виде шестизначных чисел (вида $abcd^ef$), записанных в восьмеричной системе счисления (a и b не равны одновременно нулю). Каждая команда и число для записи в символической форме используют две ячейки. Приводится план размещения констант и рабочих ячеек и преобразующая программа с краткими пояснениями. В. И. Смирнов

3536. От формул к языку вычислительной машины. Уэгстейн (From formulas to computer oriented language. Wegstein J. H.), Communs Assoc. Comput. Mach., 1959, 2, № 3, 6—8 (англ.)

На примере простых алгебраических выражений кратко показан принцип построения системы автоматического программирования. Примерами таких систем могут служить „Fortran", „Unicode", IT (Internal Translator), IAL (International Algebraic Language) и др. Данная статья касается части подобной системы и той ее функции, при помощи которой формулы переводятся на язык машины, т. е. принятого кода. Этот код в данном случае имеет вид трехадресного кода. Обычно величины и действия над ними в исходных формулах заменяются условными, чаще всего буквенными обозначениями, например $x_0x_1x_2x_3x_4x_5$, что для выражения $L = M + N$ должно обозначать $x_0 = L$, $x_1 = =$, $x_2 = M$, $x_3 = +$, $x_4 = N$, $x_5 = ;$. Следует отметить, что, как правило, окончание формулы сопровождается запятой. Стрелка ← по направлению внутрь прямоугольника обозначает „заменяется на". Перевод новой формулы начинается с точки „a". Точка „g" указывает дополнительную блок-диаграмму для обработки других формул, например $\sqrt{}$ и ведет, кроме того, в оставшуюся часть машины. С использованием этой диаграммы составлены таблицы для программирования формул $L = M + N$ и $Y = A - BC$. Данная блок-диаграмма может быть использована и как интерпретирующая программа. Высказывается мысль, что в будущем с развитием техники вычислительных машин окажется возможным встраивание в машину готовых формул и разделение машин по своим функциям на подготовительные и основные. В первой производится интерпретация записи, сделанной программистом, во второй выполняются все арифметические операции. Вторая машина будет считаться основной машиной. А. Ф. Смирнов

3537. О программировании арифметических операторов. Ершов (On programming of arithmetic operations. Ershov A. P.), Communs Assoc. Comput. Mach., 1958, **1**, № 8, 3—6 (англ.)

Перевод из Докл. АН СССР (РЖМат, 1959, 922).

3538. Гештальт-программирование. Новое понятие в автоматическом программировании. Росс (Gestalt programming: a new concept in automatic programming. Ross Douglas T.), Proc. West. Joint Comput. Conf., 1956, 5—10 (англ.)

Автор вводит новое общее понятие гештальт-программирования, подразумевая под этим системы программирования, допускающие простое и однозначное определение задачи вычислительной машины с использованием специального языка, вместо трудоемкого составления программ с использованием машинных команд, псевдокоманд, подпрограмм и т. д. Такая система облегчает связь между человеком и вычислительной машиной и позволяет максимально использовать возможности человека и вычислительной машины при решении некоторых сложных задач. Кратко рассматривается абстрактная структура связи человека с вычислительной машиной и ее основные моменты (выбор языка и др.), иллюстрируемые на примере организации управления автоматическим заводом. Дается общее представление об общих принципах и этапах построения систем типа гештальт. В качестве примера действующих систем подобного типа, допускающих высокие скорости «разговора» между человеком и вычислительной машиной, автор ссылается на три системы, используемые для вычислительной машины ВИХРЬ I Массачусетского технологического института. В. И. Смирнов

3539. Команды операций с нормализованными числами для трехадресной электронной вычислительной машины. Бьонди (Comandi per numeri normalizzati per una calcolatrice elettronica numerica a tre indirizzi. Biondi Emanuele), Ricerca scient., 1958, 28, № 12, 2505—2518 (итал.; рез. франц., англ., нем.)

Электронная цифровая вычислительная машина КРК-102 (CRC-102 A/P) фирмы «Нейшнл Кэш Реджистер» (National Cash Register Corp.) (США), установленная в вычислительном центре Миланского политехнического института, оперирует с двоичными числами при длине слова в 42 разряда. В качестве запоминающего устройства в машине используется магнитный барабан емкостью 2048 слов. В состав арифметического устройства входят 4 динамических регистра, из которых 2 используются для хранения слагаемых, а 2 других используются как при выполнении арифметических, так и при выполнении логических операций. Последовательность выполнения операций задается счетчиком адресов команд. Имеется специальный триггер (называемый триггером K), возбужденное состояние которого вызывает выполнение условного перехода по программе. Абсолютная величина чисел в машине нормально не может превышать единицу. При выполнении операций над нор-

мализованными числами слово делится на мантиссу (32 разряда), порядок (7 разрядов) и знаки мантиссы и порядка (по одному разряду). В статье описываются преимущества работы с нормализованными числами и блок-схемы стандартных программ для выполнения операций сложения, вычитания и умножения нормализованных чисел. А. В. Шилейко

3540. Электронные вычислительные машины и логическое мышление. Вокуа (Calculateurs électriques et pensée logique. Vauquois Bernard), Rev. questions scient., 1959, 20, jan., 93—118 (франц.)

Излагаются элементы теории цифровых вычислительных машин. При описании основ алгебры Буля автор рассматривает множество элементов, каждый из которых может принадлежать только к одному из двух непересекающихся подмножеств, и дает определение операций дополнения, объединения, пересечения и вхождения в класс. Затем даются элементарные сведения по теории рекурсивных функций и машин Тьюринга. В остальной части статьи рассматриваются вопросы программирования, включая использование подпрограмм и автоматическое программирование. А. В. Шилейко

3541. Методы вычислений в двоичной системе счисления. Часть 2. Грант (Binary digital computing. 2. Grant Philip), Mod. Lithographer, 1959, 55, № 1, 29—31 (англ.)

Часть 1 см. РЖМат, 1959, 10582.

Рассматриваются некоторые вопросы техники выполнения вычислений на электронных цифровых вычислительных машинах. Автор отмечает, что ряд вычислительных методов, известных уже достаточно давно, но не применявшихся ввиду большой трудоемкости, могут быть использованы сейчас при работе на вычислительных машинах. Например, для извлечения корня пятой степени произвольное число умножается само на себя пять раз и результат сравнивается с подкоренным числом. После сравнения вводится поправка и умножение повторяется до получения нужного результата. Описываются методы выполнения арифметических операций в двоичной системе счисления, метод извлечения квадратного корня и метод перевода чисел из двоичной системы счисления в десятичную и из десятичной — в двоичную.

А. В. Шилейко

3542. Об алгоритмах для переработки информации. Ляпунов А. А., Изв. высш. учебн. заведений. Радиофизика, 1958, № 1, 106—109

Излагается способ изображения алгоритмов, который удобно использовать при программировании различных задач. Резюме автора.

3543. Вычислительные машины в ближайшие десять лет. Бут (Computers.—The next ten years. Booth Andrew D.), J. Brit. Instn Radio Engrs, 1958, 19, № 4, 199—208 (англ.)

После подробного описания истории развития различных элементов вычислительных машин дается обзор новых направлений в создании быстродействующих запоминающих устройств. Наиболее быстродействующие современные запоминающие элементы — ферритовые сердечники, вероятно, не позволят получить скорость работы, меньшую 0,5 мксек. Большие надежды возлагаются на запоминающие элементы на магнитных пленках, которые перемагничиваются за время, меньшее чем 20 миллимксек. При таких временах работы уже будет сказываться влияние геометрических размеров машины, что ставит практический предел увеличению ее быстродействия. В основном при разработке систем на тонких пленках затруднения возникнут в получении достаточно однородных пленок, построении систем управления и усилении выходных сигналов. Другой путь построения запоминающих устройств лежит в использовании физических свойств материала. Одним из таких элементов является «Твистор» (Twistor), представляющий собой тонкий провод, скрученный вокруг его оси, в котором линии магнитного поля образуют спираль. В зависимости от направления спирали в нем запоминается «0» или «1». Плотность записи достигает 4 разрядов на 1 *см*, а время переключения до 0,2 мксек. Другое устройство «Тензор» (Tensor) использует продольное растяжение или сжатие элемента и неразрушающее считывание перпендикулярным полем. Время считывания в таком устройстве около 1 мксек. Новый метод построения запоминающего устройства предложен Людвигом Мауэром, который производил прямое считывание магнитно-записанной информации с помощью электронного микроскопа. Процесс чтения статический и заключается в отклонении электронного луча микроскопа магнитным полем, записанным на магнитной пленке обычного типа. Громадное усиление электронного микроскопа позволяет наносить данные на пленку чрезвычайно плотно, кроме того, электронный луч управляется электростатически и поэтому обеспечивает большую скорость работы. Информация в процессе работы не стирается. Процесс записи информации может быть осуществлен следующим образом. Вся пленка намагничивается внешним полем, а затем малые участки нагреваются сфокусированным электронным лучом выше точки Кюри. Мауэр утверждает, что возможна запись информации с плотностью 10^5 точек на 1 $см^2$ и скорость записи может достигнуть 10^5—10^6 точек в 1 сек. Другими элементами запоминающих устройств могут быть «криотроны» и «персисторы». На «персисторах» из сверхтонкой магнитной пленки уже получено время перемагничивания порядка 10 миллимксек. Библ. 23 назв. О. В. Бачин

3544. Обзор развития вычислительных машин в 1957 г. Кастаньяс, Шерман (Review of computer progress in 1957. Castanias R. P., Sherman J. E.), IRE Trans. Electronic Comput., 1958, 7, № 1, 65—72 (англ.)

Наиболее крупными и существенными из цифровых вычислительных машин, спроектированных к 1957 г., являются ЛАРК (фирма «Сперри рэнд»), СТРЕТЧ (фирма «ИБМ») и БИЗМАК (фирма «РКА»). Из них только БИЗМАК выполнена в металле.

ЛАРК представляет собой новую большую машину, выполненную почти полностью на полупроводниках. Она имеет скорость в 100 раз большую, нежели 4 современные научные цифровые вычислительные машины, и в 1000 раз быстрее, чем у деловых машин обработки данных. В машине «Стретч» умножение 12- или 15-разрядных чисел будет производиться со скоростью более 500 000 в 1 сек., а сложение — со скоростью 2 миллиона в 1 сек. Система была вначале разработана для коммерческих расчетов, но БИЗМАК нашла значительно более широкое применение.

Несколько меньшими, но все же значительными системами являются «Датаматик-1000», «НКА-304», «ИБМ-705» и АЛЬВАК. Важнейшей особенностью системы «Датаматик-1000» является возможность передачи информации с магнитной ленты в центральное устройство обработки данных и обратно со скоростью 60 000 десятичных разрядов в 1 сек.

Машина «НКА-304» разработана для коммерческих расчетов.

Машина «ИБМ-705-III» разработана специально для больших применений, требующих высокую внутреннюю скорость. Она имеет запоминающее устройство на магнитных сердечниках емкостью 40 000 позиций.

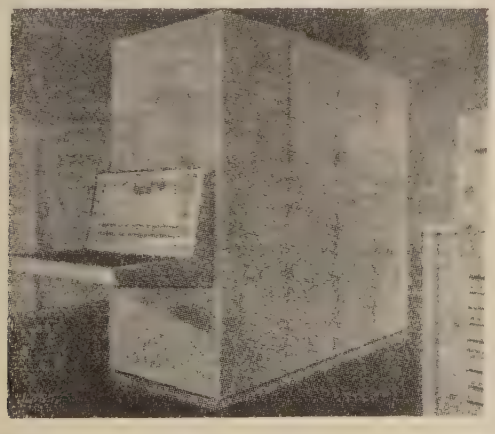
АЛЬВАК-800 представляет собой быстродействующую электронную систему обработки данных большого объема. Она имеет память на магнитных сердечниках, логику на магнитных элементах и блочную конструкцию. Имеется также магнитный барабан, магнитные ленты, бумажная перфолента, гибкое использование клавиатуры, телетайпа и быстропечатающего устройства.

Была разработана также новая транзисторная машина ТРАНЗАК-С-2000 «Transac-S-2000» (фирмы «Филко»). Эта машина параллельного типа, имеющая длину слова 48 разрядов. Она использует одноадресную систему инструкций с 16 разрядами для адреса и 8 для команды. В слове две независимые инструкции. Память выполнена на магнитных сердечниках. Цикл чтения составляет 5 мксек, цикл записи — 7 мксек. Емкость памяти — 4096 слов. Средняя скорость сложения (вычитания) 1,5 мксек., средняя скорость умножения 60 мксек., средняя скорость деления — 80 мксек.

Имеются также аналогичные сведения о машине ТРАНЗАК-1000 — параллельной машине с длиной слова 36 разрядов, двухадресной системой инструкций (12 разрядов для адреса, 3 разряда для адреса модификатора, 6 разрядов для кода операции). Память выполнена на магнитных сердечниках, время выборки 12 мксек., емкость памяти 4096 слов. Длительность сложения 5,5 мксек., умножение 130 мксек., деления 200 мксек. Заслуживают внимания также машины «Дататрон-220» (Datatron-220), РАМАК-305 (RAMAC-305), АЛЬВАК-III (ALWAC-III), «Флак-II» (Flac-II), ТХ-2, причем последняя широко использует транзисторные схемы, ферритовые сердечники и т. п. Первая модель ТХ-2, известная как ТХ-0, уже находится в работе. Новейшим достижением является машина К-308, которая является машиной для конструирования вычислительных машин. К полностью транзисторным машинам относятся также машины ИБМ-608 и РЕКОМП (RECOMP). Приводится перечень статей, представленных на основных конференциях по современным цифровым вычислительным машинам в 1957 г. Г. Х. Новик

3545. Выставка и симпозиум по электронным вычислительным машинам (The Electronic Computer Exhibition and Symposium. (London, Nov.—Dec., 1958)), BEAMA Journal, 1959, **66**, № 1, 34—41 (англ.)

Обзор экспонатов Лондонской выставки британских вычислительных машин в декабре 1958 г. и сообщения о Международном научном симпозиуме по использованию вычислительных машин, организованном Национальной физической лабораторией, и о симпозиуме по применению вычислительных машин в промышленности, состоявшемся одновременно с выставкой. В выставке приняло участие около 40 фирм, представивших вычислительные машины и вспомогательное оборудование для них. Была выражена явная тенденция ко все большему применению в вычислительных машинах полупроводниковых триодов, позволяющих уменьшить размеры машин, потребление мощности и тепловую отдачу машин.



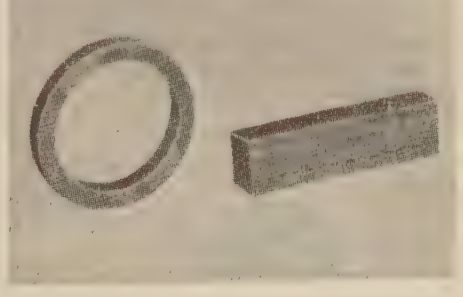
Наиболее значительный прогресс был сделан в области запоминающих устройств, в которых преобладали магнитные устройства. Также были широко представлены выходные устройства, среди которых особенно выделялись ксерографические устройства, позволяющие печатать информацию со скоростью до 3000 строк в 1 мин. Многие фирмы представили обширные библиотеки подпрограмм для машин, которые существенно облегчают коммерческое применение машин.

Из отдельных машин, представленных на выставке, заслуживает внимание машина «Метровик-1010» (Metrovick 1010) (см. фото) фирмы «Metropolitan Vickers». Эта машина, полностью построенная на полупроводниковых триодах, имеющая запоминающее устройство на магнитных сердечниках, предназначена для обработки данных управления в масштабе истинного времени, а также для разрешения сложных научных и технических проблем. Машина работает в параллельном коде и выполняет 50 000 одноадресных операций в 1 сек. Каждое 44-разрядное двоичное число содержит 2 команды. Машина работает как с плавающей, так и с фиксированной запятой. Трехразмерная матрица магнитных сердечников содержит 2048 или 4096 чисел. Из машин непрерывного действия наиболее интересной была машина LACE MkII фирмы «English Electric». Эта машина, составляемая из автономных блоков, предназначена для решения задач, описываемых системами уравнений 12-го порядка. Фирма «Mullard Equipment» представила быстродействующий преобразователь данных из непрерывной в дискретную форму. Входное напряжение преобразуется в 10-разрядный двоичный или двоично-десятичный код с периодом преобразования меньшим, чем 1 мсек. Выходные данные могут быть получены как в последовательном, так и в параллельном коде. Также были представлены преобразователи для управления различными станками, в том числе вычислительная машина для управления разметкой и сверлением листовых материалов различных видов с точностью до 25 *мк*.

В Международном научном симпозиуме приняло участие свыше 200 делегатов от 12 стран, а в симпозиуме, проводимом одновременно с выставкой, участвовало около 800 делегатов от 42 стран и было заслушано 23 доклада. О. В. Бачин

3546. Развитие цифровых вычислительных машин в Великобритании. Тилден-Паттенсон, Вильямс (Digital computers grow in Great Britain. Tylden-Pattenson K., Williams G. M. E.), Control Engng, 1958, **5**, № 11, 103—107 (англ.)

Дается исторический обзор развития вычислительной техники в Англии, а также приводятся некоторые данные современных английских вычислительных машин. Особенностью машины «Стантек Зебра» является автоматизация ее сборки. Концы проводников закрепляются в своих местах на панели медной лентой, а затем опускаются в припай, чем достигается одновременность всех паек. Имеется ферритовое запоминающее устройство, используемое как буфер между машиной и устройством на магнитной ленте. Запоминающее устройство выполнено на блоках из феррита, в которых просверлены



отверстия, как показано на рисунке. Каждое отверстие запоминает один разряд числа, и устройство работает аналогично обычному запоминающему устройству на ферритовых сердечниках таких, как изображенный на рисунке. Блоки сверлятся с помощью ультразвука и стоимость их ниже стоимости эквивалентного количества сердечников. О. В. Бачин

3547. Счетный автомат САРА фирмы «СААБ», крупнейший в стране. Сконберг (Saabs räkneautomat SARA störst i landet. Skånberg C.), Industr. tekn., 1959, 87, № 5, 136 (шведск.)

Сообщение о шведской цифровой машине САРА (SARA), построенной шведской фирмой «СААБ» (SAAB). Отмечаются положительные качества машины в эксплуатации. Дается общая характеристика памяти на магнитной ленте, так называемой САРА-ленты. Подробное описание такой памяти дано в РЖМат, 1959, 10553. Д. А. Поспелов

3548. Вычислительная машина ГАММА-60 фирмы Буль. II. Дюверже (Le Gamma 60 Bull. II. Duverger Lucien), Automatisme, 1959, 4, № 2, 72—75 (франц.)

Вторая часть статьи (I часть см. РЖМат, 1959, 10535), посвященной описанию электронной цифровой вычислительной машины ГАММА-60 фирмы «Буль» (Франция). Рассматриваются некоторые операции, характерные для этой машины. Передача информации из оперативного запоминающего устройства на магнитный барабан может осуществляться группами по несколько слов. Для выполнения такой передачи необходимо задавать адрес ячейки оперативного запоминающего устройства, в которой содержится первое из передаваемых слов, адрес ячейки магнитного барабана, в которую следует поместить первое из передаваемых слов, и количество слов в передаваемой группе. Передача управления от одного блока машины к другому осуществляется по специальной команде, называемой командой перехода. В машине ГАММА-60 имеется возможность одновременно выполнять операции в нескольких устройствах. Поэтому при составлении программ вводятся разветвления, т. е., начиная с определенного этапа, программа может предусматривать выполнение нескольких одновременных последовательностей операций. Аналогичным образом на определенном этапе несколько ветвей программы могут сходиться в одну. Если происходит обращение по программе к какому-либо блоку, выполняющему в данный момент операции, предусмотренные предыдущей командой, это обращение фиксируется специальным регистром. Логические операции машины можно разделить на две группы: операции, приводящие к изменению структуры программы, и операции, служащие для модификации команд. К операциям первой группы можно отнести операции переходов по программе. Операции второй группы дают, в частности, возможность использования «относительных адресов». При введении субпрограмм оператор ставит на месте их адресов специальный символ, указывающий на использование относительных адресов, и последовательный ряд чисел, начиная с единицы. Перед началом выполнения подпрограммы эти числа автоматически прибавляются к «исходному адресу», вырабатываемому машиной. А. В. Шилейко

3549. Французская вычислительная машина ГАММА-60— шаг вперед в области обработки данных. Дрейфус (France's GAMMA-60 a step forward in data processing? Dreyfus Philippe), Res. and Engng, 1958, 4, № 3, 34—35 (англ.)

Коротко излагается содержание доклада о новой французской вычислительной машине ГАММА-60, прочитанного автором на Западной конференции по вычислительным машинам в Лос-Анжелосе (США) в мае 1958 г. Машина состоит из отдельных автономных блоков. Блоки не соединяются между собой, но каждый из них через собственное входное и выходное оборудование соединяется с центральным блоком, выполняющим координацию их работы и распределение информации. Центральный блок состоит из оперативного запоминающего устройства (з. у.) и программного устройства; з. у. выполнено на магнитных сердечниках и состоит из 8 частей емкостью 4096 слов каждая. Одно слово может содержать 24 двоичных или 6 десятичных разрядов и 4 буквенных знака. Время обращения к оперативному з. у.— 11 мксек. Программирующее устройство выполняет координацию работы командных цепей различных блоков и собственно программирование. Блок компаратор выполняет сравнение двух групп данных. Кроме того, он выполняет операции классификации и распределения данных без остановки других блоков машины. Логический блок используется для анализа данных и для модификации команд. Арифметический блок выполняет арифметические операции над десятичными числами с плавающей запятой (числа имеют 10 разрядов мантиссы и 2 разряда порядка). Сложение и вычитание с фиксированной запятой выполняется за 50 мксек., а с плавающей запятой — за 100 мксек. Умножение выполняется за 300 мксек. Точность выполнения операций контролируется введением дополнительных разрядов. В состав машины могут также входить один или несколько блоков магнитных барабанов емкостью 786432 двоичных разряда и максимальным временем обращения 22 мсек. Обмен информацией между магнитными барабанами и центральным блоком осуществляется по одному слову. Входные и выходные устройства также подсоединяются непосредственно к центральному блоку. В их число входят: устройство для чтения перфокарт, имеющее 3 читающих элемента, 2 читающих магазина и работающее со скоростью 300 карт в 1 мин.; устройство для чтения перфолент, работающее со скоростью 600 цифр в 1 сек.; перфоратор перфокарт, имеющий один элемент для перфорации и 3 элемента для чтения карт (с помощью одного из читающих элементов выполняется контроль пробивок), скорость работы 300 карт в 1 мин.; перфоратор перфолент, работающий со скоростью 25 цифр в 1 сек.; блок с 8-канальной магнитной лентой емкостью 7,5 млн. десятичных разрядов, работающий со скоростью 30 000 десятичных разрядов в 1 сек.; печатающее устройство, распределяющее материал по 120 позициям по 60 знаков в позиции, работающее со скоростью 300 строк в 1 мин. В состав машины входит также блок передачи, осуществляющий связь между двумя каналами распределения данных, объединяющими все остальные блоки машины. Для контроля правильности арифметических операций и передачи материала используется специальное устройство с клавиатурой. В случае обнаружения ошибки машина либо полностью останавливается, либо запускается стандартная программа для повторения вычислений и автоматического исправления ошибки. Структура машины позволяет выполнять одновременно ряд различных операций. А. В. Шилейко

3550. Цифровая вычислительная машина ИБМ-704 (L'ordinateur I. B. M. 704.), Bull. UFOD, 1957, 25, № 4, 7—11 (франц.)

Описывается электронная цифровая вычислительная машина ИБМ-704, предназначенная для установки в вычислительном центре фирмы «ИБМ» (РЖМат, 1959, 11672). А. В. Шилейко

3551. Дифференциальный анализатор неаполитанского университета. Савастано (L'analizzatore differenziale dell' Università di Napoli. Savastano Giorgio), Elettrotecnica, 1958, 45, № 7, 354—365 (итал.)

Подробно описан принцип действия цифрового дифференциального анализатора D-12 фирмы «Бендикс» (Bendix) (США). Машина состоит из 60 самостоятельных цифровых интеграторов, каждый из которых имеет один входной канал для независимой переменной и

9 входных каналов для подинтегральной функции. Операции в интеграторах выполняются последовательно и таким образом время выполнения одной итерации разделяется на 60 периодов. Каждый период в свою очередь разделяется на 38 тактов длительностью по 5,4 мксек. каждый. Содержимое всех интеграторов хранится в запоминающем устройстве на магнитном барабане. Ввод данных осуществляется с помощью перфоленты или непосредственно с пульта управления. Для вывода данных используется печатающее устройство и построитель кривых. Ввод и вывод осуществляются непосредственно в десятичной системе счисления. В машине числа представляются в двоично-десятичной системе с избытком трех. Одной из особенностей анализатора D-12 является возможность автоматического изменения начальных условий в процессе решения задачи. Возможен также непрерывный ввод исходных данных в течение всего решения. Данные при этом вводятся с перфоленты или непосредственно с выходов аналого-цифровых преобразователей. Имеется возможность выполнять интегрирование по формуле Эйлера, интерполятивной и экстраполятивной формулам. Приращения представляются в тернарной системе. Запоминающее устройство D-12 выполнено на алюминиевом магнитном барабане, покрытом слоем ферролака. Запись производится методом «без возвращения к нулю». На поверхности барабана располагается ряд дорожек, с каждой из которых связаны записывающая, воспроизводящая и стирающая магнитные головки. Записывающая и воспроизводящая головки соединяются между собой таким образом, что каждая из дорожек представляет собой динамический регистр. Десятичные разряды всех чисел воспроизводятся и передаются параллельно, таким образом, запись содержимого регистра производится на четырех дорожках. Числа, содержащиеся в одноименных регистрах всех интеграторов, записываются на дорожках последовательно одно за другим в порядке возрастания номеров интеграторов. Каждый интегратор состоит из четырех регистров. В регистре Y хранится сумма приращений подинтегральной функции или текущее значение этой функции. В регистре Y_D хранятся значения подинтегральной функции, имевшие место во время предыдущей итерации. К этим значениям прибавляются приращения. В регистр R в течение каждой итерации передается содержимое регистра Y_D. Наконец, регистр Y_i служит для хранения начальных условий. Содержимые всех регистров одного интегратора располагаются на четырех дорожках магнитного барабана в пределах одного периода. Емкость каждого регистра составляет 7 десятичных разрядов плюс разряд знака. Кроме того, имеется восьмой разряд, служащий для округления в тех случаях, когда для интегрирования используются интерполятивная или экстраполятивная формулы. Кроме описанных четырех дорожек, на барабане имеются четыре дорожки адресов, на которых хранятся коды, задающие порядок соединений между интеграторами, две дорожки для хранения величины и знака выходных сигналов интеграторов, одна дорожка для ввода данных и для промежуточного хранения результатов, подлежащих печати, и наконец, постоянно нанесенная (выправированная) дорожка главных синхронизирующих импульсов. Главные синхронизирующие импульсы следуют с частотой 220 *кгц* и с их помощью осуществляется синхронизация всех устройств машины. На барабане предусмотрены также четыре вспомогательные дорожки, играющие роль буферных запоминающих ячеек для передачи адресов и чисел. Барабан вращается со скоростью 4300 об/мин, привод барабана осуществляется от электродвигателя с помощью ременной передачи для гашения вибраций. Вдоль окружности барабана расположена 31 головка. Головки укрепляются в шаровых шарнирах, дающих возможность радиальной и тангенциальной установок. Зазор между поверхностью барабана и головками составляет 0,03 *мм*, а точность установки головок в тангенциальном направлении составляет 0,005 *мм*. Между записывающими и воспроизводящими головками располагается постоянный магнит, выполняющий функции стирающей головки. Арифметическое устройство анализатора D-12 выполняет следующие функции: передачу содержимого регистра Y_D в регистр R, образования выходного сигнала соответствующего знака в случае переполнения регистра R после очередной передачи содержимого регистра Y_D, суммирования приращений. Кроме того, арифметическое устройство выполняет корректирование получаемых сумм в соответствии с правилами выполнения операций в двоично-десятичной системе счисления с избытком трех. Устройство адресации управляет засылкой информации, имеющей вид приращений, в каждый из интеграторов. Вся информация передается устройством адресации в элемент «ввод приращений» арифметического устройства. Исходные данные могут вводиться в D-12 с помощью клавиатуры пульта управления или с помощью перфоленты. На пульте управления имеется электронно-лучевая трубка, позволяющая наблюдать содержимые всех интеграторов. Кроме трубки, для вывода данных может быть использовано печатающее устройство или построитель кривых. Данные на ленте записываются в 4-позиционном коде. Кроме 10 численных комбинаций, представляемых в системе с избытком 3, используются 4 управляющих комбинации: 0000 — сигнал пропуска, 0010 — знак минус, 1111 — запрещение чтения, 1110 — возврат каретки печатающего устройства. В устройстве вывода данных используется одна дорожка магнитного барабана, на которую переписываются данные, подлежащие печати. В состав устройства управления входят: счетчик тактов, считающий главные синхронизирующие импульсы до 38; счетчик периодов, считающий до 59; схемы дешифраторов, служащие для получения специальных тактовых импульсов; схема вывода данных на экран электронно-лучевой трубки; схема для преобразования управляющих сигналов, получаемых с пульта управления. Библ. 6 назв. А. В. Шилейко

3552. Электронные вычислительные машины средних размеров. Льон (Calculatrices électroniques de moyenne improtance. Lions F.), Bull. inform. mécanogr., 1958, № 23, 17—18 (франц.)

Коротко сообщается о разработке фирмой «СЭА» (S. E. A.) (Франция) двух моделей электронных цифровых вычислительных машин средних размеров, получивших названия КАБ-500 (CAB-500) и КАБ-600 (CAB-600). Машины предназначаются для решения научных и технических задач. В качестве основного запоминающего устройства в них используется магнитный барабан, емкостью 16384 30-разрядных двоичных слова. Половина емкости запоминающего устройства предназначается для хранения подпрограмм и микропрограмм. Имеется также оперативное запоминающее устройство, емкостью восемь 30-разрядных слов. Модели 500 и 600 в основном одинаковы, за исключением того, что модель 600 имеет специальные средства для непосредственного подключения запоминающих устройств на магнитной ленте. Отмечается простота программирования машин. В частности, перевод из десятичной системы счисления в двоичную выполняется автоматически. Операции сложения и вычитания будут выполняться в машинах за 46 мсек., а операции умножения и деления — за 92 мсек. Нормальный комплект входных и выходных устройств состоит из перфоратора и устройства для чтения перфоленты, работающих со скоростью 10 цифр в 1 сек., и печатающего устройства. Имеется возможность подсоединения дополнительных быстродействующих устройств для чте-

ния и перфорации 5- или 7-канальной перфоленты и построителя кривых. Машины выполнены на транзисторах и ферритовых сердечниках и не содержат ни одной электронной лампы. Они потребляют мощность 1,5 *квт* и весят 500 *кг*. А. В. Шилейко

3553. «ЗЕБРА» начинает работать. (ZEBRA makes his bow), S. Afric. Engr, 1959, **50**, № 490, 17, 19, 21, 23 (англ.)

5 февраля 1959 г. в физической лаборатории Совета научных и технических исследований в Претории Ю. А. С. пущена в действие вычислительная машина «Стантек-ЗЕБРА» (РЖМат, 1960, 964). Эта первая в Южной Африке предназначенная для научных исследований вычислительная машина изготовлена фирмой «Standart Telephones and Cables»; стоимость машины 25 000 фунтов стерлингов. Машина была доставлена на место 21 октября 1958 г. и уже к началу декабря была закончена установка. Размещена машина в комнате размером 12 *м* × 5,5 *м* с кондиционированным воздухом. За месяц работы машины не было ни одной неисправности. Доктор Брюн, ответственный за эксплуатацию машины, в своей речи дал краткое описание машины и особенности работы на ней. «ЗЕБРА» — двоичная одноадресная машина последовательного действия с запоминающим устройством на магнитном барабане. Основными блоками машины являются: арифметическое устройство, блок оперативных регистров, запоминающее устройство и устройство управления. Длина числа 32 двоичных разряда плюс разряд знака. Команда содержит 33 разряда, из которых 15 разрядов определяют операцию, 5 разрядов выбирают 1 из 32 оперативных регистров, 8 разрядов показывают номер дорожки на магнитном барабане, а 5 последних разрядов дают положение числа на дорожке. Магнитный барабан, скорость которого 6000 оборотов в 1 мин., имеет 256 дорожек, которым соответствует своя головка считывания и головка записи. Время чтения числа 312 мксек, наибольшее время ожидания 10 мсек. О. В. Бачин

3554. «ЗЕБРА» за работой для науки и промышленности (Zebra in harness to science and industry), Industr. Rev. Africa, 1959, **10**, № 8, 4—7, 9—11 (англ.)

Сообщение об установке в Южно-Африканском Союзе вычислительной машины «СТАНТЕК-ЗЕБРА» и ее описание. О. В. Бачин

3555. Вычислительная машина и ее внешнее оборудование. Рочестер (The computer and its peripheral equipment. Rochester Nathaniel), Proc. East. Joint Computer Conf., 1955, New York, 1956, 64—68. Discuss., 69 (англ.)

3556. Бесконтактные магнитные устройства для систем управления. Гутенмахер Л. И., Аврух М. Л., Виссонова И. А., Мохель Л. Л., Хольшева А. Ф. В сб.: Автомат. управление и вычисл. техн. М., Машгиз, 1958, 113—145

Описаны разработанные лабораторией электромоделирования АН СССР узлы и блоки ряда устройств, использующих ферритовые или оксиферовые сердечники, а также конденсаторное долговременное запоминающее устройство. Приведены сведения о работающем макете вычислительной машины на магнитных блоках с долговременным емкостным и магнитным оперативным запоминающим устройствами с магнитным управлением на 1024 числа и скоростью записи и считывания 10 мксек. И. А. Ефимов

3557. Технические проблемы развития запоминающих устройств на магнитном барабане. Лейлих (Technische Probleme bei der Entwicklung von Magnettrommelspeichern. Leilich H. O.), Elektron. Rundschau, 1955, **9**, № 10, 365—368 (нем.; рез. англ., русск.)

3558. Магнитно-записывающее устройство для цифровых вычислительных машин. Отэрасу Матаси, Ом. Дэнки дзасси, Ohm. Electr. Mag., 1958, **45**, № 9, 1017—1018 (японск.)

3559. Новый цифровой дешифратор. Соне (A new serial digital decoder. Soanes S. V.), Electronic Engng, 1956, **28**, № 340, 247—249 (англ.)

3560. Читающий автомат «Солартрон» (Solartron robot reader sets printers a problem), Caxton Mag., 1957, **59**, № 4, 12—14 (англ.)

Рассматривается проблема подготовки данных и ввода их в машину, как наименее решенная и снижающая эффективность работы быстродействующих вычислительных машин. Сообщается о создании электронного читающего автомата «Солартрон-ЭРА» (Solartron ERA). Отмечается, что особенно большой эффект достигается при использовании этого устройства с вычислительными машинами, предназначенными для обработки коммерческих данных, т. е. с машинами, имеющими дело с большим количеством материала. При этом подчеркивается, что «Солартрон-ЭРА» является только «глазами» машины, печатающего, перфорирующего, сортирующего и других устройств, с которыми он работает, и не может быть использован самостоятельно. Устройство может читать со скоростью 120 знаков в 1 сек.; в случае необходимости скорость может быть увеличена до 500 и более знаков. «Солартрон-ЭРА» содержит электронное сканирующее устройство, которое прочитывает банкноты, инвентаризационные карточки, билеты, рулоны кассовых аппаратов и любую другую форму документов или печатного материала, находящегося как в неподвижном состоянии, так и в состоянии движения. Если необходимо, автомат может прочитывать не всю информацию, а только часть ее.

«Солартрон-ЭРА» может быть настроен на считывание информации, напечатанной практически любым шрифтом и на любой поверхности. Прочитываемый материал в виде электрических сигналов может передаваться либо к печатающему, либо к перфорирующему устройствам; можно также подавать их прямо на вход вычислительной машины. Перфоратор при работе от читающего автомата пробивает перфокарты со скоростью, в 144 раза превышающей скорость работы оператора, пробивающего 300 карт в 1 час. З. Д. Доброхотова

3561. Ввод и вывод информации в быстродействующих цифровых вычислительных машинах. Трубников Н. В. В сб.: Автомат. управление и вычисл. техн. М., Машгиз, 1958, 223—242

Описаны возможные типы входных и выходных устройств, использующие в качестве носителей информации перфокарты, перфоленту, магнитную ленту. Рассмотрены как с физической, так и с экономической точек зрения возможные способы записи и считывания числовой информации применительно к указанным типам устройств. И. А. Ефимов

3562. Логическая схема радарного входного устройства системы СЕЙДЖ. Бэр (Logical design of SAGE radar input monitor. Bair Byron L.), Electronics. Engng Ed., 1958, **31**, № 33, 76—81 (англ.)

Визуальный вывод информации от радарных станций системы СЭЙДЖ управляется специальным устройством. Оно состоит из основного блока, имеющего цифровую и аналоговую части, и четырех выводных консолей. Устройство может выбирать информацию от любой из 14 радарных станций и любой из 14 типов посылок, определяющих вид замеченного объекта. Выбранная информация сравнивается с информацией, имеющейся в машине, а если станция и ярлык посылки совпадают с заданной, то выводятся расстояние до цели и азимутальные данные. На вход устройства подаются два параллельных числа, отделенные друг от друга интервалом 10 мксек. Первое число представляет определение радарной станции и ярлык посылки, второе дает расстояние до цели и азимутальные дан-

ные. Первое число сравнивается в 9-разрядном триггерном регистре с числом, определяющим вызываемую информацию, и если числа совпадают, то часть второго числа, представляющая расстояние до цели, записывается в 10-разрядный регистр расстояния, а азимутальные данные параллельно записываются в двух регистрах азимута, причем все 12 разрядов запоминаются в регистре, связанном с синусным дешифратором, а разряды с 0 до 10 также запоминаются в регистре, связанном с косинусным дешифратором, причем до 10 и 11 разряду определяется квадрант азимута. Для визуального наблюдения может быть выведена информация как одного типа посылок, так и посылок различных типов. В первом случае число в регистрах сравнивается с принятыми числами в селекторе одного типа посылок, а во втором применяются селектор выбора станции и селектор многих типов посылок. Селекторы посылок принимают информацию параллельно. Все селекторы представляют собой комбинацию логических схем И и ИЛИ, на которых сигналы, поступающие с входа устройства, сравниваются с сигналами, определяющими требуемую станцию и тип посылки. В статье приведены логическая схема контрольного устройства, временные диаграммы его работы, а также электрические схемы синусно-косинусного аппроксиматора аналоговой части устройства и усилителя с распределенным усилением, работающего в схеме вывода информации на электронно-лучевую трубку. О. В. Бачин

3563. Автоматический отбор совпадений. Бонифорти (Discrimination automatique des coincidences. Boniforti A.), Rev. cálculo automát. y cibernet., 1958, **7**, № 19, 22—27 (франц., рез. исп.)

Описывается электронная приставка, позволяющая осуществлять синхронную работу телетайпа в условиях сильного искажения или затухания сигналов. Приставка состоит из ряда входных элементов, распределяющих входные сигналы, счетчика, 5-разрядного запоминающего блока на ферритовых сердечниках и выходной схемы. С помощью приставки искаженные входные сигналы усиливаются, распределяются, задерживаются на интервал времени и передаются в заданной последовательности на вход телетайпа. А. В. Шилейко

3564. Преобразователь, использующий модуляцию импульсов по длительности. Арсено (A PDM converter. Arsenault W. R.), Proc. West. Joint Comput. Conf., 1956, 57—61 (англ.)

Описан преобразователь информации из непрерывной формы в дискретную (цифровую) типа «Magnavox Series 200 Converter». Преобразователь обеспечивает запись на магнитной ленте модулированных по длительности импульсов, поступающих на вход в виде постоянного напряжения, и автоматическое преобразование их в дискретную информацию с записью ее на магнитную ленту. Выходным устройством служит лентопротяжный механизм типа ИБМ-726. Это позволяет обрабатывать информацию на машине ИБМ-701. Скорость преобразования — 150—224 сигнала в 1 сек. Количество преобразованных данных зависит от емкости выходного запоминающего устройства и равно 900 000. Преобразователь содержит 333 электронные лампы и около 900 диодов. Потребляемая мощность 3,5 *ква*. И. А. Ефимов

3565. Аналого-цифровой преобразователь. Бауэр (Analog-Digital-Konverter. Bower George G.), Regelungstechnik, 1957, **5**, № 11, 418—421 (нем.; рез. англ.)

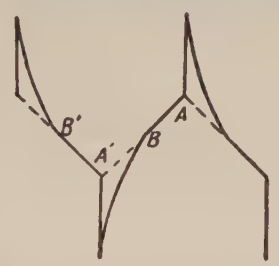
См. РЖЭ, 1958, № 23, 44897.

3566. Использование напряжений прямоугольной формы в технике электрического моделирования. Миру (L'utilisation des signaux carrés dans la technique des analogies électriques. Appareillage à grandes résistances pour cuves rhéoélectriques. Miroux Jean), Onde électr., 1958, **38**, № 375, 450—457 (франц.)

При моделировании полей с помощью электролитических ванн встречаются случаи, когда в качестве граничного условия задается распределение градиента потенциала по нормали к границе исследуемого участка поля. При этом в ванне вдоль границы устанавливается ряд небольших электродов, питаемых от общего источника через большие сопротивления, величины которых выбираются таким образом, чтобы токи через электроды были пропорциональны нормальным составляющим градиента потенциала. Аналогичным образом может задаваться распределение потенциала вдоль границы. Картина поля снимается обычным способом с помощью зонда и нуль-индикатора, в качестве которого используется осциллограф. При питании ванны переменным током возникает неудобство, связанное с тем, что паразитные емкости питающих проводников и паразитная емкость ванны, возникающая из-за поляризации электродов, вызывают сдвиги фаз напряжений, снимаемых в различных точках ванны, и затрудняют индикацию нуля, снижая точность измерений. В результате многочисленных экспериментов удалось установить, что емкость за счет поляризации в прямоугольной ванне убывает с увеличением частоты по закону:

$$C = K\omega^{-1,75}. \quad (1$$

Это делает целесообразным питать ванны от источников напряжения повышенной частоты 400—1600 *гц*. Однако при увеличении частоты увеличивается влияние паразитных емкостей проводников. В статье предлагается использовать для питания ванн напряжения прямоугольной формы. В исследованных авторами случаях за счет паразитных емкостей возникает два вида искажений напряжения прямоугольной формы: наклон горизонтальной части и выбросы на фронтах. Примерная форма напряжения, снимаемого с зонда, показана на рисунке. Показания индикатора признаются нулевыми в том случае, когда продолжение линии, соответствующей наклонному участку П-образной кривой (*A*, *B*; *A'*, *B'*) (см. рисунок), пересекается с точкой излома или точкой начала выброса. По утверждению автора, подобный метод позволяет увеличить точность измерений почти в 10 раз. Положение еще более усложняется при использовании больших ванн с большим удельным сопротивлением электролита, так как здесь начинает сказываться влияние помех и емкостей между соединительными проводниками. Предлагаются следующие меры, принимаемые при работе с такими ваннами: а) частота прямоугольного напряжения синхронизируется частотой сети, б) частота развертки осциллографа синхронизируется частотой сети, в) для увеличения отношения сигнал — помеха ванна питается от источника повышенного напряжения (250 *в* от пика к пику), г) вводятся схемы компенсации паразитных напряжений, наводимых из сети, д) вводятся схемы компенсации паразитных емкостей соединительных проводников и е) вводится схема компенсации паразитных емкостей за счет поляризации. При частоте питающего напряжения 400 *гц*, частоте сети 50 *гц* и принятии мер синхронизации на экране осциллографа удается получить устойчивую осциллограмму, содержащую 8 периодов прямоугольного напряжения. Приводится блок-схема соединений электрической ванны. Библ. 18 назв. А. В. Шилейко



3567. Погрешности в электронных моделирующих устройствах. Верхаген (De fouten in elektronische analogon machines. Verhagen C. M.), Ingenieur (Nederl.), 1957, **69**, № 30, 0.71—0.74 (гол.; рез. англ.)

Часть I см. РЖМат, 1958, 1659.

Рассматривается отношение частот, при которых усилитель, имеющий низкочастотную постоянную времени τ_1 и высокочастотную постоянную времени τ_2, будет иметь одинаковую амплитудную погрешность, равную $\delta_1 = {}^1/_2\left(1/\omega_1^2\,\tau_1^2\right)$ для низких частот и $\delta_2 = (1+p)\,\omega_2^2\,\tau_2^2$ для высоких частот, здесь p — коэффициент усиления усилителя в режиме отрицательной обратной связи. Указывается, что, например, при $\tau_1 = 10^5$ сек., $\tau_2 = 5\cdot10^{-7}$ сек. и $p = 100$ отношение ω_2/ω_1 будет равно $3\cdot10^{10}\,\delta$, где $\delta = \delta_1 = \delta_2$.

Приведено выражение для погрешности, определяемой напряжением дрейфа нуля, приведенным к сетке первой лампы и током сетки первой лампы усилителя. Отмечается влияние на точность работы схем суммирования и интегрирования паразитных емкостей и сопротивлений утечек, входящих в схему внешних цепей счетно-решающего усилителя. Указана возможность появления погрешностей в схеме электрического моделирования при наличии разброса во времени срабатывания реле интегрирующих усилителей.

Приведена зависимость выходного напряжения усилителя от тока в цепи нагрузки и отмечается возможность выхода усилителя из режима отрицательной обратной связи при чрезмерном увеличении тока в цепи нагрузки. Рассматриваются погрешности и возможности усилителя с малым дрейфом нуля, а также погрешности схемы задания постоянного или переменного коэффициента.

И. М. Витенберг

3568. Анализ некоторых ошибок электронных дифференциальных анализаторов. II. Явление диэлектрической абсорбции. Дау (An analysis of certain errors in electronic differential analyzers. II. Capacitor dielectric absorption. Dow Paul C., Jr), IRE Trans. Electronic Comput., 1958, 7, № 1, 17—22 (англ.)

Часть I см. РЖМат, 1959, 2083.

Показывается, что диэлектрическая постоянная материалов, используемых в конденсаторах, не является в действительности постоянной, а зависит от температуры и частоты. Вследствие этого, конденсаторы в цепях обратной связи интегрирующих блоков дифференциального анализатора нельзя считать идеальными, их емкость изменяется в процессе работы машины. Предлагается метод оценки погрешности, вносимой в работу интегрирующего блока, вследствие изменения емкости конденсатора. Приводится электрическая модель конденсатора, учитывающая явление диэлектрической абсорбции и пригодная для расчета погрешности. Описывается метод экспериментального определения действительной емкости конденсатора. Приводится пример уточнения корней линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами с помощью предлагаемого автором метода, который показывает, что погрешность в работе дифференциального анализатора, вызванная нелинейностью конденсаторов в интегрирующих блоках, весьма мала.

Б. Н. Малиновский

3569. Исследование кривых затухания и сдвига фаз передаточной функции методом замены проводящей плоскости на сетку из сопротивлений. Бриду, Ламботт, Лафлёр (Étude analogique des courbes d'atténuation et de déphasage d'une fonction de transfert au moyen d'une approximation d'un plan conducteur par un réseau de résistances. Bridoux G., Lambotte J., Lafleur Ch.), Actes. Journées internat. calcul analog., Bruxelles, 1955. Bruxelles, 1956, 377—379 (франц.; рез. англ.)

Исследование передаточных функций в теории цепей можно осуществлять, используя формальную аналогию между функцией комплексного переменного, каковой является передаточная функция, и потенциальной функцией, представленной соответствующим рядом особенностей.

Действительная $R(\alpha, \omega)$ и мнимая $X(\alpha, \omega)$ части передаточной функции $G(p)$ комплексного переменного $p = \alpha - j\omega$ должны удовлетворять условиям Коши-Римана в области аналитичности функции $G(p)$ на плоскости p и являться решениями уравнения Лапласа в двух направлениях. Распределение тока на проводящей плоскости также удовлетворяет уравнению Лапласа, вследствие чего свойства передаточной функции могут быть исследованы посредством такой проводящей плоскости.

В статье описывается сетка из сопротивлений, созданная в Брюссельском университете, которая заменяет плоскую проводящую поверхность. Приводятся практические результаты, позволяющие сделать заключение о полезности этой аппаратуры.

Н. Н. Михайлов

3570. Моделирующее устройство для изучения теплопередачи во время теплового восстановительного процесса. Дискуссия. Дженкинс, Реймн (An analog computer for studying heat transfer during a thermal recovery process. Jenkins Rodman, Ramey H. J., Jr. Authers'reply to Jenkins and Ramey), J. Pétrol. Technol., 1955, 7, № 12, 211—212 (англ.)

См. РЖМат, 1959, 3331.

3571. Использование моделирующих устройств в качестве вспомогательного средства при обучении. Веннинг (Analogue computers as an aid to teaching. Venning B. H.), Bull. Electr. Engng Educ., 1958, № 21, 41—54 (англ.)

Описывается принцип действия электронных моделирующих устройств и методы решения на них линейных и нелинейных дифференциальных уравнений. Автор считает, что моделирующие устройства могут успешно использоваться в качестве пособия при изучении механики и математики. При этом имеет смысл выбирать длительность решения в несколько десятков секунд, а регистрацию результатов производить с помощью самописца. Моделирующие устройства применяются в некоторых английских учебных заведениях.

А. В. Шилейко

3572. Электромашинное вычислительное устройство. Горский В. В., Автоматика и телемеханика, 1958, **19**, № 5, 448—455 (рез. англ.)

Описывается принцип действия электромашинного вычислительного устройства, содержащего синхронные генераторы, роторы которых приводятся во вращение двигателем постоянного тока с широким диапазоном регулирования скорости вращения. При вращении роторов синхронных генераторов в их статорных обмотках находятся э. д. с., величины которых пропорциональны скорости вращения роторов.

На выходе первого генератора, имеющего постоянные магниты возбуждения, образуется напряжение, пропорциональное первой степени частоты; на выходе второго генератора, на обмотку возбуждения которого поступает выпрямленный емкостный ток, создаваемый выходным напряжением первого генератора, образуется напряжение, пропорциональное третьей степени частоты; на выходе третьего генератора — пропорциональное пятой степени и т. д.

Напряжения, пропорциональные квадрату частоты, четвертой степени ее и т. д., образуются за счет падений напряжений от емкостных токов, создаваемых выходными напряжениями первого, второго и т. д. генераторов.

Напряжения, пропорциональные степеням частоты ($U_1 = a_1\omega$, $U_2 = a_2\omega^2, \ldots$), поступают после выпрямления на потенциометры, так что на потенциометрах образуется сумма напряжений, равная $U = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots$.

Представлена схема соединений одного канала макета электромашинного вычислительного устройства, использующего авиационный тахогенератор 2УГ1-48 и трехфазные синхронные генераторы типа *FK* 8,6-8,, и приведены графики зависимости выходных напряжений схемы,

изменяющихся от 0 до 30 вольт, от частоты при изменении частоты в пределах от 0 до 150 герц. Представлены примеры построения кривой Михайлова, построения границы Д-разбиения по $k+1$, вычисления зависимости e^x и пример отыскания действительных корней алгебраического уравнения, иллюстрируемые расчетными и экспериментально полученными кривыми.

Приведены рекомендации по построению вещественных частотных характеристик, кривых Д-разбиения по двум параметрам и амплитудно-фазовых характеристик, что связано с вычислением дробно-рациональных функций и может быть выполнено при наличии двух групп потенциометров, одна из которых используется для задания числителя, а вторая — для задания знаменателя, при питании обеих групп от тех же синхронных генераторов.
И. М. Витенберг

3573. Некоторые вопросы построения траектографов. Применение электролитической ванны в вычислительных устройствах. Прудковский Г. П. В сб.: Межвуз. конференция по применению моделирования в электротехн. задачах и матем. моделирования. М., 1957, 150—151

3574. Моделирующие устройства. Фергусон (Analogue computers. Ferguson A. E.), Austral. J. Instrum. Technol., 1958, **14**, № 1, 19—28 (англ.)
Статья общего характера.

3575. Применение моделирующих устройств. Введение. Лонерган (An introduction to the applications of analogue computers. Lonergan J. P.), Austral. J. Instrum. Technol., 1958, **14**, № 1, 62—71 (англ.)
Статья общего характера.

3576. Конструкция и действие новых интеграторов. Гофман (Aufbau und Wirkungsweise neuzeitlicher Integrieranlagen. Hoffmann Hans), Elektrotechn. Z., 1956, **A77**, № 2, 77—83 (нем.)

3577. Математическая машина для тяговых расчетов. Электр. и тепловозн. тяга, 1959, № 3, 28
Моделирующее устройство АТР-1 используется в проектном институте для тяговых расчетов. Тяговые расчеты для участка в 150—120 км производятся на нем за 1,5—2 часа.

3578. Перфоленты. XI—XIX. Бене (Bandes perforées. XI—XIX. Benay J.), Rev. mécanogr., 1957, **11**, № 124, 469—476 (франц.)
Окончание статьи (РЖМат, 1958, 9353; 1959, 2125; 1960, 1066), в которой описываются вычислительные машины и устройства фирмы «Фриден» (Friden), использующие перфоленту.

Фактурная машина «Компьютайпер С» (Computyper C) имеет два устройства для чтения 5- и 8-позиционной перфоленты, которые могут работать одновременно, два перфоратора и печатающее устройство, работающее со скоростью 572 цифры в 1 мин. В вычислительном блоке используются германиевые диоды и печатные схемы. Рассматривается работа машины при автоматическом, полуавтоматическом и ручном фактурировании и в некоторых других режимах.

Перфоратор 5- и 8-позиционной перфоленты PTS допускает дистанционное управление посредством электромагнитов. Скорость набора на клавиатуре — 1200 имп/мин, а скорость перфорирования — 1000 пробивок в 1 мин.

Принимающая суммирующая машина ABS специально приспособлена для приема данных, поступающих по линиям телепередачи со скоростью до 1200 имп/мин. Машина может работать совместно с любым из описанных выше устройств.

Быстродействующее печатающее устройство PRS работает со скоростью 240 строк в 1 мин. Оно имеет 10 клавиш, которые при дистанционном управлении приводятся в действие электромагнитами. Печать 2-х, 3-х и 4-х цифрей может осуществляться одним нажатием клавиши.

Передающая суммирующая машина ABEO имеет промежуточное электромеханическое запоминающее устройство и приспособлена для передачи данных в десятичной или двоичной системах счисления. В последнем случае используется устройство для преобразования системы счисления на германиевых диодах.

Принимающая и передающая суммирующая машина ABEOS совмещает в себе свойства машин ABS и ABEO. Вычислительная машина может выполнять операции сложения, вычитания, умножения и ряд специальных операций, а также пробивать результаты на перфоленту. Имеется автоматическая касса, снабженная электромеханической логической схемой и панелью с сигнальными лампочками.
А. В. Шилейко

3579. Настольный прибор для гармонического синтеза. Меньшиков Г. Г., Уч. зап. ЛГУ, 1958, № 271, 48—53
Описано несколько вариантов вычислительного прибора, решающего задачу нахождения сумм:

$$a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

$$a_{000} + \sum_{\substack{i,j,k=0,\ldots,n \\ i+j+k\neq 0}} a_{ijk} \cos (ix + jy + kz + \varphi_{ijk}),$$

$$a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k f(k),$$

$$a_{000} + \sum_{i,j,k} f_{ijk} (ix + jy + kz + \varphi_{ijk})$$

и им подобных в фиксированных точках. Конструктивным достоинством машины является полное отсутствие электронных ламп. Эксплуатационным достоинством машины является то, что рабочее время машины, по существу, равно только сумме времени установки входных данных и времени визуального считывания суммы. При этом, если подсчитываются значения сумм во многих точках, требуется только раз установить коэффициенты. Описанные варианты прибора для гармонического синтеза были проверены на макетах в радиолаборатории математико-механического факультета ЛГУ. Максимальная ошибка в 1% почти целиком обусловлена неточной установкой входных данных. При числе гармоник 20—30 прибор содержит сравнительно небольшое количество составных частей и может быть сконструирован в настольном оформлении.
Н. А. Тихонов

3580. Структурные схемы устройств для автоматического разложения полиномов на множители. Семенов А. С., Тр. Моск. авиац. ин-та, 1957, вып. 84, 11—29
См. РЖЭ, 1958, № 20, 38248.

3581. Симпозиум по вычислительным машинам (The Computer «Symposium»), Office Mag., 1958, **5**, № 60, 1014 (англ.)

3582. Симпозиум по вычислительным машинам. Рин-тол (Symposium on computers. Opening adress. Rintoul W. H.), Austral. J. Instrum. Technol., 1958, **14**, № 1, 12—13 (англ.)

3583. Международный конгресс с выставкой измерительной техники и автоматики. Букович (Internationaler Kongreß mit Ausstellung für Meßtechnik und Automatik. Bukovics E.), MTW-Mitt., 1958, **5**, № 2, 101—103 (нем.)

3584. Вычислительная машина УНИВАК фирмы «Ремингтон Ренд». Оверхофф (Remington Rand: le calculateur classeur Univac. Overhoff G.), Rev. mécanogr., 1958, **12**, № 129, 210—212 (франц.)

3585. Автоматические системы обработки данных. Хаттери, Филлипс (A survey course in automatic data processing systems. Hattery Lowell H., Phillips Charles A.), Computers and Automat., 1957, **6**, № 7, 12—14 (англ.)

Программа курса, организованного в Американском университете в Вашингтоне в 1956 г.

3586. Сумматор для демонстрации двоичного сложения. Канди (A demonstration binary adder. Cundy H. Martyn), Math. Gaz., 1958, **42**, № 342, 272—274 (англ.)

Показано, как при помощи простой схемы на двух двухполюсных переключателях с двумя положениями можно отобразить арифметическое действие сложения для всех частных случаев. Ответ дается посредством четырех индикаторных лампочек. А. Ф. Смирнов

3587. Автоматические цифровые вычислительные машины. Нивес-Баттистон (Le calcolatrici numeriche automatiche. Nives Battiston Maria), Strum. e automaz., 1957, **5**, № 11, 457—460 (итал.)

Рассматриваются основные свойства электронных цифровых вычислительных машин и выполняемые в них операции. Описываются простейшие логические операции и схемы для их реализации, использующие диоды.

А. В. Шилейко

3588. Современные вычислительные машины в лаборатории. Часть VI. Бут (Modern calculating machines in the laboratory. Part 6. Booth A. D.), Lab. Practice, 1957, **6**, № 3, 151—153 (англ.)

Приводится упрощенный пример составления программы вычислений для цифровой машины. Отмечается целесообразность использования цифровых машин для решения задач оптики, кристаллографии, атомной физики. Части I—V см. РЖМат, 1957, 6062, 6063; 1959, 2115, 5345, 11693. Б. Н. Малиновский

3589. Механизация ускоряет вычислительные работы (Mechanization speeds accounting), Mod. Railroads, 1955, **10**, № 8, 182—183, 185—186, 188 (англ.)

3590. Как выбрать вычислительную машину. I, II. Голдсмит (Choosing your computer. I, II. Goldsmith J. A.), Accountant, 1958, **138**, № 4356, 711—716; № 4357, 743—747 (англ.)

3591. Электронные вычислительные машины в конторе. Лейвер (Electronic computers in the office. Laver F. J. M.), P. O. Telecommuns J., 1958, **10**, № 3, 105—111 (англ.)

Популярная статья.

3592. Кто управляет Вашей вычислительной машиной? Спенсер (Who is running your computer? Spencer Ralph D., Jr), J. Mach. Account., 1958, **9**, № 4, 8—11 (англ.)

3593. Электронные вычислительные машины. Зеленкевич Г., Разроев В., Радио, 1959, № 4, 50—53

Статья общего характера.

3594. Принципы и основы цифровых вычислительных машин. Гумин (Prinzipien und Grundbausteine für digitales Rechnen. Gumin H.), Regelungstechnik, 1959, **7**, № 2, 41—43 (нем.; рез. англ.)

3595. Электронные вычислительные машины с программным управлением. Хубер (Programmgesteuerte elektronische Rechenmaschinen. Huber A.), Funk-Technik, 1957, **12**, № 21, 724—726 (нем.)

3596. Большие вычислительные машины и цифровая математика. Зауэр (Großrechenanlagen und numerische Mathematik. Sauer Robert), Jahresber. Dtsch. Math.-Ver., 1957, **60**, № 1, Abt. 1, 21—32 (нем.)

3597. Цифровые вычислительные машины. Градуэлл (The digital computer. Gradwell Cyril F.), Overseas Engr, 1957, **31**, № 360, 158—162 (англ.)

См. РЖЭ, 1958, № 19, 35903.

3598. Вычислительные машины. Риччи (Le macchine calcolatrici. Rizzi Gianfranco), Radio ind. e telev., 1955, **16**, № 11, 40—42 (итал.)

Статья общего характера.

3599. Программирование для электронной вычислительной машины. Дюверже (De la programmation d'une calculatrice électronique. Duverger Lucien), Automatisme, 1957, **2**, № 3, 110—112 (франц.)

Популярная статья о программировании.

3600. Обучение машины грамматике. Чеккато (La grammatica insegnata alle macchine. Ceccato Silvio), Civiltà macchine, 1956, **4**, № 1, 46—51 (итал.; рез. англ.)

См. РЖМат, 1959, 2130.

3601 К. Программирование для автоматической цифровой вычислительной машины. Бут (Programming for an automatic digital calculator. Booth Kathleen Hylda Valerie. New York, Acad. Press, 1958, 245 pp., ill., 7.50 doll.), Publishers' Weekly, 1958, **173**, № 23, 80 (англ.)

3602 К. Быстродействующие вычислительные машины для обработки данных. Готлиб, Хьюм (High-speed data processing. Gotlieb C. C., Hume J. N. P. New York, McGraw-Hill Book Co., 1957, 349 pp., ill., 9.50 doll.), Publishers' Weekly, 1958, **173**, № 19, 40 (англ.)

3603 К. Цифровые вычислительные машины, их применение, введение, общее описание и перспективы. Сетье (Les calculateurs numériques automatiques et leurs applications, initiation, tableau général et perspectives. Sestier Aimé. Neuilly, Eds «Hommes et techn.», 1958, 184 p., 2800 fr.), Bibliogr. France, 1959, **148**, № 6, 136 (франц.)

3604 К. Логарифмическая линейка. Изд. 4-е, переработ. Кущенко В. С., Л., Судпромгиз, 1958, 62 стр., илл., 1 р. 60 к.

3605 К. Карманный вычислитель «Фикс», вычислительная машина в кармане. 10-е изд. Шаде (Taschenrechner Fix, die Rechenmaschine in der Tasche. 10. Aufl. Schade C. Berlin, Verl. Technik, 1958, 99 Doppels., 2.70 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1958, **A**, № 35, 2539 (нем.)

3606 К. Теория механизмов для построения плоских кривых. Добровольский (Theorie der Mechanismen zur Konstruktion ebener Kurven. Dobrowolski W. W. Übers. aus dem Russ. Berlin, Akad.-Verl. 1957, VIII, 134 S., 18.-DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1958, **A**, № 8, 522 (нем.)

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ И ИХ ЭЛЕМЕНТОВ В ТЕХНИКЕ

3607. Решение системы булевых уравнений на электронной вычислительной машине. Дадда (La risoluzione dei sistemi di equazioni di Boole per mezzo di una calcolatrice elettronica. Dadda Luigi), Ricerca scient., 1958, **28**, № 11, 2226—2244 (итал.; рез. франц., англ., нем.)

Описывается принцип действия элементов, выполняющих элементарные логические операции, в частности триггеров, запускаемых через вентили по двум входам. Возможность решения логических задач на электронных цифровых вычислительных машинах рассматривается применительно к машине КРК-102 (CRC 102). Одним из видов логических задач, которые могут решаться на цифровой вычислительной машине, является моделирование схем с переключательными элементами.

А. В. Шилейко

3608. О применении вычислительных автоматов для предсказания погоды. Випперман (Über die Verwendung von Rechenautomaten für die Wettervorhersage. Wippermann Friedrich), Nachrichtentechn. Fachber., 1956, **4**, 194—196, 227. Diskuss., 196—197 (нем.; рез. англ.)

3609. Метод использования вычислительной машины для изучения электроэнцефалограмм. Фарли, Кларк, Гилмор (Computer techniques for the study of patterns in the electroencephalogram. Farley B. G., Clark W. A., Jr, Gilmore J. T. Jr. Techn. Rept.

Res. Lab. Electron. and Lincoln Lab. Mass. Inst. Technol., 1957, 337/165, IV, 19 pp., ill.) (англ.)

Совместный отчёт Исследовательской лаборатории по электронике и Линкольновской лаборатории Массачусетского технологического института о работе по исследованию данных электроэнцефалограмм на электронной цифровой вычислительной машине. Целью работы было выявление в общем массиве данных закономерных последовательностей таких, как α-, β-, δ-колебаний и т. п. На основе изучения этих последовательностей делались попытки «узнавать» человека, у которого снималась энцефалограмма, а также различать отдельные последовательности одного и того же типа. В работе использовалась вычислительная машина типа «Линкольн ТХ-О», первоначально разработанная для контроля качества транзисторов, используемых в вычислительных схемах, и больших запоминающих устройств на магнитных сердечниках. Длина слова в машине составляет 18 разрядов и только 3 команды предусматривают обращение к памяти. Имеется также четвёртая команда, в которой на месте адреса записывается код операции. Запоминающее устройство машины имеет емкость 65 000 слов при времени обращения в 6 мксек. Исходные данные записывались в форме модулированных по частоте сигналов на 7 дорожках магнитной ленты и воспроизводились с помощью устройства AMPEX, после чего преобразовывались в цифровую форму с помощью аналого-цифрового преобразователя «Epsco Datrac». Программой предусматривались передача в машину слова с выхода преобразователя и затем выполнение следующего преобразования. После поступления в машину слово записывалось на регистр и затем по другим командам передавалось в соответствующую ячейку запоминающего устройства. Управление всем этим процессом производилось полностью от вычислительной машины. Скорость преобразования изменялась в пределах до 10 000 в 1 сек. Данные, с помощью которых были получены описанные в отчёте результаты, передавались со скоростью 300 в 1 сек. После передачи в машину 53 428 8-разрядных слов они подвергались предварительному изучению с помощью программы, получившей название «движущееся окно». Эта программа давала возможность оператору наблюдать избранную часть данных на экране осциллографа. Скорость развёртки осциллографа могла изменяться в широких пределах. Адрес слова, наблюдаемого в центре экрана, в любой момент времени мог записываться с помощью печатающего устройства и была предусмотрена возможность возврата к этой позиции. Управление операциями этого типа производилось с помощью ключей пульта управления. Рассматриваемый массив данных занимал меньше половины общей емкости запоминающего устройства, остальная его часть использовалась для выполнения вычислений, результаты которых могли демонстрироваться на экране осциллографа одновременно с исходными данными. В данной работе эта часть запоминающего устройства использовалась для непрерывного вычисления и хранения средних значений исходных данных, а также для образования специальных сигналов, выделяющих отдельные части исследуемых колебаний. Были составлены вспомогательные программы, предусматривающие работу печатающего устройства, просмотр и замену отдельных команд рабочей программы, ввод новых параметров, отыскание заданных адресов и выполнение ряда других задач, облегчающих работу программиста. Рабочая и вспомогательные программы занимали 000 ячеек запоминающего устройства. В отчёте подробно описывается работа по анализу электроэнцефалограмм, в основу которой было положено определение двух параметров: амплитуды колебаний и интервалов между отдельными всплесками. Значения этих параметров сравнивались с ранее полученными значениями. В заключение отмечается, что, хотя использование вычислительной машины при выполнении исследований подобным методом «проб и ошибок» является мало экономичным, еще менее экономична умственная работа ученых, основанная на этом методе. Библ. 7 назв. А. В. Шилейко

3610. Автоматическое вычисление нервной возбудимости (поправка). Кол, Антосевич, Рабинович (Automatic computation of nerve excitation, correction. Cole K. S., Antosiewicz H. A., Rabinowitz P.), J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1958, **6**, № 2, 196—197 (англ.)

Поправка к статье (РЖМат, 1957, 5989).

3611. Некоторые исследования по имитации вертолета. Гаррисон (Some helicopter simulation studies. Harrison J. M.), Comput. J., 1959, **2**, № 1, 10—23 (англ.)

Маневрирование вертолета осуществляется со сравнительно небольшими угловыми и линейными скоростями, что позволяет при моделировании полета вертолета вычислять параметры полета с дискретностью порядка 0,1 сек. Объем вычислений при этом таков, что цифровая вычислительная машина средней величины типа ИБМ-650 может обеспечить моделирование в масштабе времени 25 : 1. Наибольшую трудность представляет вычисление тяги несущего винта, которое может производиться или через вычисление аэродинамических сил, действующих на элементарные участки лопасти, и суммирование их по длине и азимуту лопасти, или через вычисление массы воздуха, отбрасываемого в направлении оси вращения винта. Рассматривается итерационный цикл для вычисления тяги. В качестве примеров описывается моделирование продольного движения одновинтового вертолета при посадке с неработающим двигателем, взлете по-вертолетному и по-самолетному. Приводятся блок-схемы вычислений. Рассматривается программа вычислений при моделировании силовой установки вертолета, состоящей из двух газотурбинных двигателей. И. Д. Алимов

3612. Расчет статически неопределимых систем с использованием быстродействующей электронной вычислительной машины. Резников Р. А., В сб.: Материалы по стальн. конструкциям. **3.** М., 1958, 227—237

Рассматриваются вопросы, связанные с применением средств вычислительной техники для статического расчета плоских стержневых статически неопределимых систем. Описывается в общих чертах программа СМ-1, для машины М-2, дающая решение этой задачи при достаточно широком классе исходных параметров. В качестве метода решения используется модификация метода сил. Программа состоит из 526 команд. Общее заполнение памяти составляет 1217 ячеек. В зависимости от имеющихся параметров решение одного варианта задачи на машине требует от 10 мин. до 2 час. машинного времени. Необходимо отметить, что многие разделы в схеме расчета по программе СМ-1 должны выполняться вручную. Автор отмечает, что в настоящее время ведется разработка программы СМ-2, в которой указанный недостаток будет в основном преодолен. Решение основной системы алгебраических линейных уравнений в первом варианте происходило с помощью итерации Зейделя. Однако в связи с малой скоростью сходимости итерационного процесса в дальнейшем для получения решения применялся метод Гаусса. Библ. 3 назв. Д. А. Поспелов

3613. Применение счетных машин при расчете сооружений. I. Нариока Масао. Добоку гаккайси, J. Japan Soc. Civil Engrs, 1958, **43**, № 12, 43—51 (японск.)

3614. Об автоматизации расчетов строительных конструкций. Резников Р. А. В сб.: Механиз. инж.-техн. расчетов при проектир. сооруж. М., Госстройиздат, 1959, 75—92

3615. Некоторые применения цифровой вычислительной машины для расчетов сооружений. Велетсос

(Some applications of a digital computer in structural research. Veletsos A. S.), Civil Engng, 1958, **28**, № 5, 62—65 (англ.)

3616. Использование современных вычислительных машин при расчете сооружений. Клаф (Use of modern computers in structural analysis. Clough Ray W.), J. Struct. Div. Proc. Amer. Soc. Civil Engrs, 1958, **84**, № 3, Part 1, 1636—1—1636—20 (англ.)

Статья общего характера.

3617. Расчет напряжений в трубопроводах (Computing stresses in pipe systems), Fluid Handling, 1958, № 96, 5—6 (англ.)

Расчет напряжений в трубопроводах на машине «Пегас».

3618. Цифровые вычислительные машины для исследования сети трубопроводов. Грейвс, Бранскам (Digital computers for pipeline network analysis. Graves Quintin B., Branscome Don), J. Sanit. Engng Div. Proc. Amer. Soc. Civil Engrs, 1958, **84**, № 2, 1608—1—1608—18 (англ.)

3619. Вычислительная машина помогает в проектировании линии газопровода. Томас (Computer aids in gas pipe line design. Thomas Harold E.), Pipe Line Ind., 1956, **5**, № 5, 43—46 (англ.)

3620. Расчет теплообмена на автоматических вычислительных машинах. Пейзер (Design of heat exchangers on automatic computers. Peiser A. M.), Petrol. Engr, 1957, **29**, № 11, C12—C16 (англ.)

3621. Применение вычислительной машины к решению проблем нефтеочистительных заводов. Дагналл, Мейерс (The application of a computer to refinery problems. Dagnall B. D., Mayers P.), J. Inst. Petrol., 1957, **43**, № 400, 115—118. Discuss., 119—123 (англ.)

3622. Применение математической логики к электрическим системам. Говеа-Портела (Aplicação da lógica simbólica aos sistemas eléctricos. Gouvéa Portela António), Técnica, 1958, **32**, № 278, 253—264 (порт.)

Статья общего характера.

3623. Практическое использование интегрирующих устройств для решения математических проблем в технике. Гофман (Der praktische Einsatz von Integrieranlagen für mathematische Probleme der Technik. Hoffmann Hans), Regelungstechnik. Mod. Theorien und ihre Verwandbarkeit. München, R. Oldenbourg, 1957, 343—351. Diskuss., 351—352 (нем.; рез. англ.)

3624. Автоматизация, большие вычислительные машины и технические расчеты. Пашкис (Automatic techniques, large computers, and engineering calculations. Paschkis V. Paper. Amer. Soc. Mech. Engrs, 1958, № AUT-4, 7 pp., ill.) (англ.)

Статья общего характера.

3625. Обработка гидростатических данных для кораблей при помощи цифровых вычислительных машин. Канторовиц (Calculation of hydrostatic data for ships by means of digital computers. Kantorowitz E.), Ingeniören, 1958, **C2**, № 1, 21—25 (англ.)

3626. Счетно-решающие машины и их применение на железнодорожном транспорте. I. Принцип действия и устройство автоматических вычислительных машин. Моисеев В. Д. — 2. Автоматическое управление поездом с помощью математической машины. Николаев Н. С., Электр. и тепловоз. тяга, 1958, № 10, 12—19

3627. Вычислительные машины для Британских железных дорог (Computers for British Railways), Electronic Engng, 1957, **29**, № 356, 503 (англ.)

3628. Европейские вычислительные машины открывают новые возможности автоматизации конторской работы. Шуфф (Europäische Rechenanlagen eröffnen neue Möglichkeiten zur Automation der Büroarbeit. Schuff H. K.), Bürotechn. + Organis., 1958, **6**, № 8, 586—590, 592—594 (нем.)

Приводится признание американцев, что в результате использования цифровых вычислительных машин для коммерческих целей сложилось впечатление, будто бы ни одна такая машина не является экономически выгодной. В Западной Германии, где устанавливаются большие американские машины, это впечатление еще больше усиливается вследствие различного уровня развития промышленности, высокой стоимости импортных машин и применения их в таких областях конторской работы, в которых с успехом в течение уже многих лет используются перфокарточные машины. Несколько лучше положение вопроса о применении цифровых вычислительных машин для технических расчетов, но и здесь далеко не полностью используются возможности этих машин. В настоящее время в связи с созданием и развитием европейских вычислительных машин для коммерческих целей картина существенно изменяется, и открываются новые перспективы автоматизации конторской работы. В общих чертах характеризуются английские машины «Меркурий» (Mercury) (РЖМат, 1957, 5213; 1958, 1623), «Пегас» (Pegasus) (РЖМат, 1956, 1713, 4133), «Эллиот-405» (Elliot 405) (РЖМат, 1957, 7463; 1959, 930), французские ГАММА-3 (Gamma 3) (РЖМат, 1957, 8983), ГАММА-60 (Gamma 60) (РЖЭ, 1959, 20460). Подробно освещаются вычислительные машины западногерманских фирм. Технические характеристики этих машин в применении для автоматизации конторской работы приведены в таблице (стр. 177—178), где для сравнения даны некоторые американские, английские и французские вычислительные машины. Высокую оценку автор дает вычислительной машине «XI», выпущенной голландской фирмой «N. V. Electrologica». Эта машина пригодна как для торговых и управленческих, так и научных целей, что достигается всесторонним использованием часто сменяемого оборудования. «XI» — машина параллельного действия, асинхронная, состоит из центрального устройства, содержащего логические и арифметические блоки. К этому устройству присоединяются вводные, выводные и запоминающие устройства. Время сложения с учетом времени обращения к оперативному запоминающему устройству составляет 60—70 мксек., время умножения менее 500 мксек. В «XI», наряду с оперативным запоминающим устройством, имеется еще и пассивное. Технические данные этой машины также приведены в таблице. Примечательным для этой машины является конструктивное выполнение. Она содержит более десятка вставных блоков, залитых синтетической массой. Блоки отличаются исключительной невосприимчивостью к тепловым и механическим перегрузкам. Автор на конкретных примерах показывает, что в некоторых случаях «XI» производит вычисления быстрее и дешевле, чем в машинах такого класса, как НОРК. В. Е. Кравченко

3629. Специальные требования к вычислительным машинам для коммерческих и административных применений. Томпсон (Special requirements for commercial of administrative applications. Thompson T. R.), Automat. Digital Comput., London, 1954, 85—99. Discuss., 100—101 (англ.)

3630. Использование вычислительных машин в составлении калькуляции стоимости. Херши. Шварц (Computers in management cost accounting. Hershey R. L., Schwartz C. R.), Chem. Engng Progr., 1957, **53**, № 7, 333—337 (англ.)

3631. Бухгалтерские электронные счетные машины. Бальди (Il ragioniere elettronico. Baldi Gianni), Pirelli, 1955, **8**, № 4, 40—41 (итал.)

3632. Применение электронных вычислительных машин в страховых учреждениях. Конференция 17—18 мая 1957 г. в Швейцарской высшей технической

К реф. 3628

Таблица

		Гамма-3 Gamma 3	Нэйшнл Эллиот-405 National Elliot 405	Ремингтон УФК Remington UFC	Телефункен дигитал рехнер Telefunken Digital Rechner	ИБМ-705-I IBM 705 I	Стандарт электрик ЭР56 Standard Elektrik ER56	Сименс 2002 Siemens 2002	ИБМ-650 IBM 650	Электрологика Electrologica	Цузе Z22 Zuse Z22	Гамма-60 Gamma 60
1	Месячная арендная плата за: оборудование средней комплектности в тысячах западногерманских марок,	20	—	40		120	15		35	10	—	100
	оборудование большой комплектности в тысячах западногерманских марок	40	—	100		300	100		80	25	—	180
	Покупная цена: в миллионах западногерманских марок	1,4—2,6	0,8—2	2—6	≈3	5—15	1—5	<1,2	1,3—5	0,5—2,5	0,2	5—10
2	Средняя скорость выполнения операций в опер/сек.	600	2000	150	50000	3500	1500	3000	450	10000	20	14000
	Среднее число операций, ИБМ—650-100*	150	150	70		160	140	140	100	40	70	
3	Тип оперативного запоминающего устройства (о. з. у.)	ЛЗ	ЛЗ	МБ	МС	МС	МС	МС	МБ	МС	МБ	МС
	Емкость о. з. у., измеряемая количеством адресов	71—103	128—512	1000	1024—4096	20000	1000—10000	2000—10000	2000	1024—32768	8000	4096
	Время обращения к о. з. у. в *мсек*	0,086	0,769	2,5	—	—	—	—	2,4	—	5	—
4	Тип промежуточного запоминающего устройства (п. з. у.)	МБ	МД	МБ	—	МБ	МБ	МБ	—	—	—	МБ
	Емкость п. з. у., измеряемая количеством адресов	512—1024	128—256	10×1500	—	30×300	6000	10000	—	—	—	32768
	(длина блока в „словах")	(16)	(128)	(10)	—	(200)	(перем.)	(перем.)				
	время обращения к п. з. у. в *мсек*	11	19	17,5	—	8	10	—	—	—	—	10
5	Внешнее запоминающее устройство	—	16МЛ	МЛ	МЛ	МЛ	МЛ	—	4МЛ, 4М	МЛ, RAM		МЛ
	Емкость RAM, измеряемая количеством адресов	—	—	—	—	—	—	—	4× 10000	×1 млн.		—
	(длина блока в „словах")								(60)	(25)		
	длина „слова" в десятичных разрядах	12	9,4	12	14	1	7	12	10	7,67	10,69	6
6	Средства, при помощи которых вводится информация (кроме магнитной ленты)	ПК	ПЛ, ПК	ПЛ, ПК	МЛ	ПК	ПЛ, ПК	ПЛ	ПК	ПЛ, ПК	ПЛ	ПК, ПЛ
	Скорость ввода перфокарт в шт/час	2×9000	36000	×24000	косвенно	×15000	28800	—	*a*×12000 *b*×9000	×7200 ×9000 ×42000	— —	×18000
	Возможная скорость ввода перфокарт при выполнении 200 операций на каждой перфокарте **	2	7	1		11	5,4	—	2,3	120	—	

Продолжение табл.

		Гамма-3 Gamma 3	Нэшил Эллиот-405 National Elliot 405	Ремингтон УФК Remington UFC	Телефункен дигитал рехнер Telefunken Digital Rechner	ИБМ-705-I IBM 705 I	Стандарт электрик ЭР56 Standard Elektrik ER56	Сименс 2002 Siemens 2002	ИБМ-650 IBM 650	Электрологика Electro logica	Цузе Z22 Zuse Z22	Гамма-60 Gamma 60
7	Средства вывода информации (кроме магнитной ленты)	ПК, ПУ	ПЛ	ПЛ, ПК, ПУ	МЛ	ПК, ПУ	ПЛ, ПУ	ПЛ, ПМ	ПК, ПУ, ПМ	ПК, ПМ, А, ПУ	ПЛ, ПМ	ПК, ПЛ, ПУ
	Скорость вывода перфокарт в шт/час	2×9000	—	×12000	косвенно	×6000	—	—	a×6000	×7200 500×9000	—	×18000
	Скорость печатания выходных данных в строк/час	2×9000	только косвенно	36000	—„—	×9000, 60000	18000	500	b×9000	54000	500	×18000
	Число вводных и выводных устройств	4	20	24	неограниченно	неограниченно	неограниченно	3	6	неограниченно	3	неограниченно
8	Основной элемент машины (электронная лампа или полупроводниковый триод)	ЭЛ	ЭЛ	ЭЛ	ПТ	ЭЛ	ПТ	ПТ	ЭЛ	ПТ	ЭЛ	ЭЛ

* Указывается, сколько операций необходимо выполнить на цифровой вычислительной машине, чтобы решить задачу, которая потребовала на ИБМ-650 100 шагов программирования.

** Указывается, сколько перфокарт в секунду может быть введено в машину, если по карте выполняется вдвое больше операций, чем указано в строчке. Обозначения: ×—практически без ограничения, $a+b=3$, А — возможно подключение моделирующего устройства, ЛЗ — линии задержки, МБ — магнитный барабан, МД — магнитные диски, МЛ — магнитная лента, МС — магнитные сердечники, ПК — перфокарты, ПЛ — перфоленты, ПМ — пишущая машинка, ПТ — полупроводниковый триод, ПУ — печатающее устройство, ЭЛ — электронные лампы, RAM — фирменное название внешнего запоминающего устройства большой емкости.

школе. **Цюрих** (Einsatz elektronischer Rechenmaschinen im Versicherungsbetrieb. Tagung vom 17./18 Mai 1957 in der Eidgenössischen Technischen Hochschule, Zürich), Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmathematiker, 1957, **57**, № 2, 221—223 (нем.)

3633. Применение электронных вычислительных машин в Американском страховом обществе. Шпринг (Einsatz elektronischer Rechenmaschinen bei amerikanischen Versicherungsgesellschaften. Spring Osc. W.), Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmathematiker, 1957, **57**, № 2, 231—246 (нем.)

3634. Использование вычислительной машины для некоторых операций классификации. Бут (Use of a computer for certain operations of classification. Booth Andrew D.), Computers and Automat., 1957, **6**, № 4, 18—19, 37 (англ.)

3635. Направления развития вычислительных машин для управления промышленными процессами в СССР. Ушаков (Soviet trends in computers for control of manufacturing processes. Ushakov V. B.), Instrum. and Automat., 1958, **31**, № 12, 1960—1961 (англ.)

Коротко описываются три направления развития вычислительной техники: вычисление сложных параметров производственных процессов, например, автоматическое управление процессами, происходящими в доменной печи; вычислительные машины для определения скорости резания и машины для тренировки операторов атомных электростанций, быстродействующих прокатных станов и т. п. А. В. Шилейко

3636. Использование специализированной вычислительной машины для контроля качества. Амбер, Амбер (Special purpose computers applied to quality control. Amber George H., Amber Paul S.), Automat. Control, 1958, **9**, № 4, 54—55 (англ.)

Описывается метод использования специализированной электронной вычислительной машины для непрерывного вычисления среднего значения и среднеквадратичного отклонения параметра, характеризующего качество изделия, получаемого в результате автоматизированного производственного процесса. В случае выхода результатов вычислений за установленные пределы генерируются сигналы обратной связи, воздействующие на процесс. Приводятся упрощенная блок-схема машины, состоящей из операционных усилителей и термоэлементов, служащих для возведения в квадрат, и блок-схема включения машины в контур системы автоматического управления. А. В. Шилейко

3637. Использование автоматических вычислительных машин при испытаниях счетчиков. Крон (Rechenautomaten bei der Zählerprüfung. Krohn Hans), Elektrizitätswirtschaft, 1957, **56**, № 20, 742—747 (нем.; рез. англ., франц.)

3638. Вычислительная машина в контроле производства. Кис (Computer-assisted production control. Kease W. J.), Instn Prod. Engrs J., 1957, **36**, № 7, 423—441 (англ.)

3639. Использование цифровой вычислительной машины в управлении производством. Фистер, Грабб (Fitting the digital computer into process control. Phister Montgomery, Jr, Grabbe Eugene M.), Control Engng, 1957, **4**, № 6, 129—136 (англ.) Статья общего характера.

3640. Вычислительная машина для управления механическими станками (Computer control of machine

tools), Mach. Lloyd. Overseas Ed., 1956, **28**, № 20, 75—80 (англ.), 74 (исп.)
Описание системы «Ферранти».

3641. Математический аппарат в линейных сервомеханизмах. II, III. Перре (Les instruments mathématiques dans les servomécanismes linéaires. II, III. Perret René), Automatisme, 1958, **3**, № 1, 17—27; № 8, 299—302 (франц.)
Часть 1 см. РЖМат, 1958, 4829. См. также РЖМат, 1959, 1664.

3642. Различные применения вычислительных машин. Дженкинсон (Communicating with computers. Jenkinson George H.), Battelle Techn. Rev., 1958, **7**, № 4, 3—8 (англ.)
Статья общего характера.

3643 К. Механизация инженерно-технических расчетов при проектировании сооружений. Сб. статей. М., Госстройиздат, 1959, 148 стр., илл., 4 р. 70 к.

3644 К. Основы автоматического регулирования. Т 2. Элементы систем автоматического регулирования. Ч. 2. Корректирующие элементы и элементы вычислительных машин. Ред. Солодовников В. В., М., Машгиз, 1959, 454 стр., илл., 16 р. 75 к.

См. также: 3486

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Абалакин В. К. 3059
Абрамян Б. Л. 3097, 3106,
Аврух М. Л. 3556
Азбелев Н. В. 2962
Айзерман М. А. 2996
Акушский И. Я. 3505
Алексеева Г. П. 3355
Алексич Г. 2817
Аллик К. К. 3211 Д
Алябьева Е. Н. 3334К
Амбарцумян Г. А. 2544
Андрианов С.Н.3151
Аносов Д. В. 3071
Антоновский М. Я. 2797 Д
Араки К. 2779
Аринь Э. И. 3535
Аронович Г. В. 3063
Асатиани Л. Г. 3524К
Ахадова М. А. 2580

Б

Бабич В. М. 3094
Баблоян А. А. 3106
Бабушка И. 2879, 3461
Багдоев А. Г. 3085
Бари Н. К. 2530
Батунер Л. М. 3490
Бахтин И. А. 3223
Бегельбаев А. К. 3067
Бекташи Т. Г. 2874, 2875
Березанский Ю. М. 3027
Березкина Э. И. 2630 Д
Берман Д. Л. 2839
Благовещенский Н.И. 2639
Блинчевский В. С. 2975
Блох З. Ш. 3205
Боровик В. Н. 3363
Борсук К. 2758
Бриш Н. И. 2918
Бродский М. Л.3229
Бронштейн И. Н. 2649
Брудный Ю. А. 2811
Былов Б. Ф. 2897
Бычков Б. П. 2536

В

Валов Г. М. 3101, 3104
Вальтер А. 2549
Ван Цзы-кун 3264
Варвак П. М. 3459
Василенко П. М. 3509
Василишин С. А. 2891
Васильев А. М. 3297
Векслер Д. 2976
Венков Б. Б. 2796
Виноградов Н. Н. 2927
Виссонова И. А. 3556
Вишик М. И. 3010, 3040
Владимиров В. С. 3152 Д
Власов В. З. 3112
Власов И. М. 2896, 2905
Власова З. А. 3454
Войцеховская К. Ф. 3139 Д
Воробьев Л. Н. 2633
Вркоч И. 2974
Вяткин Г. П. 3310

Г

Габисония О. 2804
Гаврилов А. Ф. 2605
Гаврилов В. Д. 2553
Галев Л. 3323
Гантмахер Ф. Р. 2996
Гейдельман Р. 3394
Гельман А. Е. 2911
Гельфанд И. М 3005, 3237, 3500
Гельфгат Б. Е. 3057
Георгиев Г. И. 2665 К
Гермаидзе В. Е. 3003 Д
Глускин Л. М. 2596
Гокиели Л. П. 2551
Головань В. М. 2894
Голод Е. 2795
Голубев Г. В. 3092
Гольдберг А. Г. 2657 К
Горбовский Б. Е. 3140 Д
Горбунов К. Г. 3339
Гордон И. И. 2754
Горский В. В. 3572
Гнеденко Б. В. 2574
Гранас А. 2760
Григорьян А.Т. (ред). 2624 К
Громова Л. Г. 3504
Гуань Дин-хуа 3117
Губарь Е. Г. 2999
Губарь Н. А. 2937
Гусак А. А. 3303, 3304
Гутенмахер Л. И. 3556
Гутник Л. А. 2725

Д

Данжуа А. 2752
Данилова И. Н. 3128
Даугавет И. К. 3518Д
Делоне Б. Н. 2607
Депман И. Я. 2589
Деркачев А. А. 3477
Димов Л. 3487
Дмитриев В. И. 3121
Днестровский Ю. Н. 3502
Дружинина Г. И. 3501
Дуничев К. И. 3393
Дыманов Р. Г. 3350

Е

Егоров В. И. 2769
Егорова И. А. 2838
Ейдельман С. Д. 3197
Ельшин М. И. 2956
Епифанова А. П. 2628 К
Ермаков В. С. 3130
Ерофеев А. А. 2691
Еругин А. Н. 2935
Ефимов Н. В. 3448
Ефремович В. А. 2761
Ешуков Л. Н 2916

Ж

Жаутыков О. А. 2883
Жекулин А. С. 2652 К
Железнов Е. И. 2928, 2973
Жигулев В. Н. 3123, 3126
Жирнова Г. А. 2834

З

Заездный А. М. 3492
Зейналов С. С. 3142
Зеленкевич Г. 3593
Зубов В. И. 2961, 2987, 2993
Зыков А. А. 2683

И

Иванов А. В. 3130
Иванов Е. Г. 2946, 2989
Ивницкий Т.Г. 2631 Д
Илиев Л. 2531
Ильин В. П. 3503
Исаханов Р. С. 2872 Д
Исачкин Б. Я. 3479
Итимацу 3021
Ишкова А. Г. 310

К

Калицин Г. 3311
Камацу Д. 2776
Канторович Л. В. 3507
Карапетян М. Е. 3105
Карапетян С. Е. 3392
Карасева Т. М. 2953
Карачаров К. А. 2895
Карницкий П. Н. 2654 К
Карпелевич Ф. И. 3403
Карпов К. А. 3532
Касьянюк С. А. 2843
Катков Г. Ф. 3399
Кац И. С. 2920
Квачко М. Е. 2818 Д
Кельзон А. С. 2572
Ким Е. И. 3149
Киселев А. А. 3090
Климов В. Н. 3133
Клюев В. В. 2871 Д
Коваленко К. Р. 2932
Коваль П. И. 3460
Ковшов А. И. 2869 Д
Коддингтон Э. А. 3002 К
Козийчук П. Г. 3493
Колесников Л. А. 3464
Кольман Э. Я. 2562, 2690
Комарницкая О. И. 3072
Комацу Д. 2776
Комладзе Г. М. 3517 Д
Корнейчук Н. П. 2831
Коробейник Ю. Ф. 2985, 3145
Коробов Н. М. 3461
Коростелев Л. В. 3310
Костомаров Д. П. 2902
Котий О. А. 3371
Кочев В. А. 2159

Красносельский М.А. 2994, 2997
Крох 3353
Кудо Т. 2776
Кузнецов А. В. 2671
Кузнецова Д. С. 3050
Куклес И. С. 2926, 2933, 2938
Куликов Н. К. 2877
Куликов Н. П. 3038
Куницкий Н. П. 3496
Куратовский К. 2757
Курепа Г. 2753
Кущенко В. С. 3482, 3604 К
Куюн А. И. 2553

Л

Лаврентьев М. А. (ред.) 2624 К
Лапко А. Ф. 2540
Лебедев В. П. 2614
Лебедева Л. П. 2830
Левинсон Н. 3002 К
Ли Го-пин 2873
Лизоркин П. И. 2812
Линник Ю. В. 2747
Литвинов Н. В. 3462
Лихтарников Л. М. 3150
Ли Янь 2577
Лобачев С. В. 3147
Лозинский С. 3508
Ломоносов М. И. 3255 Д
Лу Вэнь-дуань 2727
Лышевский А. С. 3089
Люстерник Л. А. 3040
Ляпин Е. С. 2596
Ляпунов А. А. 2555, 3542

М

Майстров Л. Е. 2575
Макаренко Г. И. 3037
Максудов Ф.Г. 3256 Д
Малышев А. В. 2716
Маневич В. А. 3352
Манолов С. 3296
Маркосян С. А. 2936
Маркус А. С. 3253 Д
Марчук Г. И. 3501
Маурин Л. Н. 2888
Машкович С. А. 3504
Медведев Ф. А. 2629 Д
Мельников И. Г. 2703, 2704
Меньшиков Г. Г. 3579
Меньшов Д. Е 2530
Мидзуно К. 2777
Милейковский И. Е. 3102
Минасян Р. С. 3113
Минц Р. М. 2960, 2978
Миронов В. Т. 2870 Д
Мітропольський Ю. О. 2601
Митягина В.А. 3521 Д
Михайлова К. А. 2668
Моисеев В. Д. 3626
Монастырский М. Л. 3295
Морозов Э. Н. 3254 Д
Моросанов И. С. 2546
Мохель Л. Л. 3556
Мучник А. А. 2672, 2685
Мысовских И. П. 3463
Мышкис А. Д. 2999
Мякишев В. П. 3150

Н

Нагибин Ф. Ф. 2636
Назаров И. А. 3495
Накаока М. 2778
Нариока М. 3613
Наталевич В. К. 2633
Неймарк Ю. И. 2995
Немыцкий В. В. 2532
Нешков К. И. 2634
Нижник Л. П. 3455
Никитин В. В. 2652 К
Никитин В. П. 3496
Николаев Н. С. 3626
Ниномия 3021
Норден А. П. 3297, 3417

О

Обухов А. М. 3288
Оикэ И. 3475
Олевский А. М. 2814
Онищенко М. Н. 2659 К
Орлич В. 3224
Орловский Э. С. 2674
Орурк И. А. 3073
Отэрасу М. 3558

П

Палувер Н. В. 3342
Панов А. М. 2940
Пахарєва Н. О. 2854
Пејовић Т. 3171 К
Пеньков Р. М. 3302
Перов А. И. 2997
Персидский К. П. 3484
Перчинкова-В'чкова Д. 2923
Петрина Д. Я. 3118
Петровский И. Г. 3005
Пиконе М. 2548
Платонова С. Т. 3501
Погребысский И. Б. 2574
Погудалина Е. И. 3501
Положій Г. М. 2853, 2854
Полосуев А. М. 2695
Полосухин А. П. 2535
Померанчук И. Я. 3251
Попович Т. 3499
Порсин Ю. Я. 3341
Проскуряков И. В. 3442
Прудковский Г. П. 3573
Пупко В. Я. 3501
Пховребадзе Д. С. 3141 Д
Пятецкий-Шапиро И. И. 3237

Р

Радциг Ю. А. 3202
Разроев В. 3593
Разумихин Б. С. 2991
Райков Д. А. 3218
Ракова Э. С. 2539
Рапопорт И. М. 3228
Рахматуллина Л. Ф. 2967
Резников Р. А. 3612, 3614
Рейзинь Л. Э. 2983, 3004 Д
Решов Н. О. 2614
Ривкинд Я. И. 3241
Рождественский Б. Л. 3054, 3055
Розенвассер Е. Н. 3070
Розенфельд Б. А. 2581, 2582
Рубинштейн Л. И. 3093
Рузавин Г. И. 2552
Русскевич Н. Л. 3345 К
Рутицкий Я. Б.3148
Рыжков В. В. 3415 Д
Рыжов Н. Н. 3347
Рышков С. С. 2759
Рябенький В. С. 3516 К

С

Савельев Г. И. 2633
Салехов Г. С. 2550
Самарский А. А. 3453
Санин А. И. 2650
Свекло В. А. 3096
Светланов А. В. 2887, 2889
Севастьянов П. Я. 2638
Семенов А. С. 3580
Сидзума Й. 2784
Сидоров А. Ф. 3075, 3076
Сикорский Р. 2756
Симада Н. 2784
Симонов-Емельянов Ю. А. 3060
Симонович Б. П. 3062
Скоробогатько А. А. 2853
Скуридин Г. А. 3095
Слюсарев Г. Г. 2587
Смелов В. В. 3501
Смирнов В. И. 2660 К
Смогоржевский А. С. 3327 К
Смоловик И. И. 3098
Смолянский М. Л. 2635
Соболев С.Л. 3010
Соболь И. М. 3520 Д
Соколов Ю. Д. 3056
Солдатов М. А. 3519 Д
Солонников В. 3025
Солодовников В. В. 2556, 3644 К
Соминский И. С. 2655 К
Стаматис 2579
Станюкович К. П. 3077, 3134
Старжинский В. М. 2912
Стинрод Н. Е. 2763
Стойлов С. 2860
Сугахара М. 2781
Судзуки Х. 2783

Т

Табаровский А. М. 2971
Тамура И. 2782
Тартаковский В. А. 2693, 2694
Тептин А. Л. 3465
Тиман А. Ф. 2811
Тихомирова Е. С. 2761
Тихонов А. Н. 3453
Тода Х. 2780
Трубников Н. В. 3561
Туманян С. Х. 2544
Турецкий А. Х. 2840
Туркин В. К. 3496
Тютерев И. П. 3501

У

У Вэнь-цзюнь 2762
У Сюэ-моу 2843

Ф

Фаге М. К. 2893
Фалевич Б. Я. 2675, 2676
Фарзетдинов М. М. 3127
Фейнберг С. М. 3500
Филин А. П. 3498
Филиппов А. Ф. 3516 К
Фиников С. П. 3297
Фихтенгольц И. Г. 3401
Флексер М. Ш. 3100
Фридман А. А. 2606
Фролов А. С. 3500
Фын Кан 3198
Фядзенка А. С. 3404

Х

Хавин В. П. 2844
Халанай А. 2914
Халилов З. И. 2534
Харасахал В. Х. 2899
Харитоненко П. И. 3458
Хаскин А. М. 3346 К
Ходжаев Л. Ш.3252
Хольшева А. Ф. 3556
Хохряков А. Я. 2999
Хэ Ло 2576

Ц

Цинь Юань-сюнь 2939
Цукерник Л. В. 3478
Цховребадзе Д. С. 3141 Д

Ч

Ченцов Н. Н. 3500
Черкасов А. Н. 2955
Чернявский В. С. 2673
Четверухин Н. Ф. 3337
Чжан Сы-ин 3069
Чикин Л. А. 2602
Чинаев П. И. 2546, 3068

Ш

Шао Пин-цзун 2833
Шапиро Я. 3411
Шафаревич И. Р. 3362
Шахсуваров Д. Н. 3122
Шварц А. С. 2790
Шевело В. Н. 2944
Шерватов В. Г. 2658К
Шестаков А. А. 2958
Шефтель З. Г. 3168
Шилов Г. Е. 3005

Шиманов С. Н. 2910, 2974
Шишкин А. А. 2922
Шнел А. А. 3535
Шустеф Р. М. 2651

Э

Эйдельнант М. И. 3258
Эльсгольц Л. Э. 2915

Ю

Юдицкий М. М. 3340
Юза М. 3356
Юшкевич А. П. 2581, 2582, 2624 К (ред.)
Ющенко Е. Л. 3455

Я

Яворовский Я. 2755
Яглом А. М. 3288
Якаб И. Г. 3208
Якоб К. 3080
Якубович В. А. 2898, 2913
Ямагути 2998
Яненко Н. Н. 3076
Янов Ю. И. 2685
Ярышева И. М. 3456

A

Adem J. 2921
Adke S. 3276
Agarwal N. 3188
Akaike H. 3284
Alaci V. 3012
Al-Dhahir M. W. 3351
Alexits G. 2815
Almeida Braga N. de 3156
Al-Salam W. A. 3182, 3190
Amber G. H. 3636
Amber P. S. 3636
Amundson N. R. 3283
Andonie G. S. 2612
Andree R. V. 3177
Ansorge R. 3471, 3476
Antosiewicz H. A. 2977, 3610
Aris R. 3283
Armitage J. V. 2712
Aronson D. G. 3041
Arsenault W. R. 3564
Asser G. 2681
Atkinson F. V. 2969

B

Babuška I. 2879
Bach G. 3144
Bacşiş Gh. 2554
Bagnato L. 3326 К
Baier O. 3324
Bair B. L. 3562
Bajraktarević M. 3179
Bilan V. 2573 К
Baldi G. 3631
Ballantine J. A. 3158
Balzer F. 3529 К
Banditch I. 2884
Baravalle H. 3298 К
Barvínek E. 2957
Bastien M. 3277
Bauer F. L. 3483
Bellman R. 3023, 3143
Banay J. 3578
Bennett B. M. 3273
Benthem C. W. 3136
Berkeley E. C. 2688
Berman G. N. 3172 К
Bernard D. 3424
Berstein I. 2775
Bessaga C. 3221, 3222
Beth E. W. 2558
Bielecki A. 2642
Bihari I. 2881
Bijl J. 3335 К
Biondi E. 3539
Birch B. J. 2714
Bögel K. 2561
Bognár M. 2300
Böhm J. 3511 К
Boivin G. 3466
Boltjanski W. 3320
Bompiani E. 3347 К
Boniforti A. 3563
Booth A. D. 3543, 3588, 3634
Booth K.H. V. 3601 К
Boothby W. M. 3425
Borel E. 2689
Borsuk K. 2771, 2772
Borwein D. 3176
Bouligand G. 2568
Bower G. G. 3565
Bramble J. H. 3049
Branscome D. 3618
Bremermann H. J. 2862
Brennan J. G. 3443
Bridoux G. 3569
Brillouet G. 3138 Д
Bruijn N. G. 2826
Bruijn P. J. 3328
Bukovics E. 3583
Bunescu P. 2573 К
Burniat P. 3368—3371

C

Calderon A. P. 3007
Canobbio E. 3124, 3125
Carl J. 3332 К
Carlitz L. 3182, 3185, 3190
Carruccio E. 2592
Cartan E. 2625 К
Castanias R. P. 3544
Castelnuovo E. 2632
Castro Brzezicki A. de 2892
Cateni L. 2664 К
Cattabriga L. 3047
Ceccato S. 3600
Cerf G. 3006
Chako N. 3162
Chartier F. 3257
Chen Kien-kwong 2832
Chin Yuan-Shun 2939, 2941
Christiano J. G. 3161
Chu L. J. 3533 К
Clair R. 2571 К
Claringbold P. J. 3267
Clark W. A., Jr 3609
Cloizeaux J. 3000
Clough R. W. 3616
Coburn N. 3081
Cohen E. 2735
Cole K. S. 3610
Coleman B. D. 3278
Coleman C. 2959
Conte S. D. 3048
Conti R. 2925, 2972, 3170 К
Copley G. N. 2719
Corbato F. J. 3533 К
Cordes H. O. 2924
Costinescu O. 2545
Courant R. 2653 К
Court N. A. 2585
Cox D. R. 3272
Creangă I. 3396
Cremer H. 3066
Croci R. 3124, 3125
Croft H. T. 2801
Császár A. 2807, 2810
Cugiani M. 2751 К
Cundy H. M. 3586

D

Dadda L. 3607
Dagnall B. D. 3621
Dames R. T. 3048, 3457
Danicic I. 2717
Davenport H. 2711, 2714
Deaux R. 3354, 3388
Deckert A. 3331 К
Dekker J. C. E. 2667
Delange H. 2705
Delury D. 2567
Demaria D. C. 3438
Dembowski P. 3437
Dempster A. P. 3269
Denjoy A. 2968, 2982
Derski W. 3109, 3110
Derwent J. E. 2787
Destouches J. L. 2560
Dettwiler H. 3529 К
Dharmadhikari S. W. 3276
Dieter U. 2702
Dobrescu A. 3395 3429
Dobrescu E. 2813
Dobrescu L. 3391
Dobrescu-Purice L. 3029, 3135
Dobrowolski W. W. 3606 К
Doležal V. 3216
Dow P. C., Jr 3568
Drăgan C. 3305
Dreyfus P. 3549
Duff G. F. D. 3008
Dugas R. 2622 К
Dumitraş V. 3408—3410
Dürr K. 2692 К
Durstine R. M. 3114
Dusi Daniele M. 3326 К
Duverger L. 3548, 3599
Dyer E. 2773, 2774
Dzyr A. 2731

E

Eckart G. 3289
Effertz F. H. 3066
Egerváry E. 2837
Elgot C. C. 2686
Elianu I. P. 3420
Eltermann H. 2733
Erdös P. 2764
Ershov A. P. 3537
Erzin C. Z. 3103
Estrugo J. A. 2743
Evans G. C. 2765
Ezeilo J. O. C. 2966

F

Farley B. G. 3609
Farnell A. B. 3493
Faure R. 2945, 2980
Fegerstrom W. H. 2640
Feldbaum A. A. 3065
Fels E. M. 2563
Felsen L. B. 3015
Fenchel W. 3447
Fer F. 2878
Ferguson A. E. 3574
Fisher H. T. 3301
Fleming W. H. 3213
Fort T. 2890
Forte B. 3309
Fortini R. 2664 К
Friedmann N. E. 3452
Fueter E. 2583
Fuka J. 2850
Fung Kang 3198

G

Gallarati D. 3377
Ganea T. 2775
Gans D. 3357
Garner N. R. 3279
Gáspár G. 3159
Gautschi W. 3468
Gehring F. W. 2868
Gemignani G. 3370
Georgi H. 3332 К
Gherardelli F. 3387
Ghermănescu M. 3161
Ghosh K. M. 3133
Gilmore J. T., Jr 3609
Giunter N. M. 2661
Godeaux L. 3291, 3365—3367, 3372
Goldhagen E. 3053
Goldsmith J. A. 3596
Gonczarow W. L. 2590
Górski J. 2851
Gotlieb C. C., 3602
Goto K. 3418, 3419
Gouvéa Portela A. 3622
Grabbe E. M. 3633
Gradwell C. F. 3599
Grant P. 3541
Grauert H. 2864
Graves Q. B. 3618
Gravett K. A. H. 3240
Greenspan D. 3449, 3451
Greguš M. 2964
Grémillard J. 3058
Grosche G. 3336 К
Grotemeyer K. P. 3333 К, 3446
Grünbaum B. 3439, 3441
Gumin H. 3594
Gutwirth A. 3374

H

Hadwiger H. 3294
Hahn W. 2992
Haimovici A. 3019
Hajek J. 3064
Halanay A. 2929
Hale J. K. 2900, 2986
Hällström G. 2859
Hamstrom M.-E. 2774
Hanani H. 2708
Hanania M. I. 3282
Hanneken C. B. 2724
Harris T. E. 3265
Harrison J. M. 3611
Harte C. 2541
Hartman P. 2951, 3024
Håstad M. 2835
Hattery L. H. 3585
Haupt O. 3445
Havliček K. 3400
Hayashi Y. 2846
Hayman W. K. 2849
Hecke E. 2627 К
Heffter L. 3358 К
Heider L. J. 3242
Heigl F. 3481
Heinhold J. 3486
Heins M. 2857
Heller A. 2793

Helmers K. 3286
Helms L. L. 2988
Henderson A. 3292, 3293
Henrici P. 3189
Heppes A. 3440
Herget P. 3489
Hershey R. L. 3630
Hewitt E. 3238
Heyting A. 2559
Hille E. 2917
Hilton P. J. 2791
Hiramatu H. 3413
Hlavatý V. 3423
Hodge W. V. D. 3360
Hoffmann H. 3576, 3623
Holanda S. 2744
Holzer L. 2750 K
Hong Imsik 3028
Hönicke H. 3206, 3207
Horváth F. 3338
Horváth J. 3215
Hronec J. 2903
Hsu C. S. 2880
Huber A. 3595
Hume J. N. P. 3602 K
Hussain Q. M. 3317

I

Igusa J. 3428
Ionescu Tulcea A. 3246
Ishida M. 3385
Ivan J. 2600
Izumi Y. 2682

J

Jackson H. L. W. 3018
Jackson M. 3187
Jaeger J. C. 2613
Jain P. C. 3132
Jakimovski A. 3200
Jakobi R. 3314
Jancel R. 3137
Janet M. 3014
Jankowski A. 3349
Janowski W. 2845
Jeffreys H. 2942
Jen Fu-yao 2852
Jenkins R. 3570
Jenkinson G. H. 3642
Johnson N. L. 3266
Jurga F. 3510 K

K

Kadison R. V. 3230
Kahan T. 3137
Kahane J.-P. 3259
Källén G. 3249
Kallenberg G. W. M. 3398
Kaminin L. I. 3039
Kántor S. 2806
Kantorowitz E. 3625
Karl H. 2825
Kasch F. 2709, 2710
Katznelson Y. 2856
Kearns D. A. 2824
Kease W. J. 3638
Kellerhals G. 3261
Kemp K. 3275
Kendall D. G. 3263
Kennedy J. 2644
Kennedy P. B. 2849
Kibbey D. E. 3001 K
Kiessler F. 3497
Killgrove R. B. 2699
Kist J. 3244
Kisyński J. 3009
Klega V. 3512 K
Kline M. 2645
Koenig J. F. 3210
König H. 2620
Konijn H. S. 3268
Koszul J.-L. 3427
Kramer W. 3344 K
Kreisel G. 2666
Krech A. 3353
Krohn H. 3637
Królikowska Z. 2919
Krzywoblocki M. Z. v. 3079, 3087
Kugler S. 2566
Kühlein T. 3173 K
Kuipers L. 3184
Kulikowski R. 3209
Kunze R. A. 3227
Kurzweil J. 3216
Küstner H. 3530 K
Kuzmin R. O. 2661 K

L

Ladd C. 2641
Lafleur C. 3569
Laframboise M. A. 2643
Lakshmana Rao S. K. 3186
Lambek J. 2729
Lambotte J. 3569
Lanczos C. 3220
Landahl H. D. 3074
Landau E. 2749 K
Lang S. 3381
Langue P. 3313
Lansraux G. 3466
Lasota A. 3031
Laver F. J. M. 3591
Lavrentieff M. M. 2855
Lax P. D. 3026
Leader S. 3239
Ledermann W. 2791
Leilich H. O. 3557
Lelong P. 2865
Leung K. T. 3384
Lewandowski Z. 2722
Lieberstein H. M. 3044
Lill J. C. 2901
Lions F. 3552
Little J. D. C. 3533 K
Livovschi L. 3307
Lloyd D. B. 2640
Lóky B. 3527 K, 3528 K
Lonergan J. P. 3575
Lord F. M. 3281
Ludford G. S. S. 3083, 3084
Luxemburg W. A. 2882

M

MacCamy R. C. 3116
McCarthy J. 2669
McCarthy P. J. 2728
Mack S. F. 3389
Mackie A. G. 3088
Macrobert T. M. 3191, 3194
Magenes E. 3051
Mahler K. 3364
Mair W. 3522
Malgrange B. 3427
Mangeron D. 3305
Mann W. R. 3043
Marchionna E. 3383
Marcus F. 3390
Marcus S. 2798
Margaris A. 2684
Mařík J. 3225
Marsicano F. R. 3312
Masotti Biggiogero G. 3359 K
Massera J. L. 2907—2909
Matsumoto M. 3414
Matsuno T. 2866
Matsuyama N. 2816
Matuda T. 2934
Maurin K. 3236
Mayer O. 3432
Mayers P. 3621
Mazkewitsch D. 3325
Mazur P. 3262
Meder A. E., Jr 2646
Meisters G. H. 2981
Meredith G. P. 2678
Merk H. J. 3129
Meulenbeld B. 3184
Mibu Y. 3245
Mihăileanu N. 3406
Mihăilescu N. 2573 K
Mikołajska Z. 2949
Mikusiński J. 2906
Miles E. P., Jr 3030
Milkman J. 3153
Miller C. 2564
Miroux J. 3566
Mitrinović D. S. 2656 K
Moldovan E. 2557
Morikawa H. 3380
Morse P. M. 3533 K
Moser J. 2990, 3061
Moser L. 2700, 2729
Moshman J. 3274
Mulcrone T. F. 2586
Munch O. J. 3178
München T. H. 3486
Murre J. P. 3382
Musen P. 3489
Musielak J. 2809
Mussard J. A. 2537
Myhill J. 2667

N

Nakae T. 3422
Nakai M. 3234
Nasu Y. 3402
Nelson E. 3036
Neron A. 3381
Nicol C. A. 2736
Ninomiya N. 3022
Nitsche J. C. C. 3011
Nives Battiston M. 3587
Noble B. 3473
Norguet F. 2789

O

Ogura Y. 3450
Okano H. 2819—2823
Olum P. 2792
Ono T. 3231, 3232
Opial Z. 2930
Orlicz W. 2809, 3175
Ou So-Mo 2843
Overhoff G. 3584
Owens O. G. 3034
Ozaki S. 2866

P

Pacelli M. 3020
Pai S. I. 3086
Palacios J. 3416
Palamà G. 2816, 2737
Parsons D. H. 3016
Paschkis V. 3624
Pease E. 3318
Peiser A. M. 3620
Pekeris C. L. 3204
Pełczyński A. 3219, 3221, 3222
Pellegrino F. 2615
Pereira Muniz P. 3155
Perret R. 3641
Petersen G. M. 3177
Petersson H. 2718
Pettineo B. 3017
Phillips C. A. 3585
Phister M., Jr 3639
Pierce R. S. 3243
Pignedoli A. 3169 K
Piskorek A. 3035
Pleskot V. 3513 K
Pogorzelski W. 3052
Popadić M. 2748 K
Popov B. S. 3183
Porges A. 3167
Pottsepp L. 3079
Power G. 3018
Praporgescu N. 3260
Putnam C. R., 2950, 2954, 2988

Q

Querré J. 2745

R

Rabinowitz P. 3610
Rado R. 2764
Ragab F. M. 3181, 3192, 3193, 3195
Ralston K. E. 2699
Ramey H. J., Jr 3570
Rao K. V. R. 2706
Raschewski (Rašev-skij) P. K. 3299 K, 3300 K
Reverdino C. 3330 K
Ray G. D. 3082
Reddick H. W. 3001 K
Régnier A. 3248
Rembs E. 3444, 3446
Revuz A. 2803
Ridout D. 2715
Rimer D. 2647
Rintoul W. H. 3582
Rippey R. M. 2648
Rizzi G. 3598
Robbins H. 2653 K
Robertson M. S. 3180
Rochester N. 3555
Rogers C. A. 3247
Rollof Y. 2593
Rooney P. G. 3199
Roşculeţ M. N. 3013
Rosenlicht M. 3378
Ross D. T. 3538
Roston S. 3201
Roth K. F. 2711
Rougier L. 2687
Roumieu C. 3214
Routledge N. A. 3534
Roux D. 2698
Rózsa P. 3472

S

Saarlas M. 3079
Sacerdoti S. 3045
Saito Teishiro 3233
Saito Tosiya 2904
Sakurai A. 3091
Sălăgean I. 2813
Salet W. J. H. 3335 K
Salzmann H. 3434, 3436
Sandor S. 2965
Sansone G. 2943, 3170 K
Sauer R. 3596
Savastano G. 3551
Schade C. 3605 K
Schaefer H. 3146
Schäffer J. J. 2907—2909
Scheffler H. 3285
Schinzel A. 2730
Schmidt H. 2720

Schoenberg I. J. 2836
Schot S. H. 3083, 3084
Schott L. 3361
Schröter K. 2679, 2680
Schuff H. K. 3628
Schwartz C. R. 3630
Schwarzenberger R. 3078
Scott E. J. 3032
Segre B. 3373
Seibert P. 2858
Seifert G. 2931
Sekine K. 3250
Sestier A. 3603 K
Sestini G. 3042
Severi F. 3386
Shaffer D. H. 3114
Shannon C. E. 2670
Shao Pin-tsung 2832
Sherman J. E. 3544
Shutrick H. B. 3426
Sieklucki K. 2770
Sierpiński W. 2746
Simboan G. 2799
Sims A. R. 3119
Singh S. N. 3099
Singh V. N. 3196
Skånberg C. 3547
Skolem T. 2738
Skowroński J. 2963, 2984
Smale S. 2788
Smithies F. 2617, 2619
Śniatycki A. 2740
Soanes S. V. 3559
Sokołowski M. 3111
Sopka J. J. 3280
Soucup H. 3315
Spampinato N. 3379
Spencer R. D., Jr 3592
Speziali P. 2588
Spring O. W. 3633
Springer G. 2863
Stamatis E. 2579
Stampacchia G. 3051
Stevin S. 2626 K
Stipanić E. 2565
Stoka M. I. 3430, 3431, 3433, 3435
Stoll W. 2861
St.-Pierre J. 3271
Stratton J. A. 3533 K
Strauss M. 3308
Streefkerk H. 2637
Strubecker K. 2584
Subba Rao M. V. 2726, 2734
Sumner D. B. 3164
Sunyer Balaguer F. 2808
Suzuki H. 2786
Švec M. 2598
Svoboda F. 2542
Świerczkowski S. 2732
Swingle P. M. 2766—2768
Szarka Z. 3474
Szarski J. 3033
Szász P. 3348
Szmydt Z. 2970

T

Takasu T. 2868, 3421
Takeuti G. 2677
Tamura I. 2785
Targonski G. 3166
Tassi G. 3472
Taylor S. J. 3247
Teuffel E. 3329
Thébault V. 3319, 3321, 3322
Thomas H. E. 3619
Thompson T. R. 3629
Tirilman L. 2805
Todd J. 2543
Tomiyama J. 3235
Toscano L. 2721
Traenkle C. A. 3480
Turán P. 2837
Tverberg H. 2739
Tylden-Pattenson K. 3546

U

Ulbricht H. 3494
Urbanik K. 3212, 3287
Ushakov V. B. 3635

V

Valat J. 2947
Varoli G. 2611
Vauquois B. 3540
Veletsos A. S. 3615
Venkannayah K. 2885
Venning B. H. 3571
Venuat M. 3290
Vere-Jones D. 3263
Verhagen C. M. 3567
Villa M. 3397
Vincze E. 3174
Vinograde B. 3217
Vogel A. 3526 K
Volkmann B. 2710
Völlm E. 3514 K
Vrănceanu G. 3405, 3407, 3412
Vranić V. 2663 K
Vzorova A. I. 3523 K

W

Waadeland H. 2847
Walfisz A. 2749 K
Walsh J. L. 2841, 2842
Walter E. 3270
Walter W. 3046, 3270
Ward J. A. 2741
Watanabe H. 2829
Ważewski T. 3033
Wegstein J. H. 3536
Weinitschke H. J. 3488
Weiss M. 2827, 2828
Wexler D. 2965
Wilcox C. H. 3115, 3120
Willers F. A. 3515 K
Williams E. 3030
Williams G. M. E. 3546
Williams W. L. G. 2621
Wingo C. E., Jr 2723
Wintner A. 2876, 2952
Wippermann F. 3608
Wirsing E. 2707
Wiseman J. D., Jr 3316
Withum D. 3108
Witkowski J. 2610
Wohlfahrt K. 2701
Woinaroski R. 3306
Wojtowicz W. 3525 K
Wolfe J. M. 3467
Woods A. C. 2713
Wright E. M. 2697
Wright J. B. 2686

Y

Yamamoto N. 3226
Yates R. C. 2742

Z

Zajta A. 3485
Žák J. 2662 K
Zanaboni O. 3203
Zeeman E. C. 2794
Zeitlin D. 2886, 3160
Ziemba S. 2948, 2984
Zimmerberg H. J. 3163
Zinger A. 3271
Zink R. E. 2802
Zuckerman H. S. 3238
Zulauf A. 3157

Технический редактор *Г. А. Шевченко*